ÁLGEBRA

ARRAYAN M.R.

Acerca de las autoras

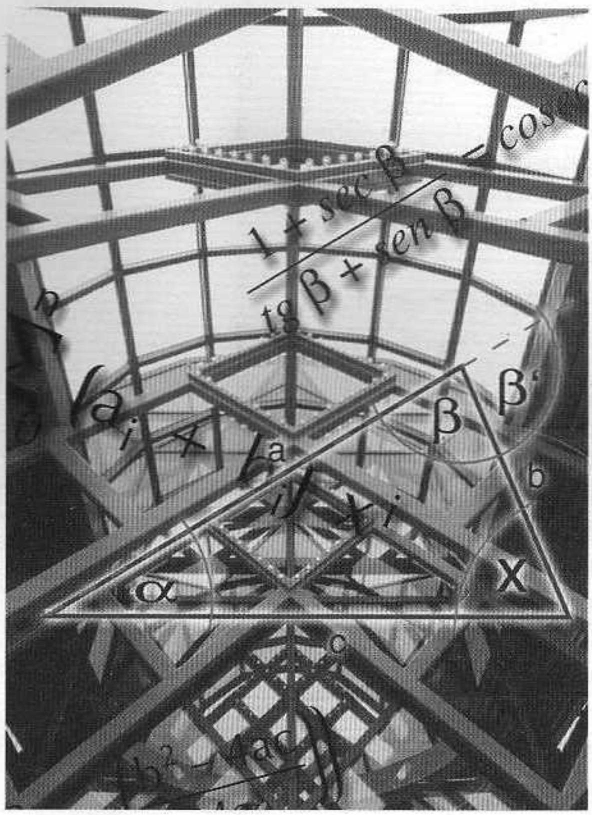
Ximena Carreño Campos
Profesora de Matemática, Pontificia Universidad Católica de Chile.
Orientadora, Instituto Chileno de Cultura Hispánica. Consejo Mundial de Educación.
Profesora de la Pontificia Universidad Católica de Chile.
Profesora del Colegio Saint George's College, Santiago.

Ximena Cruz Schmidt
Profesora de Estado en Matemática y Física, Pontificia Universidad Católica de Chile.
Magíster en Educación, Mención Currículum, Universidad de Tarapacá.
Ex-profesora de la Pontificia Universidad Católica de Chile, Facultad de Matemática.
Ex-profesora de la Universidad Católica del Norte, Sede Arica.
Profesora de la Universidad de Tarapacá, Facultad de Ciencias, Facultad de Humanidades.
Directora del Colegio San Marcos de Arica.

ARRAYÁN EDITORES S.A.
Bernarda Morín 435, Providencia
Teléfono: (56-2) 431 42 00 • Fax: (56-2) 431 42 82
Santiago de Chile.
http://www.arrayan.cl • e-mail: arrayan@arrayan.cl

Ismaela Pino

ÁLGEBRA



Ximena Carreño Campos
Ximena Cruz Schmidt

ARRAYAN
EDITORES M.R.

EDICIÓN Y PRODUCCIÓN:

Departamento Pedagógico Arrayán Editores S.A.

Actualmente compuesto por:

Dirección Editorial
Leonardo Vilches Robert

Edición Área Matemática y Ciencias
César Cerda Bascuñán
Claudio Silva Castro

Edición Área Lenguaje y Comunicación y Ciencias Sociales
Patricia Calderón Urzúa
Claudio Troncoso Pino
Roberto Peñailillo Farías

Edición Área Educación Básica y Prebásica
Ximena Fuster Domínguez
Vinka Guzmán Tacla

Ediciones Especiales
José Luis Jorquera Dölz
Cristián Venegas Sierra

Ilustraciones
Andrés Lizama Yévenes

Corrección de Estilo
Alejandro Cisternas Ulloa

Informática
Rodrigo Canales Medina

Participación Externa:

Revisión de contenidos
Bernardita Cruz Schmidt

Bernarda Morín 435. Providencia. Santiago de Chile. Teléfono: 4314200. Fax: 2741041.
email: arrayan@arrayan.cl. Consultas: editorial@arrayan.cl

Obra: Álgebra Arrayán.
Inscripción: 87.879. I.S.B.N: 956-240-168-5.

Segunda edición, noviembre de 2002.
reimpresión N°1 de marzo de 2004.
reimpresión N°2 de noviembre de 2004.
reimpresión N°3 de mayo de 2005.
reimpresión N°4 de febrero de 2006.
reimpresión N°5 de septiembre de 2006.

Impreso en Chile por Imprenta Salesianos S.A.

Introducción

En este libro de ejercicios de ÁLGEBRA hemos querido proponer una cantidad de trabajos que va desde los ejercicios más tradicionales para el aprendizaje del álgebra hasta los problemas más modernos y desafiantes que invitan al estudiante y al maestro a conversar y discutir en torno a posibles soluciones.

Creemos sinceramente estar haciendo un aporte para colaborar con aquellos estudiantes que se interesen en afianzar sus conocimientos y sentar las bases de una sólida formación matemática.

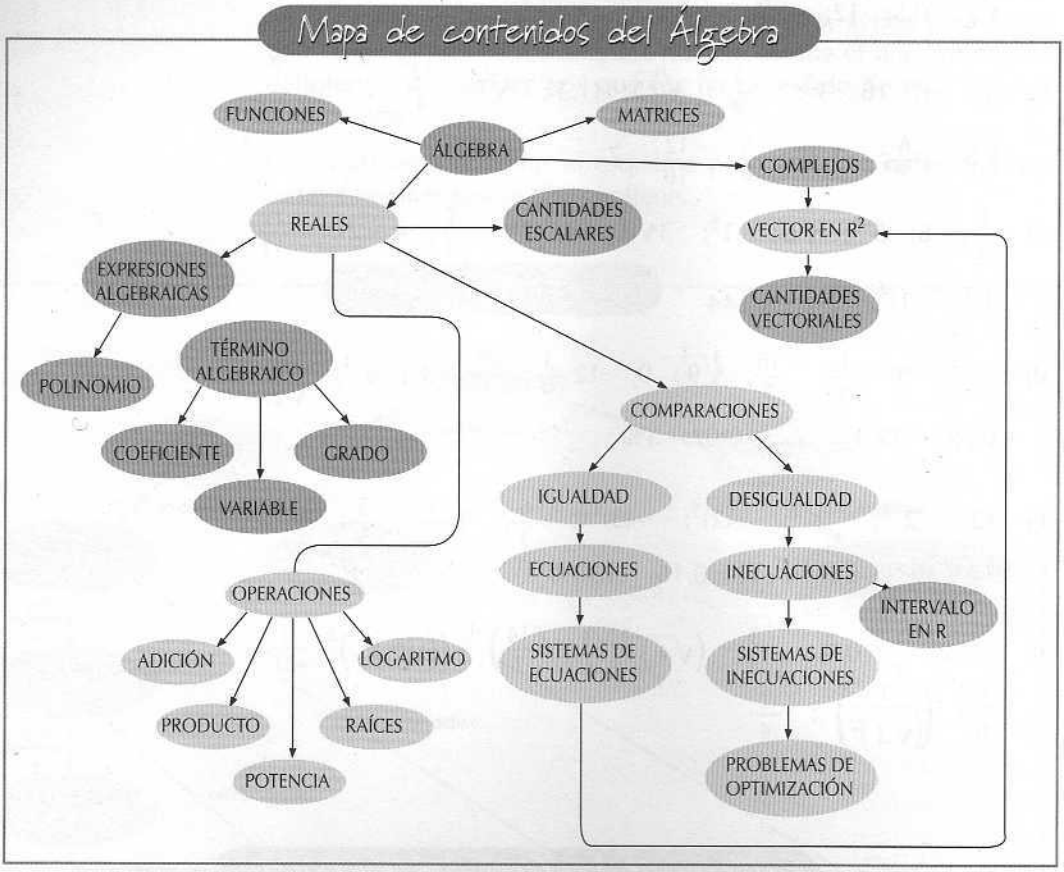
Estimado lector: queremos invitarlo a recorrer estas páginas en el orden que usted estime conveniente y de acuerdo con las necesidades que se le vayan presentando. En estas líneas vamos a tratar de darle una visión global del ámbito de trabajo de la aritmética y del álgebra.

Nuestro mundo numérico se fue generando a lo largo de los siglos según los hombres iban necesitando de diversos modos de comunicación y de acuerdo con los requerimientos de otras áreas de acción, como el comercio, la astronomía, la agricultura, el desarrollo de las diversas ciencias, la matemática por sí misma y una infinidad de actividades en que el hombre se ha interesado por crear su expresión en términos numéricos.

En la página siguiente encontrará un esquema que contiene los distintos conjuntos de números y la forma como los matemáticos los han ido ordenando de acuerdo con distintos criterios; y más adelante verá un gráfico de los diferentes conjuntos numéricos.

El objetivo que nos hemos propuesto al escribir esta introducción y proponerle algunas actividades es que usted se forme una idea global de los distintos ámbitos en que se mueve la aritmética y, como consecuencia, el álgebra, que no es otra cosa que la descripción de modelos matemáticos para representar múltiples situaciones de la naturaleza y/o generaciones abstractas del matemático. Estos modelos son las distintas relaciones entre variables, que al asignarles los valores adecuados y haciendo los análisis pertinentes nos entregan potentes herramientas para resolver problemas tradicionales, como la trayectoria de un proyectil, que se puede describir a través de una ecuación de segundo grado, u otros, como el uso de matrices para organizar y manipular gran cantidad de información.

Con el objeto de que el estudiante pueda formarse una idea completa de lo que abarca el Álgebra abordada en el texto, le proponemos, a continuación, un resumen esquemático que puede ayudar a tener una idea general de los contenidos.



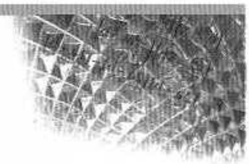
Obsérvelo, comente con sus compañeros y profesores lo que encuentre en él; critíquelo y envíe sus observaciones al correo electrónico *ximenacs@entelchile.net.*

En el texto hemos querido entregarle referencias para desarrollar sus estructuras mentales, pero sin duda esto no se logrará si no se desea y trabaja con esfuerzo y persistencia. Es probable que alguna vez haya escuchado decir que el desarrollo del pensamiento es un proceso interior de la persona. Efectivamente, el mundo circundante, cercano o lejano físicamente, las inquietudes personales, las expectativas en la vida, la disposición a trabajar son las únicas herramientas que lo pueden llevar a desarrollar su capacidad de pensar y a enriquecer sus estructuras mentales. Como usted sabe, el aprendizaje se produce cuando relacionamos algo novedoso con algo que ya sabemos; por eso es que la persona cada vez que aprende, potencia más aún su capacidad de aprender. Ponemos en sus manos este texto con la ilusión de que sea un medio eficaz para enriquecer sus estructuras mentales y su aprendizaje en general. En la medida que ello suceda, el texto estará sirviendo efectivamente como un medio para el aprendizaje, y así estaremos colaborando en su crecimiento como persona en este mundo globalizado.

CAPÍTULO 1

Álgebra en los números reales

Lenguaje algebraico 1.1



El lenguaje algebraico se basa en el uso de letras y relaciones matemáticas para generalizar diferentes situaciones.

Ejemplos:

- El perímetro P de un cuadrado de lado a $P = 4a$.
- El área A de un cuadrado de lado a $A = a^2$.
- El área A de un triángulo de base b y altura h $A = \dfrac{b \cdot h}{2}$

Cada una de las letras involucradas en las fórmulas anteriores es una *variable*; a cada variable se le pueden asignar diferentes valores.

En general, una variable es cualquier letra involucrada en una expresión algebraica.

Expresemos en lenguaje algebraico:

1.	El doble de un número	$2a, 2x, 2m, \ldots$
2.	El triple de un número	$3x, 3y, 3b, \ldots$
3.	La mitad de un número	$\frac{p}{2}, \frac{q}{2}, \frac{z}{2}, \ldots$
4.	El cuadrado de p	p^2
5.	a aumentado en b	$a + b$
6.	a disminuido en b	$a - b$
7.	El producto entre a y b	$a \cdot b$

Si en alguna expresión no está especificado el término, podemos asignar cualquier variable para representar el enunciado, como se puede ver en los ejemplos 1, 2, 3 y 4.

En general,

- Son múltiplos de a:

el doble	$2a$
el triple	$3a$
el cuádruple	$4a$
el quíntuple	$5a$
⋮	

- Son fracciones de a:

un medio (o la mitad)	$\frac{a}{2}$ o $\frac{1}{2} \cdot a$
un tercio (o la tercera parte)	$\frac{a}{3}$ o $\frac{1}{3} \cdot a$
un cuarto (o la cuarta parte)	$\frac{a}{4}$ o $\frac{1}{4} \cdot a$
un quinto (o la quinta parte)	$\frac{a}{5}$ o $\frac{1}{5} \cdot a$
⋮	

- Son potencias de a:

el cuadrado	a^2
el cubo	a^3
la cuarta potencia (o a la cuarta)	a^4
la quinta potencia (o a la quinta)	a^5
⋮	

- Otras expresiones algebraicas:

Un número par	$2n$
Un número impar	$2n - 1$

Ejercicios resueltos

Expresemos en lenguaje algebraico:

1. El doble de un número, aumentado en la mitad del mismo número. Aquí el "número" no está determinado; asignémosle la variable x; nos queda:

$$2x + \frac{x}{2}$$

2. El doble de a, aumentado en b

$$2a + b$$

3. El doble de a aumentado en b

$$2(a + b)$$

Observe los ejemplos 2 y 3. ¿Cuál es la diferencia?

4. La mitad de a más el triple de b.
Aquí ya están asignadas las variables, son a y b. Nos queda:

$$\frac{a}{2} + 3b$$

5. El doble del cuadrado de a.

$$2\,a^2$$

6. El cuadrado del doble de a.

$$(2a)^2$$

Observe la diferencia entre los ejercicios 5 y 6.

7. La cuarta parte del triple del cuadrado de b.

$$\frac{3\,b^2}{4}$$

8. El triple de la cuarta parte del cuadrado de b.

$$3\left(\frac{b^2}{4}\right)$$

9. El cuadrado de la cuarta parte del triple de b.

$$\left(\frac{3b}{4}\right)^2$$

Observe las diferencias entre los ejercicios 7, 8 y 9.

10. La diferencia entre el quíntuple de x y la mitad de y.

$$5x - \frac{y}{2}$$

11. La suma de tres números pares consecutivos.

$$(2n) + (2n + 2) + (2n + 4)$$

o

$$(2n - 2) + (2n) + (2n + 2)$$

Observe la diferencia entre ambas.

12. Tres impares consecutivos.

$$2n - 1,\ 2n + 1,\ 2n + 3$$
$$2n + 1,\ 2n + 3,\ 2n + 5$$

Observe la diferencia entre ambas y exprese esos tres números de una manera distinta.

13. La semisuma entre a y b.

$$\frac{a + b}{2}$$

14. La semidiferencia entre a y b.

$$\frac{a - b}{2}$$

15. El producto entre un número y su antecesor.

$$x\,(x - 1)$$

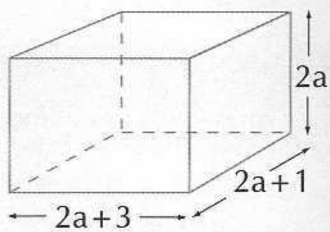
16. El producto entre un número y su sucesor.

$$x\,(x + 1)$$

Ejercicios

I. Asigne variables y exprese en lenguaje algebraico:

1. La mitad de un número.
2. El triple de a, aumentado en el doble de b.
3. El doble del cociente entre a y b.
4. El cubo de la diferencia entre x e y.
5. La diferencia entre el cubo de x y el cuadrado de y.
6. El cuadrado de a equivale a la suma entre el cuadrado de x y el cuadrado de y.
7. La suma de tres números consecutivos es 213.
8. La suma de tres pares consecutivos es 168.
9. El cubo del cuadrado de la diferencia entre x e y.
10. La cuarta parte del producto entre el cuadrado de a y el cubo de b.
11. El triple de un número equivale al doble del mismo número aumentado en 15.
12. El volumen de una esfera de radio r equivale al producto entre cuatro tercios de π y el cubo del radio.
13. La superficie de un rectángulo cuyos lados miden $(a + 3)$ y $(a - 3)$.
14. El volumen de un cubo de arista $2a - 1$.
15. El volumen del paralelepípedo de la figura



16. La superficie lateral del paralelepípedo de la figura.
17. La suma de los cuadrados de tres números consecutivos.
18. El cuadrado de la suma de tres números consecutivos.

Soluciones

1. $\frac{a}{2}$
2. $3a + 2b$
3. $2\frac{a}{b}$
4. $(x - y)^3$
5. $x^3 - y^2$
6. $a^2 = x^2 + y^2$
7. $(a - 1) + a + (a + 1) = 213$
   $a + (a + 1) + (a + 2) = 213$
8. $(2n - 2) + 2n + (2n + 2) = 168$
9. $[(x - y)^2]^3$
10. $\frac{a^2 \cdot b^3}{4}$
11. $3x = 2x + 15$
12. $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$
13. $S = (a + 3)(a - 3)$
14. $V = (2a - 1)^3$
15. $V = 2a(2a + 3)(2a + 1)$
16. $S = 2(2a(2a + 3) + 2a(2a + 1))$
17. $x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2$
18. $[x + (x + 1) + (x + 2)]^2$

Definición: Se llama término (algebraico) a un conjunto de números y letras que se relacionan entre sí por medio de la multiplicación y/o división.

Ejemplo: $2a^2b$, $\frac{3a}{p}$, $-\frac{5}{7}x^2y^2z$.

El término algebraico consta de un FACTOR NUMÉRICO, un FACTOR LITERAL y un GRADO.

El grado es la suma de los exponentes de las letras que aparecen en el término.

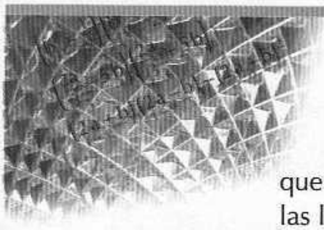
Ejemplo: En el término $-\frac{12}{17}a^6b^4c^2$ el coeficiente numérico es $-\frac{12}{17}$; el factor literal es $a^6b^4c^2$ y el grado es 12 (6+4+2).

Observación 1: Si el coeficiente numérico no está escrito, entonces es 1.

Observación 2: Si el grado no está escrito, entonces es 1.

Se llama EXPRESIÓN ALGEBRAICA a cualquier suma o resta de términos algebraicos. Si la expresión tiene dos términos, entonces es un BINOMIO; si tiene tres términos se llama TRINOMIO; si tiene cuatro o más, hablamos de POLINOMIOS. (El término POLINOMIO se puede usar en forma general para cualquier expresión algebraica.)

1.2 Valorización de expresiones algebraicas



Las expresiones algebraicas no representan valores en sí, sino que pueden ser evaluadas para distintos valores que se les asignen a las letras que las componen.

Ejercicios resueltos

1. El valor del monomio a^2b cuando $a = 2$ y $b = 5$ es $2^2 \cdot 5 = 20$.

   Reemplazamos directamente las letras a y b por los valores asignados; en este caso, 2 y 5, y realizamos las operaciones indicadas.

2. El valor del mismo monomio a^2b cuando $a = 3$ y $b = -4$ es:

   $3^2 \cdot (-4) = 9 \cdot -4 = -36$

3. Si $x = -2$; $y = 5$ y $z = 4$, el valor de

   $2x + 3y - z$ es:

   $2 \cdot -2 + 3 \cdot 5 - 4 =$

   $-4 + 15 - 4 = 7$

4. Si m es el doble de n, n es el cuadrado de p y $p = 3$, determinemos m y n:

   Aquí tenemos: $m = 2n$; $n = p^2$ y $p = 3$, entonces $n = 3^2 = 9$

   y $m = 2n = 2 \cdot 9 = 18$.

   Así; $n = 9$ y $m = 18$.

Ejercicios

I. Determine coeficiente numérico, factor literal y grado de los siguientes términos algebraicos:

1. $3\,ab$
2. $-\dfrac{2}{5}\,a$
3. $0{,}02\,a^2b^2$
4. $17\,p^2q^3z^8$
5. $-0{,}3\,c$
6. a
7. a^2b
8. $\dfrac{3a^2b^4}{5}$
9. $\dfrac{m^{12}n}{9}$
10. $-\dfrac{x^{11}y}{4}$

II. Si $a = 3$ y $b = 2$, determine el valor de:

1. $2ab$
2. $a^2 - b^2$
3. $b^2 - a^2$
4. $a^2 + ab + b^2$
5. $-2ab$
6. $a^3 - b^3$
7. $-b^5$
8. $1 + a + b + ab$
9. $a^2 + b^2 - a - b$
10. $a - \frac{b^3}{4} - 6$

III. Si $m = -2$ y $n = +3$, determine el valor de:

1. $2m - 3n$
2. $m - m^2 - 2n$
3. $1 + m$
4. $m^2 - n^2$
5. $(m + n)(m - n)$
6. $m^2 + 2mn + n^2$
7. $-5mn$
8. $\frac{1}{m} - \frac{1}{n}$
9. $\frac{1}{m - n}$
10. $\frac{-1}{mn}$

IV. Si $x = 4, y = -2$ y $z = 5$, determine el valor de:

1. $2x + y + z$
2. $x - y - 2z$
3. $(x + y) - (x + z)$
4. $x(x^2 + y^2 + z^2)$
5. $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$
6. $2x^2y - 2xz^2$
7. $x^2 - 1$
8. $(z^2 - 2) + (z^2 - 3)$
9. $(3 - xyz) + (2 - xyz)$
10. $x^2 - y^4 + \frac{z}{5}$

V.

1. Si $m + n = 3$ y $n = -1$, determine m.
2. Si $m - 3 = 2p$ y $p = -2$ determine m.
3. $p + q - r = 12$, $r - q = 5$, determine p.
4. $2a - 9 = b$ y $a = -3$, determine b.
5. $1 + 2a = b - 2$ y $a = -2$, determine b.
6. Si a es el doble de b, b es un tercio de c y $c = 12$, determine a y b.
7. Si m es la cuarta parte de p y p es el cuadrado de 2, determine m.
8. La mitad de a es 1. ¿Cuál es el valor de a?
9. La tercera parte del doble de m es 4. ¿Cuál es el valor de m?
10. Si $p + q = 2r$, q es el triple que p y $p = 5$, ¿cuál es el valor de r?

I.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Coeficiente numérico	3.	$-\frac{2}{5}$	0,02	17	$-0,3$	1	1	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{4}$
Factor literal	ab	a	a^2b^2	$p^2q^3z^8$	c	a	a^2b	a^2b^4	$m^{12}n$	$x^{11}y$
Grado	2	1	4	13	1	1	3	6	13	12

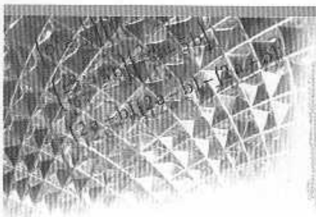
II. 1. 12 2. 5 3. -5 4. 19 5. -12 6. 19 7. -32 8. 12 9. 8 10. -5

III. 1. -13 2. -12 3. -1 4. -5 5. -5 6. 1 7. 30 8. $-\frac{5}{6}$ 9. $-\frac{1}{5}$ 10. $\frac{1}{6}$

IV. 1. 11 2. -4 3. -7 4. 180 5. $\frac{3}{4}$ 6. -264 7. 15 8. 45 9. 85 10. 1

V. 1. $m = 4$ 2. $m = -1$ 3. $p = 17$ 4. $b = -15$ 5. $b = -1$ 6. $a = 8$ $b = 4$ 7. $m = 1$ 8. $a = 2$ 9. $m = 6$ 10. $r = 10$

1.3 Reducción de términos semejantes y uso de paréntesis



Definición: Se llaman TÉRMINOS SEMEJANTES aquellos que tienen el mismo factor literal (y por consiguiente el mismo grado); sólo pueden diferir en el coeficiente numérico.

Ejemplo 1. Son términos semejantes:

$$a^2, \quad 2a^2, \quad -3a^2, \quad 0{,}5a^2, \quad \frac{a^2}{4}$$

Ejemplo 2. No son términos semejantes:

$$a^2b \text{ y } ab^2, \quad -a \text{ y } -a^2, \quad 2ab \text{ y } ab^2,$$

Vemos que en el ejemplo 1, el factor literal de todos ellos es a^2; por esta razón son todos semejantes.

En el ejemplo 2, en cambio, tenemos en los tres casos factores literales diferentes entre sí.

En una expresión algebraica SÓLO podemos reducir aquellos términos que son semejantes y esto se efectúa sumando (o restando) los coeficientes numéricos y manteniendo el factor literal.

El uso de paréntesis es frecuente en álgebra. Sirve para separar expresiones algebraicas y se elimina de acuerdo con las siguientes reglas:

1. Si está precedido de un signo + o no tiene signo escrito, se elimina sin hacer ningún cambio.

2. Si está precedido de un signo – se elimina después de cambiar TODOS los signos de los términos del interior del paréntesis. (Es importante hacer notar que al eliminar el paréntesis también se elimina el signo – que lo antecede.)

Si una expresión algebraica contiene paréntesis, es conveniente eliminarlo antes de proceder a reducir los términos semejantes.

Ejercicios resueltos

1. $a + 2a + 3a$

Los tres términos de la expresión son semejantes; por lo tanto, sumamos sus coeficientes numéricos y conservamos el factor literal:

$a + 2a + 3a = 6a$

2. $2a + 3b - 5a + 6b$

Aquí los términos $2a$ y $-5a$ son semejantes entre sí y lo mismo ocurre con $3b$ y $6b$; entonces los podemos agrupar entre sí y obtenemos:

$2a + 3b - 5a + 6b = (2a - 5a) + (3b + 6b) = -3a + 9b$

3. $3x^6y - 5xy^6 - 7x^6y - x^6y + 11xy^6$

Agrupamos los términos según su semejanza y obtenemos:

$(3x^6y - 7x^6y - x^6y) + (-5xy^6 + 11x\,y^6) = -5x^6y + 6xy^6$

4. $5m + (3m - 7n) - 2n$

Antes de proceder a la reducción de términos es necesario eliminar el paréntesis; como éste está precedido de un signo +, lo eliminamos sin hacer cambios y obtenemos:

$5m + 3m - 7n - 2n = 8m - 9n$

5. $3x^2y - (x^2y - 2xy^2) + 3x^2y$

En este caso, al eliminar el paréntesis (y el signo que lo precede) debemos cambiar los signos de los términos del interior; nos queda:

$3x^2y - x^2y + 2xy^2 + 3x^2y$
$(3x^2y - x^2y + 3x^2y) + 2xy^2 = 5x^2y + 2xy^2$

6. $a + a^2 + a^3 + a^4$

Aquí no es posible hacer ninguna reducción pues no existen términos semejantes.

Si en una expresión nos encontramos con paréntesis dentro de otros paréntesis, procedemos a eliminarlos desde dentro hacia afuera atendiendo a la misma regla.

7. $2ab - [3a - (-2ab + 3a) - ab]$

Eliminamos primero el paréntesis interior:

$2ab - [3a + 2ab - 3a - ab]$

Ahora eliminamos el exterior:

$2ab - 3a - 2ab + 3a + ab$

$(2ab - 2ab + ab) + (-3a + 3a) = ab$

Ejercicios

1. Reduzca las siguientes expresiones:

1. $m + 2m$
2. $a + 2a + 9a$
3. $m^2 - 2m^2 - 7m^2$
4. $6x^2y^2 - 12x^2y^2 + x^2y^2$
5. $3a - 2b - 5b + 9a$
6. $a^2 + b^2 - 2b^2 - 3a^2 - a^2 + b^2$
7. $x^2yz + 3xy^2z - 2xyz^2 - 3xy^2z + xyz^2 - x^2yz$
8. $2pq + 3p - 12q - 15q + 7pq - 13p$
9. $2x - 6y - 2x - 3y - 5y$
10. $15a + 13a - 12b - 11a - 4b - b$
11. $\frac{a}{2} + \frac{a}{3} + \frac{a}{4}$
12. $\frac{a^2b}{5} - \frac{2ab^2}{3} + \frac{3ab^2}{2} - \frac{6a^2b}{5}$
13. $m - \frac{m}{2} + \frac{2m}{3} - \frac{m}{4}$
14. $\frac{3a-b}{2} + \frac{3a-b}{5}$
15. $2p + \frac{3}{4}q - 7p + \frac{3}{2}q$
16. $a + a^2 + a^3 + a^4 - a - 2a^2 + 3a^3 - 4a^4$
17. $0{,}2\,m - 0{,}02n + 1{,}07m - 1{,}03n - m - n$
18. $0{,}5x^2y - 0{,}4xy^2 + 0{,}3x^2y - 0{,}2xy^2 + x^2y$
19. $1{,}17a - 2{,}15a - 3{,}25a + 4{,}141a$

20. $1+x+xy-2+2x-3xy-3+2xy-3x$

21. $\frac{1}{5}m^2n-\frac{2}{3}mn-\frac{3}{2}m^2n+\frac{3}{10}m^2n-\frac{8}{3}mn$

22. $\frac{27}{4}p-\frac{35}{6}q+\frac{1}{4}p-\frac{1}{6}q$

23. $u^2+uv+v^2-2u^2+3uv-v^2$

24. $\frac{11}{3}s-\frac{3}{4}t+\frac{2}{3}s-\frac{1}{3}s-\frac{5}{3}s+t+\frac{1}{4}t$

25. $0{,}117a-0{,}35b-2{,}25b-1{,}1b+3{,}04a$

26. $10a+5a^2-13a^3-2a-9a^3+16a^2+a$

27. $\frac{1}{6}pt-\frac{2}{5}p-\frac{3}{4}t+\frac{2}{3}pt-\frac{3}{5}p+\frac{7}{4}t+\frac{1}{6}pt$

28. $x^2yz-xy^2z^2+xy^2z^2-x^2y^2z^2$

29. $\frac{3}{4}a^2b-\frac{2}{3}ab^2-a^2b-3ab^2+\frac{1}{2}ab^2$

30. $0{,}7m-\frac{1}{7}p-0{,}04m+0{,}3p-\frac{3}{4}p$

II. Elimine paréntesis y reduzca los términos semejantes:

1. $(a+b)+(a-b)$

2. $(a+b)+(b-a)$

3. $(a-b)+(a+b)$

4. $(a-b)-(a+b)$

5. $2a-(2a-3b)-b$

6. $3x+2y-[x-(x-y)]$

7. $2m-3n-[-2m+n-(m-n)]$

8. $-(a+b-c)-(-a-b+c)+(a-b+c)$

9. $[-(x^2-y^2)+2x^2-3y^2-(x^2-2x^2-3y^2)]$

10. $-[-(a-2b)-(a+2b)-(-a-3b)]$

11. $3x+2y-\{2x-[3x-(2y-3x)-2x]-y\}$

12. $3y-2z-3x-\{x-[y-(z-x)]-2x\}$

13. $\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}b-\left(\frac{3}{4}a-\frac{4}{3}b\right)$

14. $\frac{1}{5}a-\left[\frac{1}{2}a-\left(\frac{2}{3}a-a\right)\right]$

Ejercicios

15. $\frac{3}{4}x+\frac{2}{5}y-\left[x-2y-\left(\frac{1}{5}y-\frac{2}{3}x\right)\right]$

16. $\left[\left(a-\frac{a}{2}\right)-\left(\frac{b}{2}-b\right)\right]$

17. $(a-b)-\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right)+(a+b)$

18. $\left(1+a+b\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{a}{3}+\frac{b}{4}\right)$

19. $\frac{11}{4}x^2-\frac{3}{25}y^2-\frac{15}{4}x^2-\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{25}y^2-\frac{12}{25}y^2-\frac{9}{25}y^2$

20. Si $P = x^2 + 3x - 2$ y $Q = 2x^2 - 5x + 7$, obtenga $P + Q$.

21. Si $P = 3x - x^2$ y $Q = 3x^2 - x$, obtenga $Q - P$ y $P - Q$.

22. Si $M = 2a^2 + 3a^3 + a^4$ y $N = a^4 - 3a^2 + 2a$, obtenga $M + N$ y $M - N$.

23. Si $P = x^3 - 5x^2 - 1$; $Q = 2x^2 - 7x + 3$ y $R = 3x^3 - 2x + 2$, obtenga $P + Q - R$ y $P - (Q - R)$.

24. Si $P = m^6 + m^3 - m$; $Q = m^5 + 2m^4 - 3m^3 + 2m$ y $N = m^6 + m^5 - 2m^3 + m$, obtenga $P + Q - N$ y $N - P$.

25. Si $A = ab + 2b$; $B = a - ab$ y $C = a + b + ab$, encuentre $A + B + C$; $A + B - C$ y $A - (B + C)$.

26. Si $P = \frac{a+b}{2}$ y $Q = \frac{a-b}{2}$, entonces encuentre el valor de $P + Q$.

27. Si $P = \frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b - \frac{2}{4}c$ y $Q = \frac{2}{3}a + \frac{3}{2}b + \frac{2}{4}c$, encuentre $Q - P$.

28. Si $A = 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5$ y $A + B = x^3 - 3x^2 + x - 4$, encuentre B.

29. Si $A = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 1$; $B = 2x^3 - 3x - 3$ y $A - B + C = x^3 - 2x^2 - 3x - 2$, encuentre C.

30. Si $P = 1 - x^3$; $Q = 1 - x^2$; $R = 1 - x$, determine $P - (Q + R + 3)$.

Soluciones

I. 1. $3m$ 2. $12a$ 3. $-8m^2$ 4. $-5x^2y^2$ 5. $12a - 7b$ 6. $-3a^2$ 7. $-xyz^2$
8. $9pq - 10p - 27q$ 9. $-14y$ 10. $17a - 17b$ 11. $\frac{13a}{12}$ 12. $-a^2b + \frac{5}{6}ab^2$
13. $\frac{11m}{12}$ 14. $\frac{7}{10}(3a - b)$ 15. $-5p + \frac{9}{4}q$ 16. $-a^2 + 4a^3 - 3a^4$ 17. $0{,}27m - 2{,}05n$
18. $1{,}8x^2y - 0{,}6xy^2$ 19. $-0.089a$ 20. -4 21. $-m^2n - \frac{10}{3}mn$ 22. $7p - 6q$
23. $-u^2 + 4uv$ 24. $\frac{7}{3}s + \frac{1}{2}t$ 25. $3{,}157a - 3{,}7b$ 26. $9a + 21a^2 - 22a^3$
27. $pt - p + t$ 28. $x^2yz - x^2y^2z^2$ 29. $-\frac{1}{4}a^2b - \frac{19}{6}ab^2$ 30. $\frac{33}{50}m - \frac{83}{140}p$

II. 1. $2a$ 2. $2b$ 3. $2a$ 4. $-2b$ 5. $2b$ 6. $3x+y$

7. $5m-5n$ 8. $a-b+c$ 9. $2x^2+y^2$ 10. $a-3b$ 11. $5x+y$ 12. $4y-3z-x$

13. $-\frac{1}{4}a+\frac{2}{3}b$ 14. $\frac{-19a}{30}$ 15. $\frac{13}{5}y-\frac{11}{12}x$ 16. $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$ 17. $\frac{3a}{2}+\frac{b}{2}$

18. $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}a+\frac{3}{4}b$ 19. $-\frac{7}{4}x^2-y^2$ 20. $3x^2-2x+5$

21. $Q-P=4x^2-4x$
$P-Q=4x-4x^2$

22. $M+N=2a^4+3a^3-a^2+2a$
$M-N=5a^2+3a^3-2a$

23. $P+Q-R=2x^3-3x^2-5x$
$P-(Q-R)=4x^3-7x^2+5x-2$

24. $P+Q-N=2m^4$
$N-P=m^5-3m^3+2m$

25. $A+B+C=2a+3b+ab$
$A+B-C=b-ab$
$A-(B+C)=ab+b-2a$

26. $P+Q=a$

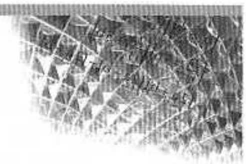
27. $Q-P=\frac{1}{6}a+\frac{11}{6}b+c$

28. $B=-x^3-6x^2+3x-9$

29. $C=-11x-4$

30. $P-(Q+R+3)=-x^3+x^2+x-4$

Multiplicación algebraica 1.4



Multiplicación de potencias.

La expresión a^n se llama potencia de base "a" y exponente "n". Se cumple:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$
$$(a^n)^m = a^{n\cdot m}$$
$$a^0 = 1 \qquad \text{con } a \neq 0$$
$$(ab)^n = a^n \cdot b^n$$

Multiplicación de 2 o más monomios.

Multiplicamos los coeficientes numéricos y los factores literales entre sí (hacemos uso de las propiedades asociativa y conmutativa de la multiplicación).

Multiplicación de un monomio por un polinomio.

Multiplicamos el monomio por cada término del polinomio (hacemos uso de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición).

Multiplicación de dos polinomios.

Multiplicamos cada término del primer polinomio por cada término del segundo. Siempre que sea posible, es necesario reducir términos semejantes.

Ejercicios resueltos

1. $a^6 \cdot a^7 = a^{6+7} = a^{13}$
2. $(ab)^4 = a^4 \cdot b^4$
3. $x^5 \cdot x^9 \cdot x^4 = x^{5+9+4} = x^{18}$
4. $2a^2 \cdot 3ab = 2 \cdot 3 \cdot a^2 \cdot a \cdot b = 6a^3b$
5. $-5x^2y^4 \cdot -3x^6 \cdot -2y^6 = -5 \cdot -3 \cdot -2 \cdot x^2 \cdot x^6 \cdot y^4 \cdot y^6 = -30x^8y^{10}$
6. $-4a^2b\,(a^2 + ab - b) = -4a^2b \cdot a^2 - 4a^2b \cdot ab - 4a^2b \cdot (-b)$
   $= -4a^4b - 4a^3b^2 + 4a^2b^2$
7. $(3m^5 - 2m^4 - mp) \cdot -3m = 3m^5 \cdot (-3m) - 2m^4 \cdot (-3m) - mp \cdot (-3m)$
   $= -9m^6 + 6m^5 + 3m^2p$
8. $(2x + y)(3x + 2y) = 2x\,(3x + 2y) + y\,(3x + 2y)$
   $= 2x \cdot 3x + 2x \cdot 2y + y \cdot 3x + y \cdot 2y$
   $= 6x^2 + 4xy + 3yx + 2y^2$
   $= 6x^2 + 7xy + 2y^2$

(los términos $4xy$ y $3yx$ son semejantes, por lo tanto deben reducirse).

Ejercicios

I. Efectúe las siguientes operaciones:

1. $a^2 \cdot a^3$
2. $m^3 \cdot m^4 \cdot m^5$
3. $x^2 \cdot x^3 \cdot x^3$
4. $a \cdot ab$
5. $xy \cdot x^2y$
6. $a \cdot a^2b \cdot a^3b^2$
7. $2a \cdot ab^6$
8. $3xy^2 \cdot 5x^2y^3$
9. $2m \cdot 5n$
10. $ax \cdot -axy$
11. $-2x \cdot 3xy \cdot -2x$
12. $-3a^2b \cdot -5abc \cdot c^4$
13. $7abc \cdot -2a^2bc^8$
14. $m^2p \cdot -m$
15. $abc \cdot 2abc$
16. $3x^2y \cdot x^3y^6 \cdot -y$
17. $-4abc \cdot -3a^2b^2 \cdot 12ab^5c^7$
18. $2pr \cdot 3pr^5 \cdot pr^2 \cdot 7p^3r^4$
19. $-6x^3 \cdot -6x^3$
20. $-2ax^4 \cdot -3ax^5 \cdot -3a^2x^4$
21. $a^n \cdot a^{n+1}$
22. $2a^m \cdot 3a^n$
23. $x^{p+1} \cdot x^{p-1}$
24. $p^{2x} \cdot p^{3x-2} \cdot p^{x+9}$
25. $2^a \cdot 2^{a-3} \cdot -2^{a-9}$
26. $a^{2n-3} \cdot a^{3n-2} \cdot a^{2-3n}$
27. $a^{2x-5} \cdot b^{x+1} \cdot a^{2x+2} \cdot b^{x-1}$

28. $p^a \cdot p^{a+2} \cdot q^{2a-3} \cdot q^{5-3a}$

29. $a^{x-4} \cdot b^{x+4} \cdot c^{2x} \cdot a^x \cdot b^{2x} \cdot c^{x+2}$

30. $(ab)^5 \cdot a^4 \cdot b^2$

31. $(mp)^3 \cdot (mp)^2 \cdot mp$

32. $(2x)^{x+1} \cdot (2x)^{x+2} \cdot (2x)^{x-3}$

33. $(m^2n)^5 \cdot m^5 \cdot n^6$

34. $(a^2)^3 \cdot (a^3)^4 \cdot a^6$

35. $2x \cdot (2x)^{6a-2} \cdot (2x)^{3a+4}$

36. $\frac{1}{2}a^3 \cdot \frac{1}{3}a^2 \cdot 5a^6$

37. $\frac{2}{3}b^4 \cdot \frac{3}{8}b^7 \cdot -\frac{4}{3}b^4$

38. $-\frac{6}{5}x^3y^2 \cdot \frac{15}{4}x^6y^5$

39. $-\frac{8}{9}a^6b^4 \cdot \frac{2}{5}ab^2c^3 \cdot -\frac{3}{4}a^2b^5c^{11}$

40. $0{,}1a^6b^7c^4 \cdot 0{,}02abc^4 \cdot 0{,}1a^2b$

41. $0{,}03a^5b^4 \cdot 1{,}3a^4b^8 \cdot 2{,}7ab^6$

42. $0{,}5xyz^4 \cdot 2{,}1x^2yz \cdot -3{,}1x^6$

43. $1{,}03a^4b \cdot -1{,}3a^3b^4$

44. $0{,}06m^2n^6p^2 \cdot 0{,}6mn^6p^4$

45. $\frac{2}{5}a^6 \cdot b^{12} \cdot -3a^4b^5 \cdot 0{,}5a^2b^4$

II. Monomio por polinomio:

1. $3a(a-2b)$

2. $-5x(2-3x^2-5x)$

3. $7b(2a-b)$

4. $3x^2(3x^6-2x^4+x^3-2x+3)$

5. $-6x^5y^3(3x^2y-4xy^4-2x^2y^2)$

6. $(4xy-5xy^4) \cdot -6xy$

7. $(3m^2-2mn+n^6) \cdot 13m^4n^2$

8. $-15m^2np^4(mn^6p^2-m^4n^4p^2+mnp)$

9. $6m^2(2m-5n)-3m(6m^2+4n)$

10. $p^2q^4(2pq-pq^3-1)+3p^3q^2(q^3-q^5+p^2)$

11. $-3a^6b^2(-ab^3+ab+a^4b^6)-3a^7b^3(b^2-1)$

12. $20abc(a+b-c)$

13. $a^5b^2-a^5(a^2-ab+b^2)$

14. $3x^6y^4(x^2+xy+y^2)$

15. $-3b(2ab+b^2+5bc)$

16. $7a^6b^8c^9(2abc-5a^2b+4ab^2c^2-abc^3)$

17. $(x^6y^{21}-4xy^{11}-9x^{10}y^2) \cdot -3x^6y^2$

18. $\frac{1}{2}x\left(\frac{3}{4}x-\frac{2}{3}y\right)$

19. $-\frac{1}{3}a^2\left(\frac{1}{2}ab+\frac{3}{5}ab^2\right)$

20. $\frac{3}{4}x^2y^6\left(\frac{2}{5}xy^4+4xy^2-1\right)$

21. $\frac{8}{3}p^2q\left(\frac{1}{4}pq-\frac{1}{5}pq^3+2pq\right)$

22. $-\frac{1}{8}a^2b^3c^6\left(abc-8a^2b^2c^2\right)$

23. $\frac{3}{5}x^6y^2z^4\left(1-xyz^4+\frac{2}{3}x^4y^2z^6\right)$

24. $-\frac{3}{4}m^7n^2\left(14m^6n-\frac{2}{3}mn^4-\frac{2}{9}m^6n^2\right)$

25. $\frac{2}{5}x^2y\left(x^2y-xy^2\right)$

26. $-\frac{1}{2}a^6b^4c^3\left(\frac{4}{5}ab^2-\frac{4}{7}a^3b^2-\frac{1}{4}a\right)$

27. $0{,}03a^6b^2(1-a^2b^2-0{,}03ab^3)$

28. $-0{,}5m^4n^2(-0{,}5m^6n-2mn^3+3{,}5mn^3)$

29. $0{,}07a^4b^2(100ab^4-10ab^3-2ab)$

30. $1{,}2x^6y^{11}(2{,}1xy^9-1{,}1x^2y^2+2{,}1xy^8)$

31. $0{,}5abc(a^2-b^2-c^2)+4{,}8abc(a^2-b^2-c^2)$

32. $-2{,}2x^6y^3z(1{,}1xyz-1{,}2x^2y^2z^2+3xyz^3)$

33. $\frac{3}{4}p^2qr^{12}\left(-\frac{3}{5}p^2qr^3+\frac{3}{4}pqr^6\right)$

34. $-\frac{2}{5}m^{11}n^{10}p\left(10m^2n-\frac{35}{8}m^6n^2+2\right)$

35. $-\frac{17}{9}x^8y^6\left(1-\frac{3}{4}x^6y^{11}-\frac{27}{34}x^6y^8\right)$

36. $-\frac{8}{3}x^2y^4\left(x^2y^3-xy^4+y^{11}\right)$

37. $-\frac{12}{5}a^4b^2c^7\left(-\frac{5}{4}a^2bc-10abc^{11}-4ab^2\right)$

Ejercicios

III.

1. $(x + y)(x^2 + y^2)$
2. $(2a + b)(3a - 2b)$
3. $(1 - x)(1 - y)$
4. $(2x - 6y)(x^2 - 2xy)$
5. $(x^2 + 3x^2y)(-3xy^2 + 4xy^3)$
6. $(4x + y)(-2x - 5xy)$
7. $(6a - 5b)(2b + 7a)$
8. $(a + b + 1)(a - b)$
9. $(2a - 3ab + b^2)(b - b^2)$
10. $(5x^2y + 2xy^2 - 3xy)(x - y^2)$
11. $(m^2 + n^2 - mn)(2m - 3n)$
12. $(-3xy - 2xy^2)(xy^2 - 5xy)$
13. $(2p^2q + 3pq^{11} - 5pq^4)(-3pq + 2p)$
14. $(x^2 + 1)(x^2 - 1)$
15. $(a + b)(a - b)$
16. $(x + 4)(x - 6)$
17. $(a^2 + 5)(a^2 + 7)$
18. $(2p - 4)(2p + 7)$
19. $(2x - 3y - 4z)(x + y + z)$
20. $(x^2 + y^2 - z^2)(2x - 3y - 4z)$
21. $(a + 1)(a^n + a^{n+1} + a^{n+2})$
22. $(a - 1)(a^{n-1} + a^n + a^{n+1})$
23. $(u - v)(u^2 - 3uv + v^2)$
24. $(x + y)(x^2 + 2xy + y^2)$
25. $(-3x + y^2)(x^2 - xy - y)$
26. $(2y + 3x)(x^2 - xy + 2y^2)$
27. $(-3x - 2y + z)(x + y - 3z)$
28. $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$
29. $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$
30. $(a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$
31. $(a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$
32. $(x + y)(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3})$
33. $(p^2 - q^2)(p^n - p^nq^n - q^n)$

Soluciones

I. 1. a^5 2. m^{12} 3. x^8 4. a^2b 5. x^3y^2 6. a^6b^3
7. $2a^2b^6$ 8. $15x^3y^5$ 9. $10\,mn$ 10. $-a^2x^2y$ 11. $12x^3y$ 12. $15a^3b^2c^5$
13. $-14a^3b^2c^9$ 14. $-m^3p$ 15. $2a^2b^2c^2$ 16. $-3x^5y^8$ 17. $144a^4b^8c^8$
18. $42p^6r^{12}$ 19. $36x^6$ 20. $-18a^4x^{13}$ 21. a^{2n+1} 22. $6a^{m+n}$ 23. x^{2p}
24. p^{6x+7} 25. -2^{3a-12} 26. a^{2n-3} 27. $a^{4x-3}b^{2x}$ 28. $p^{2a+2}q^{2-a}$
29. $a^{2x-4}b^{3x+4}c^{3x+2}$ 30. a^9b^7

31. m^6p^6 32. $(2x)^{3x}$ 33. $m^{15}n^{11}$ 34. a^{24} 35. $(2x)^{9a+3}$ 36. $\frac{5}{6}a^{11}$

37. $-\frac{1}{3}b^{15}$ 38. $-\frac{9}{2}x^9y^7$ 39. $\frac{4}{15}a^9b^{11}c^{14}$ 40. $0{,}0002a^9b^9c^8$ 41. $0{,}1053a^{10}b^{18}$

42. $-3{,}255x^9y^2z^5$ 43. $-1{,}339a^7b^5$ 44. $0{,}036m^3n^{12}p^6$ 45. $-\frac{3}{5}a^{12}b^{21}$

II. 1. $3a^2-6ab$ 2. $-10x+15x^3+25x^2$ 3. $14ab-7b^2$

4. $9x^8-6x^6+3x^5-6x^3+9x^2$ 5. $-18x^7y^4+24x^6y^7+12x^7y^5$

6. $-24x^2y^2+30x^2y^5$ 7. $39m^6n^2-26m^5n^3+13m^4n^8$

8. $-15m^3n^7p^6+15m^6n^5p^6-15m^3n^2p^5$ 9. $-6m^3-30m^2n-12mn$

10. $5p^3q^5-4p^3q^7-p^2q^4+3p^5q^2$ 11. $-3a^{10}b^8$ 12. $20a^2bc+20ab^2c-20abc^2$

13. $-a^7+a^6b$ 14. $3x^8y^4+3x^7y^5+3x^6y^6$ 15. $-6ab^2-3b^3-15b^2c$

16. $14a^7b^9c^{10}-35a^8b^9c^9+28a^7b^{10}c^{11}-7a^7b^9c^{12}$

17. $-3x^{12}y^{23}+12x^7y^{13}+27x^{16}y^4$ 18. $\frac{3}{8}x^2-\frac{1}{3}xy$ 19. $-\frac{1}{6}a^3b-\frac{1}{5}a^3b^2$

20. $\frac{3}{10}x^3y^{10}+3x^3y^8-\frac{3}{4}x^2y^6$ 21. $\frac{2}{3}p^3q^2-\frac{8}{15}p^3q^4+\frac{16}{3}p^3q^2$

22. $-\frac{1}{8}a^3b^4c^7+a^4b^5c^8$ 23. $\frac{3}{5}x^6y^2z^4-\frac{3}{5}x^7y^3z^8+\frac{2}{5}x^{10}y^4z^{10}$

24. $-\frac{21}{2}m^{13}n^3+\frac{1}{2}m^8n^6+\frac{1}{6}m^{13}n^4$ 25. $\frac{2}{5}x^4y^2-\frac{2}{5}x^3y^3$

26. $-\frac{2}{5}a^7b^6c^3+\frac{2}{7}a^9b^6c^3+\frac{1}{8}a^7b^4c^3$ 27. $0{,}03a^6b^2-0{,}03a^8b^4-0{,}0009a^7b^5$

28. $\frac{1}{4}m^{10}n^3+m^5n^5-\frac{7}{4}m^7n^3$ 29. $7a^5b^6-0{,}7a^5b^5-0{,}14a^5b^3$

30. $2{,}52x^7y^{20}-1{,}32x^8y^{13}+2{,}52x^7y^{19}$ 31. $5{,}3a^3bc-5{,}3ab^3c-5{,}3abc^3$

32. $-2{,}42x^7y^4z^2+2{,}64x^8y^5z^3-6{,}6x^7y^4z^4$ 33. $-\frac{9}{20}p^4q^2r^{15}+\frac{9}{16}p^3q^2r^{18}$

34. $-4m^{13}n^{11}p+\frac{7}{4}m^{17}n^{12}p-\frac{4}{5}m^{11}n^{10}p$ 35. $-\frac{17}{9}x^8y^6+\frac{17}{12}x^{14}y^{17}+\frac{3}{2}x^{14}y^{14}$

36. $-\frac{8}{3}x^4y^7+\frac{8}{3}x^3y^8-\frac{8}{3}x^2y^{15}$ 37. $3a^6b^3c^8+24a^5b^3c^{18}+\frac{48}{5}a^5b^4c^7$

III. 1. $x^3+xy^2+x^2y+y^3$ 2. $6a^2-ab-2b^2$ 3. $1-x-y+xy$

4. $2x^3-10x^2y+12xy^2$ 5. $-3x^3y^2-5x^3y^3+12x^3y^4$ 6. $-8x^2-20x^2y-2xy-5xy^2$

7. $42a^2-23ab-10b^2$ 8. a^2-b^2+a-b 9. $2ab-5ab^2+3ab^3+b^3-b^4$

10. $5x^3y-5x^2y^3+2x^2y^2-2xy^4-3x^2y+3xy^3$ 11. $2m^3-5m^2n+5mn^2-3n^3$

12. $7x^2y^3+15x^2y^2-2x^2y^4$ 13. $-6p^3q^2+4p^3q-9p^2q^{12}+6p^2q^{11}+15p^2q^5-10p^2q^4$

14. x^4-1 15. a^2-b^2 16. $x^2-2x-24$ 17. a^4+12a^2+35 18. $4p^2+6p-28$

19. $2x^2-xy-3y^2-2xz-7yz-4z^2$

20. $2x^3-3x^2y-4x^2z+2xy^2-3y^3-4y^2z-2xz^2+3yz^2+4z^3$

21. $a^n+2a^{n+1}+2a^{n+2}+a^{n+3}$ 22. $a^{n+2}-a^{n-1}$ 23. $u^3-4u^2v+4uv^2-v^3$

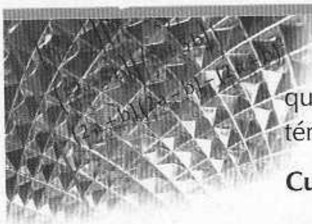
24. $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ 25. $-3x^3+3x^2y+3xy+x^2y^2-xy^3-y^3$

26. $3x^3-x^2y+4xy^2+4y^3$ 27. $-3x^2-5xy+10xz-2y^2+7yz-3z^2$ 28. x^3-y^3

29. x^3+y^3 30. a^5+b^5 31. a^4-b^4 32. $x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+yx^{n-1}+yx^{n-2}+yx^{n-3}$

33. $p^{n+2}-p^{n+2}q^n-p^2q^n-q^2p^n+q^{n+2}p^n+q^{n+2}$

1.5 Productos notables



Dentro de la multiplicación algebraica existen algunos productos que pueden ser desarrollados en forma directa, es decir, sin multiplicar término a término primero, y luego reducir. Éstos son:

Cuadrado de un binomio.

El desarrollo de este producto corresponde al cuadrado del primer término, más (o menos) el doble del producto del primer término por el segundo y más el cuadrado del segundo, es decir:

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

Suma por diferencia.

Es igual a la diferencia de los cuadrados de los términos, es decir:

$(a + b)\ (a - b) = a^2 - b^2$

Producto de binomios con un término común.

Es el cuadrado del término común más el producto del término común por la suma de los términos no comunes y más el producto de los términos no comunes, o sea:

$(x + a)\ (x + b) = x^2 + x \cdot (a + b) + ab$

Cubo de un binomio.

Corresponde al cubo del primer término, más (o menos) el triple del cuadrado del primer término multiplicado por el segundo, más el triple del primer término multiplicado por el cuadrado del segundo y más (o menos) el cubo del segundo. Así:

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

Para obtener otras potencias de un binomio podemos determinar los coeficientes mediante el TRIÁNGULO DE PASCAL, que se obtiene de la siguiente manera:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

- Comienza y termina con 1.
- Cada coeficiente se obtiene sumando los dos correspondientes según el orden en la fila anterior.
- La primera fila corresponde a los coeficientes de $(a + b)^0$
- La segunda fila corresponde a los coeficientes de $(a + b)^1$
- La tercera fila corresponde a los coeficientes de $(a + b)^2$

Así, la fila n-ésima nos entrega los coeficientes de $(a + b)^{n-1}$.

Los factores literales se obtienen de la siguiente manera:

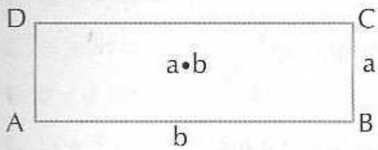
En $(a + b)^n$ debe haber $(n + 1)$ términos.

El primer factor literal es a^n ; el segundo es $a^{n-1} \cdot b^1$; el tercero es $a^{n-2} \cdot b^2$ y así sucesivamente. El grado del término "a" decrece a medida que el grado de "b" aumenta hasta terminar en b^n.

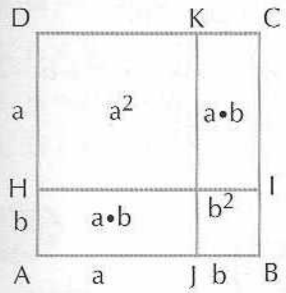
(Cada término se forma con el coeficiente numérico obtenido del triángulo de Pascal y el factor literal señalado más arriba).

Representación geométrica de expresiones algebraicas.

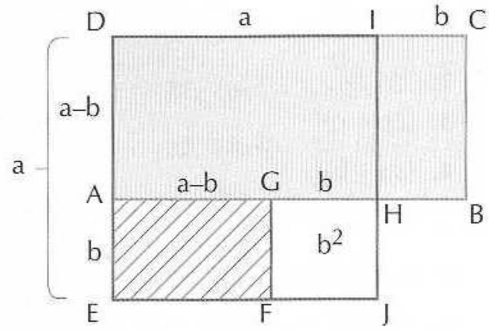
a) La expresión a•b representa el área del rectángulo de lados a y b.



b) Observemos el cuadrado del binomio $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$



c) Observemos el producto de una suma por su diferencia:



$A_{(ABCD)} = (a+b)\ (a-b)$

Tenemos $A_{(EFGA)} = A_{(HBCI)}$

$\therefore\ A_{(ABCD)} = A_{(EFGHIDA)}$ que es $a^2 - b^2$

Ejercicios resueltos

1. $(2 + x)^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + x^2$
$= 4 + 4x + x^2$

2. $(3a - 5b)^2 = (3a)^2 - 2 \cdot 3a \cdot 5b + (5b)^2$
$= 9a^2 - 30ab + 25b^2$

3. $(2x - y)\ (2x + y) = (2x)^2 - y^2$
$= 4x^2 - y^2$

4. $\left(\frac{a}{2} + 5y\right)\left(\frac{a}{2} - 5y\right) = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - (5y)^2$
$= \frac{a^2}{4} - 25y^2$

5. $(x + 8)\ (x + 5) = x^2 + (5 + 8)x + 5 \cdot 8$
$= x^2 + 13x + 40$

6. $(2a + 3)\ (2a - 7) = (2a)^2 + (3 - 7) \cdot 2a + 3 \cdot -7$
$= 4a^2 - 4 \cdot 2a - 21$
$= 4a^2 - 8a - 21$

7. $(p + 2)^3 = p^3 + 3 \cdot p^2 \cdot 2 + 3 \cdot p \cdot 2^2 + 2^3$
$= p^3 + 6p^2 + 3p \cdot 4 + 8$
$= p^3 + 6p^2 + 12p + 8$

8. $(2t - r)^3 = (2t)^3 - 3(2t)^2 \cdot r + 3(2t) \cdot r^2 - r^3$
$= 8t^3 - 3 \cdot 4t^2 \cdot r + 6t \cdot r^2 - r^3$
$= 8t^3 - 12t^2r + 6tr^2 - r^3$

9. $(a + b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$
$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

10. $(2a + y)^5 = 1(2a)^5 + 5(2a)^4 \cdot y + 10 \cdot (2a)^3 \cdot y^2 + 10(2a)^2 \cdot y^3 + 5(2a)y^4 + 1 \cdot y^5$
$= (2a)^5 + 5 \cdot 16a^4y + 10 \cdot 8a^3y^2 + 10 \cdot 4a^2y^3 + 10ay^4 + y^5$
$= 32a^5 + 80a^4y + 80a^3y^2 + 40a^2y^3 + 10ay^4 + y^5$

Ejercicios

I. Cuadrado de binomio.

1. $(x + y)^2$
2. $(p - q)^2$
3. $(2p + q)^2$
4. $(3a + b)^2$
5. $(2a - 3b)^2$
6. $(x + 1)^2$
7. $(a - 6)^2$
8. $(x + 9)^2$
9. $(3p - 1)^2$
10. $(x + 5)^2$
11. $(6x - 5y)^2$
12. $(2m - 1)^2$
13. $(6x^2y + 2x)^2$
14. $(4pq - 3q)^2$
15. $(9x^2 - 7y^2)^2$
16. $(8a^2b + 7ab^6)^2$
17. $(15x^2y - 3xy^2z^6)^2$
18. $(2a - 3b)^2 + (3a - 5b)^2$
19. $(11x - 5y)^2 - (13x + 3y)^2 + (x - 2y)^2$
20. $\left(\frac{a}{2} + 2b\right)^2 + \left(2a - \frac{b}{2}\right)^2$
21. $\left(3a - \frac{b}{5}\right)^2$
22. $\left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{5}yz\right)^2$
23. $(0{,}1a^2 - 0{,}2abc)^2$
24. $(1{,}5xy^2 + 2{,}5x^2y)^2$
25. $\left(\frac{3}{4}a^2b^3 - \frac{3}{5}ab^6\right)^2$

II. Suma por diferencia.

1. $(u - v)(u + v)$
2. $(x + 2y)(x - 2y)$
3. $(3a - b)(3a + b)$
4. $(5x^2 - 3y)(5x^2 + 3y)$
5. $(2x - 3xy)(2x + 3xy)$
6. $(6a + 1)(6a - 1)$
7. $(9m^2 - 3n)(9m^2 + 3n)$
8. $(-4a^2b + 5b)(4a^2b + 5b)$
9. $(-6m^2n^3 - 7m)(-6m^2n^3 + 7m)$
10. $(10a^2 - 1)(10a^2 + 1)$
11. $\left(b^2 - \frac{1}{2}\right)\left(b^2 + \frac{1}{2}\right)$
12. $\left(\frac{2a}{3} - 5b\right)\left(\frac{2a}{3} + 5b\right)$
13. $(2a + b)(2a - b) - (2a + b)^2$
14. $(a + 5x)(a - 5x)$
15. $(-9x^2 + 5xy)(-9x^2 - 5xy)$
16. $(-13n^5p^2 + 1)(13n^5p^2 + 1)$
17. $(1 - a)(1 + a) - (1 - 2a)(1 + 2a)$
18. $(x^2 - 2xy)(x^2 + 2xy) + (x^2 + 2xy)^2$
19. $(1 - w^5)(1 + w^5)$
20. $\left(\frac{3}{4}p^7 - \frac{2}{5}q^4\right)\left(\frac{3}{4}p^7 + \frac{2}{5}q^4\right)$
21. $\left(\frac{abc}{2x} + 4x\right)\left(\frac{abc}{2x} - 4x\right)$
22. $(0{,}05x^{12} - 2)(0{,}05x^{12} + 2)$
23. $(6x^5y^2z^3 - 1)(6x^5y^2z^3 + 1)$
24. $\left(2p + \frac{q}{4}\right)\left(2p - \frac{q}{4}\right)$
25. $(0{,}3x^2y - 2z)(0{,}3x^2y + 2z)$

III. Producto de binomios con término común.

1. $(a + 2)(a + 3)$
2. $(x + 5)(x + 4)$
3. $(t + 2)(t - 3)$
4. $(a + 5)(a - 9)$
5. $(x - 8)(x - 1)$
6. $(a - 7)(a - 9)$
7. $(x + 2)(x - 12)$
8. $(x + 3)(x + 8)$
9. $(x - 4)(x - 6)$
10. $(x + 6)(x - 2)$
11. $(x - 3)(x - 8)$
12. $(x - 13)(x + 2)$
13. $(a - 7)(a + 12)$
14. $(x^2 + 5)(x^2 + 3)$
15. $(a^2 - 3)(a^2 + 4)$
16. $(2b + 5)(2b + 9)$
17. $(6x - 3)(6x + 5)$
18. $(2a + 3b)(2a + 5b)$
19. $(3a^2 - 2b)(3a^2 - 5b)$
20. $(9a - 4)(9a + 11)$
21. $(6x^2 - 2y)(6x^2 - 7y)$
22. $(4a^2b - 3a)(4a^2b + 9a)$
23. $\left(\frac{a}{4} - 2b\right)\left(\frac{a}{4} - 6b\right)$
24. $\left(\frac{3a}{5} - 5b\right)\left(\frac{3a}{5} + 8b\right)$
25. $\left(\frac{3p}{4} + 3q\right)\left(\frac{3p}{4} + q\right)$

IV. Cubo de un binomio.

1. $(a + b)^3$
2. $(p - q)^3$
3. $(x + 2)^3$
4. $(a - 3)^3$
5. $(t + 4)^3$
6. $(2 - a)^3$
7. $(2a - b)^3$
8. $(3a - 5b)^3$
9. $(2x + 3y)^3$
10. $(1 - 3y)^3$
11. $(2 + 3t)^3$
12. $(3a - 2x)^3$
13. $(5a - 1)^3$
14. $(3a^2 - 2a)^3$
15. $(t^2 + t^3)^3$
16. $(1 + x^4)^3$
17. $(2t - 3a^2)^3$
18. $(u^2 + 5v)^3$
19. $\left(\frac{1}{2} - a\right)^3$
20. $\left(\frac{1}{2}x + 2y\right)^3$
21. $\left(\frac{2}{3}a - \frac{1}{3}b\right)^3$
22. $\left(\frac{5}{2}p + \frac{3}{2}q\right)^3$
23. $\left(\frac{1}{10}m - \frac{1}{5}n\right)^3$
24. $\left(a - \frac{a}{3}\right)^3$
25. $\left(\frac{1}{2}t + 2t^2\right)^3$

V. Otras potencias de binomios.

1. $(2a + b)^4$
2. $(x - 2y)^5$
3. $(a + b)^6$
4. $(2a - 1)^7$
5. $(3a + 2)^6$
6. $\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right)^4$
7. $(3a + 4)^4$
8. $\left(\frac{1}{2} + a\right)^5$
9. $\left(\frac{2a}{3} - 3a\right)^4$
10. $(x + 1)^5$

VI. Representación geométrica de expresiones algebraicas.

Investigar de qué manera se pueden representar como suma o resta de áreas los siguientes productos.

1. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
2. $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$
3. $(x-a)(x+b) = x^2 + (b-a)x - ab$
4. $(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$
5. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

I. 1. $x^2 + 2xy + y^2$ 2. $p^2 - 2pq + q^2$ 3. $4p^2 + 4pq + q^2$ 4. $9a^2 + 6ab + b^2$

5. $4a^2 - 12ab + 9b^2$ 6. $x^2 + 2x + 1$ 7. $a^2 - 12a + 36$ 8. $x^2 + 18x + 81$

9. $9p^2 - 6p + 1$ 10. $x^2 + 10x + 25$ 11. $36x^2 - 60xy + 25y^2$

12. $4m^2 - 4m + 1$ 13. $36x^4y^2 + 24x^3y + 4x^2$ 14. $16p^2q^2 - 24pq^2 + 9q^2$

15. $81x^4 - 126x^2y^2 + 49y^4$ 16. $64a^4b^2 + 112a^3b^7 + 49a^2b^{12}$

17. $225x^4y^2 - 90x^3y^3z^6 + 9x^2y^4z^{12}$ 18. $13a^2 - 42ab + 34b^2$

19. $-47x^2 - 192xy + 20y^2$ 20. $\frac{17a^2}{4} + \frac{17b^2}{4}$ 21. $9a^2 - \frac{6}{5}ab + \frac{b^2}{25}$

22. $\frac{4}{9}x^4 - \frac{4}{5}x^2yz + \frac{9}{25}y^2z^2$ 23. $0{,}01a^4 - 0{,}04a^3bc + 0{,}04a^2b^2c^2$

24. $2{,}25x^2y^4 + 7{,}5x^3y^3 + 6{,}25x^4y^2$ 25. $\frac{9}{16}a^4b^6 - \frac{9}{10}a^3b^9 + \frac{9}{25}a^2b^{12}$

II. 1. $u^2 - v^2$ 2. $x^2 - 4y^2$ 3. $9a^2 - b^2$ 4. $25x^4 - 9y^2$ 5. $4x^2 - 9x^2y^2$

6. $36a^2 - 1$ 7. $81m^4 - 9n^2$ 8. $25b^2 - 16a^4b^2$ 9. $36m^4n^6 - 49m^2$

10. $100a^4 - 1$ 11. $b^4 - \frac{1}{4}$ 12. $\frac{4a^2}{9} - 25b^2$ 13. $-4ab - 2b^2$ 14. $a^2 - 25x^2$

15. $81x^4 - 25x^2y^2$ 16. $1 - 169n^{10}p^4$ 17. $3a^2$ 18. $2x^4 + 4x^3y$ 19. $1 - w^{10}$

20. $\frac{9}{16}p^{14} - \frac{4}{25}q^8$ 21. $\frac{a^2b^2c^2}{4x^2} - 16x^2$ 22. $0{,}0025\,x^{24} - 4$ 23. $36x^{10}y^4z^6 - 1$

24. $4p^2 - \frac{q^2}{16}$ 25. $0{,}09\,x^4y^2 - 4z^2$

III. 1. $a^2 + 5a + 6$ 2. $x^2 + 9x + 20$ 3. $t^2 - t - 6$ 4. $a^2 - 4a - 45$

5. $x^2 - 9x + 8$ 6. $a^2 - 16a + 63$ 7. $x^2 - 10x - 24$ 8. $x^2 + 11x + 24$

9. $x^2 - 10x + 24$ 10. $x^2 + 4x - 12$ 11. $x^2 - 11x + 24$ 12. $x^2 - 11x - 26$

13. $a^2 + 5a - 84$ 14. $x^4 + 8x^2 + 15$ 15. $a^4 + a^2 - 12$ 16. $4b^2 + 28b + 45$

17. $36x^2 + 12x - 15$ 18. $4a^2 + 16ab + 15b^2$ 19. $9a^4 - 21a^2b + 10b^2$

20. $81a^2 + 63a - 44$ 21. $36x^4 - 54x^2y + 14y^2$ 22. $16a^4b^2 + 24a^3b - 27a^2$

23. $\frac{a^2}{16} - 2ab + 12b^2$ 24. $\frac{9a^2}{25} + \frac{9ab}{5} - 40b^2$ 25. $\frac{9p^2}{16} + 3pq + 3q^2$

IV. 1. $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ 2. $p^3 - 3p^2q + 3pq^2 - q^3$ 3. $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

4. $a^3 - 9a^2 + 27a - 27$ 5. $t^3 + 12t^2 + 48t + 64$ 6. $8 - 12a + 6a^2 - a^3$

7. $8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3$ 8. $27a^3 - 135a^2b + 225ab^2 - 125b^3$

9. $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$ 10. $1 - 9y + 27y^2 - 27y^3$

11. $8 + 36t + 54t^2 + 27t^3$ 12. $27a^3 - 54a^2x + 36ax^2 - 8x^3$

13. $125a^3 - 75a^2 + 15a - 1$ 14. $27a^6 - 54a^5 + 36a^4 - 8a^3$

15. $t^6 + 3t^7 + 3t^8 + t^9$ 16. $1 + 3x^4 + 3x^8 + x^{12}$ 17. $8t^3 - 36t^2a^2 + 54ta^4 - 27a^6$

18. $u^6 + 15u^4v + 75u^2v^2 + 125v^3$ 19. $\frac{1}{8} - \frac{3}{4}a + \frac{3}{2}a^2 - a^3$

20. $\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{2}x^2y + 6xy^2 + 8y^3$ 21. $\frac{8}{27}a^3 - \frac{4}{9}a^2b + \frac{2}{9}ab^2 - \frac{1}{27}b^3$

22. $\frac{125}{8}p^3 + \frac{225}{8}p^2q + \frac{135}{8}pq^2 + \frac{27}{8}q^3$ 23. $\frac{1}{1.000}m^3 - \frac{3}{500}m^2n + \frac{3}{250}mn^2 - \frac{1}{125}n^3$

24. $\frac{8}{27}a^3$ 25. $\frac{1}{8}t^3 + \frac{3}{2}t^4 + 6t^5 + 8t^6$

V. 1. $16a^4 + 32a^3b + 24a^2b^2 + 8ab^3 + b^4$

2. $x^5 - 10x^4y + 40x^3y^2 - 80x^2y^3 + 80xy^4 - 32y^5$

3. $a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

4. $128a^7 - 448a^6 + 672a^5 - 560a^4 + 280a^3 - 84a^2 + 14a - 1$

5. $729a^6 + 2.916a^5 + 4.860a^4 + 4.320a^3 + 2.160a^2 + 576a + 64$

6. $\frac{x^4}{16} + \frac{x^3y}{4} + \frac{3x^2y^2}{8} + \frac{xy^3}{4} + \frac{y^4}{16}$ 7. $81a^4 + 432a^3 + 864a^2 + 768a + 256$

8. $\frac{1}{32} + \frac{5}{16}a + \frac{5}{4}a^2 + \frac{5}{2}a^3 + \frac{5}{2}a^4 + a^5$ 9. $\frac{2.401}{81}a^4$

10. $x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$

Factorización 1.6

Definición: Factorizar una expresión algebraica (o suma de términos algebraicos) consiste en escribirla en forma de multiplicación. Veremos los siguientes casos:

1.6.1 Factor común (monomio y polinomio)

Aquí, todos los términos de la expresión presentan un factor común, que puede ser un monomio o un polinomio, por el cual se factoriza, es decir, el término común es uno de los factores de la multiplicación. El otro se determina aplicando la multiplicación algebraica.

Ejercicios resueltos

1. Factoricemos la expresión $2a + 6a^2$

   Vemos que el término 2a está contenido en ambos términos del binomio que queremos factorizar; por lo tanto, 2a es el factor común y escribimos $2a + 6a^2 = 2a\,(1 + 3a)$.

   El segundo factor se obtiene buscando los términos por los cuales hay que multiplicar el factor común (2a) para obtener los términos de la expresión original.

2. Factoricemos la expresión

   $6xy^2 - 15x^2y + 21x^2y^2$

   El coeficiente numérico contenido en los tres términos de la expresión es el tres y el factor literal es xy; por lo tanto, el factor común es 3xy. Y escribimos:

   $6xy^2 - 15x^2y + 21x^2y^2 = 3xy\,(2y - 5x + 7xy)$.

3. Factoricemos la expresión

   $$\frac{5a^6}{3b^2} - \frac{10a^2}{21b} - \frac{20a^3}{9b^4}$$

   El término o factor común de los numeradores es $5a^2$ y el de los denominadores es 3b; por lo tanto, el factor común de la expresión es: $\frac{5a^2}{3b}$ y escribimos:

   $$\frac{5a^6}{3b^2} - \frac{10a^2}{21b} - \frac{20a^3}{9b^4} = \frac{5a^2}{3b}\left(\frac{a^4}{b} - \frac{2}{7} - \frac{4a}{3b^3}\right)$$

4. Factoricemos la expresión $m\,(2a + b) - 3n\,(2a + b)$.

   Aquí podemos considerar el paréntesis $(2a + b)$ como un solo término y podemos factorizar por él. Entonces nos queda:

   $m\,(2a + b) - 3n\,(2a + b) = (2a + b)\,(m - 3n)$

5. Factoricemos la expresión $a\,(p - q) - p + q$

   Aquí no encontramos un término común en forma inmediata, pero podemos hacer una asociación adecuada y nos queda:

   $$\begin{aligned} a\,(p - q) - p + q &= a\,(p - q) - (p - q) \\ &= (p - q)\,(a - 1) \end{aligned}$$

Observación 1: El proceso está completo si no es posible seguir factorizando dentro de los paréntesis (o factores) obtenidos.

Observación 2: Por la propiedad conmutativa de la multiplicación no importa el orden en que se entregue el resultado.

Ejercicios

Factorice las siguientes expresiones:

1. $m^2 + 3m$
2. $a^2 + ab$
3. $3a - 12ab$
4. $a^2b^2 + a^3b^3 - ab$
5. $2pq^2 - 3p^2q$
6. $6x^2y^5 - 12x^2y^6 - 18x^3y^4$
7. $2ab + 2ac + 2ad$
8. $26x^2y^6 - 13x^6y^2$
9. $x^2y^2 - xy$
10. $21a^6 - 14a^5 + 56a^7$
11. $a + a^2 + a^3 + a^4$
12. $3a^2b - 6a^3b - 12ab^3$
13. $15mn - 10m$
14. $2q + 2q^2 + 2q^6$
15. $10q^5 - 30pq^5 - 15pq^6$
16. $18gh^5 - 4g^2h^2 - 8g^3h^3$
17. $7y^6x^2 - 35yx^4 - 28y^4$
18. $2 - 2x$
19. $a + a^2$
20. $a^6 - 7a^5 - 5a^4$
21. $4m^5r^6 - 6m^4r^5 - 16m^5r^3$
22. $a^2b^2c^6 - a^3b^5c^2 + a^7b^3c^2$
23. $x^2 - x^2y^2 - x^2y^3 + x^2y^4$
24. $2xyz - 2xy$
25. $6a + 36a^6$
26. $t^9 + t^8 + t^5$
27. $12ab^6 - 12ab^5$
28. $x^6y^9z^{12} + x^6y^8z^6 + x^5y^8z^{10}$
29. $\frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{2} - \frac{a^4}{2}$
30. $\frac{3a}{b} + \frac{12a}{b^2} - \frac{21a}{b^3}$
31. $\frac{p^2q^2}{2ab} + \frac{pq}{2ac} + \frac{p^3q^3}{2abc}$
32. $\frac{c^5}{5} - \frac{c^4}{10} - \frac{c^3}{15}$
33. $\frac{a^2b^2}{x} + \frac{a^3b^3}{x^2} - \frac{a^2b^2}{x^3}$
34. $\frac{m^{20}}{20} + \frac{m^{10}}{10} - \frac{m^5}{5}$
35. $-p^2q + 2pq^2$
36. $3(a - 2) - a(a - 2)$
37. $a(x + 4) + b(x + 4) + c(x + 4)$
38. $x(z^2 + a^2) + 2(z^2 + a^2)$
39. $m(a - c) + a - c$
40. $m(a - c) - a + c$
41. $a(x^2 + y^2 + z^2) - x^2 - y^2 - z^2$
42. $2a - b + 3a(2a - b)$
43. $a + ax + ax^2$
44. $c(3 - 5c) - 2d(3 - 5c)$
45. $\frac{a^2+c^2}{2b} - \frac{a^2+c^2}{2q} - a^2 - c^2$
46. $3x(2x - y) - 2x + y$
47. $(a + b)(a + c) - (a + b)(a + d)$
48. $(1 + a)(x - y) - (x - y)^2$
49. $(a^2 + 6)(a^2 + b) + a(a^2 + b)$
50. $(2 + a + c)(a - c) + (2 + a + c)(b - d)$
51. $x^2 + y^2 + z^2 + 2a(x^2 + y^2 + z^2)$
52. $a(b + x) + b(b + x) + c(b + x)$
53. $\frac{2}{15}a - \frac{4}{5}ab - \frac{16}{25}abc$
54. $m(x + y - z) - n(x + y - z) - p(x + y - z)$
55. $\frac{3}{4}a^2b - \frac{3}{2}a^2b^2 - \frac{3}{8}a^2b^3$
56. $\frac{x^2+y^2}{9a} - x^2 - y^2$

Soluciones

1. $m(m+3)$
2. $a(a+b)$
3. $3a(1-4b)$
4. $ab(ab+a^2b^2-1)$
5. $pq(2q-3p)$
6. $6x^2y^4(y-2y^2-3x)$
7. $2a(b+c+d)$
8. $13x^2y^2(2y^4-x^4)$
9. $xy(xy-1)$
10. $7a^5(3a-2+8a^2)$
11. $a(1+a+a^2+a^3)$
12. $3ab(a-2a^2-4b^2)$
13. $5m(3n-2)$
14. $2q(1+q+q^5)$
15. $5q^5(2-6p-3pq)$
16. $2gh^2(9h^3-2g-4g^2h)$
17. $7y(y^5x^2-5x^4-4y^3)$
18. $2(1-x)$
19. $a(1+a)$
20. $a^4(a^2-7a-5)$
21. $2m^4r^3(2mr^3-3r^2-8m)$
22. $a^2b^2c^2(c^4-ab^3+a^5b)$
23. $x^2(1-y^2-y^3+y^4)$
24. $2xy(z-1)$
25. $6a(1+6a^5)$
26. $t^5(t^4+t^3+1)$
27. $12ab^5(b-1)$
28. $x^5y^8z^6(xyz^6+x+z^4)$
29. $\frac{a^2}{2}(1-a-a^2)$
30. $\frac{3a}{b}\left(1+\frac{4}{b}-\frac{7}{b^2}\right)$
31. $\frac{pq}{2a}\left(\frac{pq}{b}+\frac{1}{c}+\frac{p^2q^2}{bc}\right)$
32. $\frac{c^3}{5}\left(c^2-\frac{c}{2}-\frac{1}{3}\right)$
33. $\frac{a^2b^2}{x}\left(1+\frac{ab}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$
34. $\frac{m^5}{5}\left(\frac{m^{15}}{4}+\frac{m^5}{2}-1\right)$
35. $pq(-p+2q)$
36. $(a-2)(3-a)$
37. $(x+4)(a+b+c)$
38. $(x+2)(z^2+a^2)$
39. $(a-c)(m+1)$
40. $(a-c)(m-1)$
41. $(x^2+y^2+z^2)(a-1)$
42. $(1+3a)(2a-b)$
43. $a(1+x+x^2)$
44. $(3-5c)(c-2d)$
45. $(a^2+c^2)\left(\frac{1}{2b}-\frac{1}{2q}-1\right)$
46. $(2x-y)(3x-1)$
47. $(a+b)(c-d)$
48. $(x-y)(1+a-x+y)$
49. $(a^2+b)(a^2+6+a)$
50. $(2+a+c)(a-c+b-d)$
51. $(x^2+y^2+z^2)(1+2a)$
52. $(b+x)(a+b+c)$
53. $\frac{2}{5}a\left(\frac{1}{3}-2b-\frac{8bc}{5}\right)$
54. $(x+y-z)(m-n-p)$
55. $\frac{3}{2}a^2b\left(\frac{1}{2}-b-\frac{1}{4}b^2\right)$
56. $(x^2+y^2)\left(\frac{1}{9a}-1\right)$

1.6.2 Factor común compuesto

Muchas veces, no todos los términos de una expresión algebraica contienen un factor común, pero haciendo una adecuada agrupación de ellos podemos encontrar factores comunes de cada grupo. Veremos, con ejemplos, cómo procederemos en estos casos.

Ejercicios resueltos

1. Factoricemos: $ac+ad+bc+bd$

Si observamos, vemos que el primer y el segundo término tienen el factor común "a" y el tercer y el cuarto término tienen "b" como factor común. Asociamos y factorizamos por parte:

$$\begin{aligned} ac+ad+bc+bd &= (ac+ad)+(bc+bd)\\ &= a(c+d)+b(c+d)\end{aligned}$$

Ahora nos queda (c + d) como factor común, por lo tanto, la expresión original queda factorizada como sigue:

$$ac + ad + bc + bd = (c + d)(a + b)$$

2. Factoricemos: $ax + bx + cx - ay - by - cy$

Aquí podemos asociar el primer y el cuarto término, el segundo y el quinto, el tercero y el sexto y nos queda:

$$\begin{aligned} ax + bx + cx - ay - by - cy &= (ax - ay) + (bx - by) + (cx - cy) \\ &= a(x - y) + b(x - y) + c(x - y) \\ &= (a + b + c)(x - y) \end{aligned}$$

3. Factoricemos: $ax + bx + cx + ay + by + cy - az - bz - cz$

Asociemos en el orden natural los tres primeros, los tres siguientes y los tres últimos:

$$\begin{aligned} & ax + bx + cx + ay + by + cy - az - bz - cz \\ &= (ax + bx + cx) + (ay + by + cy) - (az + bz + cz) \\ &= x(a + b + c) + y(a + b + c) - z(a + b + c) \\ &= (a + b + c)(x + y - z) \end{aligned}$$

- **Observación:** La forma de asociar no es única, pero la factorización sí lo es.

En el primer ejemplo podríamos haber asociado el primer y el tercer término y el segundo con el cuarto y el resultado habría sido el mismo.

Ejercicios

Factorice las siguientes expresiones:

1. $ac + ad + bc + bd$

2. $ax - ay + bx - by + cx - cy$

3. $pc + qc + pd + qd$

4. $rt + rv - st - sv$

5. $2ac - ad + 2bc - bd$

6. $xu - xv - yu + yv$

7. $2au + 2av - 3bu - 3bv$

8. $3a^2x + 3a^2y + b^2x + b^2y$

9. $2ac - 2ad + 3bc - 3bd$

10. $x + y + ax + ay$

11. $2a - 2b + ax - bx$

12. $3 + 15z + 4y + 20yz$

13. $a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$

14. $3ax^3 - 2bx^3 - 3ay^3 + 2by^3$

15. $1 + b + a + ab$

16. $a^2x^2y^2 + b^2x^2y^2 - 2a^2 - 2b^2$

17. $abc - 2abcz - xy + 2xyz$

18. $bd - 3bf + 2cd - 6cf$

19. $xp + 2xq - 2yp - 4yq + 4zp + 8zq$

20. $4 + 2c + 2d + 2a + ac + ad + 2b + bc + bd$

21. $a^2x^2 + x^2y^2 - x^2b + a^2y^2 + y^4 - y^2b - a^2 - y^2 + b$

Ejercicios

22. $a^2x^2 + b^2x^2 + c^2x^2 + a^2y^2 + b^2y^2 + c^2y^2$

23. $12ac - 6ad - 2bc + bd$

24. $aq - ar + bq - br$

25. $u + au - v - av - w - aw$

26. $2ax - 2ay - bx + by$

27. $3am^2 - 3at^2 - 5b^2m^2 + 5b^2t^2$

28. $x - y + 2ax - 2ay + 3bx - 3by$

29. $p^4 + p^2q^2 + p^2r^2 + 2p^2q + 2q^3 + 2qr^2 + p^2r + q^2r + r^3$

30. $ax - bx - cx + 2ay - 2by - 2cy - az + bz + cz$

31. $a^2u - a^2v + b^2u - b^2v + u - v$

32. $4 - 2a - 2b + 2x - ax - bx + 2y - ay - by$

33. $x^2y^2w^2 - x^2y^2z^2 - xyw^2 + xyz^2$

34. $ax + 2bx + 3cx - ay - 2by - 3cy$

35. $2ax + 2bx - ay - by - az - bz$

Soluciones

1. $(a + b)(c + d)$
2. $(a + b + c)(x - y)$
3. $(p + q)(c + d)$
4. $(r - s)(t + v)$
5. $(a + b)(2c - d)$
6. $(x - y)(u - v)$
7. $(2a - 3b)(u + v)$
8. $(3a^2 + b^2)(x + y)$
9. $(2a + 3b)(c - d)$
10. $(1 + a)(x + y)$
11. $(2 + x)(a - b)$
12. $(3 + 4y)(1 + 5z)$
13. $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$

* 14. $(x^3 - y^3)(3a - 2b)$

15. $(1 + a)(1 + b)$
16. $(x^2y^2 - 2)(a^2 + b^2)$
17. $(abc - xy)(1 - 2z)$
18. $(b + 2c)(d - 3f)$
19. $(x - 2y + 4z)(p + 2q)$
20. $(2 + a + b)(2 + c + d)$
21. $(x^2 + y^2 - 1)(a^2 + y^2 - b)$
22. $(x^2 + y^2)(a^2 + b^2 + c^2)$
23. $(6a - b)(2c - d)$
24. $(a + b)(q - r)$
25. $(u - v - w)(1 + a)$
26. $(2a - b)(x - y)$

* 27. $(3a - 5b^2)(m^2 - t^2)$

28. $(1 + 2a + 3b)(x - y)$
29. $(p^2 + 2q + r)(p^2 + q^2 + r^2)$
30. $(x + 2y - z)(a - b - c)$
31. $(a^2 + b^2 + 1)(u - v)$
32. $(2 + x + y)(2 - a - b)$

* 33. $xy(xy - 1)(w^2 - z^2)$

34. $(a + 2b + 3c)(x - y)$
35. $(2x - y - z)(a + b)$

NOTA:
Los ejercicios señalados con * son posibles de factorizar aún más con los métodos que veremos a continuación.

1.6.3 Diferencia de cuadrados

Recordemos que el producto de una suma de dos términos por su diferencia es igual a la diferencia de los cuadrados de ambos términos.

Aplicamos este resultado en las factorizaciones siguientes:

Ejercicios resueltos

1. Factoricemos $a^2 - b^2$

   Observamos que a^2 y b^2 son los cuadrados de a y b, respectivamente.

   Así: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

2. Factoricemos $9m^2 - 16p^2$

   $9m^2$ es el cuadrado de $3m$ y $16p^2$ es el cuadrado de $4p$.

   Entonces : $9m^2 - 16p^2 = (3m + 4p)(3m - 4p)$

3. Factoricemos $\frac{1}{a^2} - \frac{25}{4b^2}$

   Usando el mismo razonamiento anterior vemos que la expresión se factoriza: $\frac{1}{a^2} - \frac{25}{4b^2} = \left(\frac{1}{a} + \frac{5}{2b}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{5}{2b}\right)$

4. Factoricemos $6a^2 - 24m^4$

   En este ejemplo podemos factorizar primero por 6 (factor común monomio).

   $6a^2 - 24m^4 = 6(a^2 - 4m^4)$

   y ahora, el término $(a^2 - 4m^4)$ es exactamente una diferencia de cuadrados y por lo tanto la factorización correspondiente es:

   $$6a^2 - 24m^4 = 6(a^2 - 4m^4) = 6(a - 2m^2)(a + 2m^2)$$

- **Observación:** No es importante el orden en que uno presente los factores, puesto que la multiplicación es conmutativa, es decir:

  $(a + b)(a - b) = (a - b)(a + b)$

Ejercicios

Factorice las siguientes expresiones:

1. $x^2 - y^2$
2. $a^2 - 4b^2$
3. $9m^2 - 16n^2$
4. $9a^2 - 25p^2$
5. $x^2 - 0{,}01y^2$
6. $100a^2 - 64b^6$
7. $m^2n^2 - p^2$
8. $m^4n^6 - z^2$
9. $a^2b^2 - c^2d^2$
10. $1 - x^{10}$
11. $-b^6 + a^4$
12. $-1 + a^2$
13. $a^5 - a^3$
14. $8a^4 - 2b^2$
15. $p^2q^3 - q$
16. $49a^2b^4c^6 - 121m^6n^{10}$
17. $12a^6 - 75b^8$
18. $45m^6 - 80p^8$
19. $27x^4 - 48y^2$
20. $x^{2a} - y^{2b}$
21. $m^{2a}n^{2b} - 1$
22. $25n^{16} - 16m^4$
23. $40 - 90a^4$
24. $-24m^2 + 54n^{12}$
25. $m^6n^4p^{12} - a^2b^2c^2$
26. $2x^2 - 8y^2z^6$
27. $a^{10} - 100b^{10}$
28. $144b^{10} - 121c^6$
29. $81c^4 - 9d^4$
30. $225 - a^2$

Ejercicios

31. $-121+\frac{1}{y^2}$
32. $-64a^2b^4c^6+x^8y^2$
33. $16x^4-4y^{16}$
34. $\frac{1}{4a^2b^2}-\frac{25}{9x^2y^2}$
35. $24x^8-6$
36. $\frac{75m^6}{4}-\frac{27n^2}{25}$
37. $\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}$
38. $\frac{8a^4}{45b^2}-\frac{2}{5}$
39. $32m^{10}-18p^4q^6$
40. $\frac{1}{a^2b^2}-a^2b^2$
41. $x^2-y^2-ax+ay$
42. $25x^4-\frac{1}{25}$
43. $\frac{m^{12}}{c^2}-\frac{n^{10}}{d^4}$
44. $a^{12}-\frac{1}{9b^6}$
45. $\frac{4}{x^6}-\frac{25}{y^6}$
46. $a^2-b^2-2a-2b$
47. $p^2-q^2-rp+rq$
48. a^2+ac-b^2-bc
49. $m^2-n^2-pm-pn$
50. $qr^2-q^3s^2$

Soluciones

1. $(x+y)(x-y)$
2. $(a+2b)(a-2b)$
3. $(3m+4n)(3m-4n)$
4. $(3a-5p)(3a+5p)$
5. $(x-0{,}1y)(x+0{,}1y)$
6. $(10a-8b^3)(10a+8b^3)$
7. $(mn+p)(mn-p)$
8. $(m^2n^3-z)(m^2n^3+z)$
9. $(ab-cd)(ab+cd)$
10. $(1-x^5)(1+x^5)$
11. $(a^2-b^3)(a^2+b^3)$
12. $(a-1)(a+1)$
13. $a^3(a-1)(a+1)$
14. $2(2a^2-b)(2a^2+b)$
15. $q(pq-1)(pq+1)$
16. $(7ab^2c^3-11m^3n^5)(7ab^2c^3+11m^3n^5)$
17. $3(2a^3-5b^4)(2a^3+5b^4)$
18. $5(3m^3-4p^4)(3m^3+4p^4)$
19. $3(3x^2-4y)(3x^2+4y)$
20. $(x^a-y^b)(x^a+y^b)$
21. $(m^an^b-1)(m^an^b+1)$
22. $(5n^8-4m^2)(5n^8+4m^2)$
23. $10(2-3a^2)(2+3a^2)$
24. $6(3n^6-2m)(3n^6+2m)$
25. $(m^3n^2p^6-abc)(m^3n^2p^6+abc)$
26. $2(x-2yz^3)(x+2yz^3)$
27. $(a^5-10b^5)(a^5+10b^5)$
28. $(12b^5-11c^3)(12b^5+11c^3)$
29. $9(3c^2-d^2)(3c^2+d^2)$
30. $(15-a)(15+a)$
31. $\left(\frac{1}{y}+11\right)\left(\frac{1}{y}-11\right)$
32. $(x^4y-8ab^2c^3)(x^4y+8ab^2c^3)$
33. $4(2x^2-y^8)(2x^2+y^8)$.
34. $\left(\frac{1}{2ab}-\frac{5}{3xy}\right)\left(\frac{1}{2ab}+\frac{5}{3xy}\right)$
35. $6(2x^4-1)(2x^4+1)$
36. $3\left(\frac{5m^3}{2}-\frac{3n}{5}\right)\left(\frac{5m^3}{2}+\frac{3n}{5}\right)$
37. $\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$
38. $\frac{2}{5}\left(\frac{2a^2}{3b}-1\right)\left(\frac{2a^2}{3b}+1\right)$
39. $2(4m^5-3p^2q^3)(4m^5+3p^2q^3)$
40. $\left(\frac{1}{ab}-ab\right)\left(\frac{1}{ab}+ab\right)$
41. $(x-y)(x+y-a)$
42. $\left(5x^2-\frac{1}{5}\right)\left(5x^2+\frac{1}{5}\right)$
43. $\left(\frac{m^6}{c}-\frac{n^5}{d^2}\right)\left(\frac{m^6}{c}+\frac{n^5}{d^2}\right)$
44. $\left(a^6+\frac{1}{3b^3}\right)\left(a^6-\frac{1}{3b^3}\right)$
45. $\left(\frac{2}{x^3}-\frac{5}{y^3}\right)\left(\frac{2}{x^3}+\frac{5}{y^3}\right)$
46. $(a+b)(a-b-2)$
47. $(p-q)(p+q-r)$
48. $(a-b)(a+b+c)$
49. $(m+n)(m-n-p)$
50. $q(r-qs)(r+qs)$

1.6.4 Trinomios ordenados

Definición: Llamamos trinomio ordenado (según el grado) a una expresión de la forma $ax^2 + bx + c$, donde a, b, c, y x representan números reales.

En general, los trinomios pueden proceder:

- de la multiplicación de un binomio por sí mismo (o un cuadrado de binomio); por ejemplo:

  $(a + 7)^2 = a^2 + 14a + 49$

- de la multiplicación de dos binomios con un término común; por ejemplo:

  $(a + 2)(a + 6) = a^2 + 8a + 12$

- o de la multiplicación de dos binomios de términos semejantes:

  $(2x + 1)(x + 2) = 2x^2 + 5x + 2$

  Con estas consideraciones, resolvamos los ejercicios presentados a continuación:

Ejercicios resueltos

1. Factoricemos $x^2 + 10x + 25$

Observamos que el primer término (x^2) y el último (25) son los cuadrados de x y 5, respectivamente, y además el término central (10x) corresponde al doble del producto de x y 5; entonces la expresión es un cuadrado de binomio y así:

$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$

2. Factoricemos $a^2 - 8a + 16$

Usando el mismo razonamiento anterior, observamos que el trinomio corresponde al cuadrado del binomio $(a - 4)$ y escribimos:

$a^2 - 8a + 16 = (a - 4)^2$

El signo del término central del trinomio indica el signo que corresponde al segundo término del binomio.

3. Factoricemos $y^2 + 13y + 36$

Aquí vemos que tanto el primer término como el tercero corresponden a cuadrados exactos (de "y" y de 6, respectivamente), pero el término central (13y) no corresponde al doble del producto entre "y" y 6 (es decir, a 12y); en este caso, el trinomio puede corresponder al producto de dos binomios con un término común, que sería "y".

Buscamos entonces dos números cuyo producto sea igual a 36 (el

Ejercicios resueltos

último término del binomio) y el producto del término común (y) por la suma de estos números sea igual al término central (13y). Los números son $+9$ y $+4$.

En efecto: $+9 \bullet +4 = 36$ y $9 + 4 = 13$

Entonces: $y^2 + 13y + 36 = (y + 9)(y + 4)$.

4. Factoricemos $a^2 - 2a - 48$

Descartamos la posibilidad de cuadrado de binomio pues el último término (-48) no es cuadrado de ningún número.

Buscamos dos números cuyo producto sea -48, y cuya "suma" sea -2, la que al multiplicarla por el término común "a" nos da el término central $-2a$.

Los números son -8 y $+6$ y la factorización correspondiente es:

$a^2 - 2a - 48 = (a - 8)(a + 6)$.

5. Factoricemos $x^2 - 5x + 6$

No es cuadrado de binomio por la misma razón anterior (el $+6$ no es cuadrado de un número entero). Corresponde entonces al producto de dos binomios con un término común, que en este caso es x. Buscamos dos números cuyo producto sea $+6$ y cuya suma sea -5.

Los números son -2 y -3. Por lo tanto, la factorización correspondiente es:

$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$.

6. Factoricemos la expresión $2x^2 - 3x - 2$

En este ejemplo, ni siquiera el primer término es cuadrado exacto de un término entero.

Amplifiquemos por el coeficiente de x^2 (en este caso, por 2) para obtener un primer término como en los ejemplos anteriores, es decir, un cuadrado exacto.

$$2x^2 - 3x - 2 \qquad / \bullet \frac{2}{2}$$

$$\frac{4x^2 - 6x - 4}{2}$$

Podemos aplicar al numerador el razonamiento de los ejemplos anteriores (porque el primer término ya es un cuadrado exacto) y entonces trataremos de factorizar como producto de dos binomios con un término común que en este caso es 2x.

Buscamos dos números que multiplicados sean igual a -4 y cuya suma sea igual a -3 (pues al multiplicar la suma por el término común 2x se debe obtener $-6x$).

Los números son -4 y 1 y así, la factorización de la expresión amplificada es:

$$\frac{4x^2 - 6x - 4}{2} = \frac{(2x - 4)(2x + 1)}{2}$$

Podemos factorizar el primer término por dos y luego simplificarlo por el denominador, obteniendo:

$$2x^2 - 3x - 2 = \frac{(2x-4)(2x+1)}{2}$$

$$2x^2 - 3x - 2 = \frac{\cancel{2}(x-2)(2x+1)}{\cancel{2}}$$

$$2x^2 - 3x - 2 = (x-2)(2x+1)$$

7. Factoricemos $3x^2 - 5x + 2$

Siguiendo los pasos anteriores, obtenemos:

$$3x^2 - 5x + 2 \qquad / \cdot \frac{3}{3}$$

$$\frac{9x^2 - 15x + 6}{3}$$

$$\frac{(3x-3)(3x-2)}{3}$$

$$\frac{\cancel{3}(x-1)(3x-2)}{\cancel{3}}$$

$$(x-1)(3x-2)$$

Ejercicios

Factorice las siguientes expresiones:

1. $x^2 + 14x + 49$
2. $x^2 + 8x + 16$
3. $a^2 + 18a + 81$
4. $a^2 - 6a + 9$
5. $y^2 - 24y + 144$
6. $x^2 + 10x + 25$
7. $t^2 - 2t + 1$
8. $z^2 + 16z + 64$
9. $x^2 - 22x + 121$
10. $a^2 - 12a + 36$
11. $1 + 6a + 9a^2$
12. $4x^2 + 20x + 25$
13. $9x^2 - 6x + 1$
14. $a^2 - 4ab + 4b^2$
15. $y^2 + 6xy + 9x^2$
16. $4t^2 + 12t + 9$
17. $4x^2 + 12xy + 9y^2$
18. $9x^2 - 30xy + 25y^2$
19. $x^2 + 14xy + 49y^2$
20. $x^4 + 2x^2 + 1$
21. $x^2 + 5x + 6$
22. $x^2 + x - 6$
23. $x^2 - x - 6$
24. $x^2 - 5x + 6$
25. $a^2 - 5a - 36$
26. $a^2 + a - 30$
27. $a^2 + 8a + 7$
28. $y^2 + y - 56$
29. $x^4 - 6x^2 + 9$
30. $4 + 20y^2 + 25y^4$
31. $x^4 + 2x^2y^2 + y^4$
32. $x^6 + 2x^3 + 1$
33. $a^4 - 4a^2b^2 + 4b^4$

Ejercicios

34. $9m^4 - 30m^2p^2 + 25p^4$
35. $9m^2 - 30mp^2 + 25p^4$
36. $\frac{x^2}{4} - x + 1$
37. $a^2 + a + \frac{1}{4}$
38. $\frac{a^2}{4} + ab + b^2$
39. $a^2 - 23a + 132$
40. $a^2 - 3a - 40$
41. $a^4 + 5a^2 + 6$
42. $4x^2 - 22x + 30$
43. $9x^2 - 9x - 28$
44. $25x^2 - 15x + 2$
45. $2x^2 + 5x + 2$
46. $2x^2 + 5x - 3$
47. $3x^2 + 14x + 8$
48. $3x^2 + 11x - 4$
49. $6x^2 - 13x + 5$
50. $2x^2 + 15x + 28$
51. $7x^2 - 8x + 1$
52. $6x^2 + 5x - 4$
53. $8x^2 - 2x - 1$
54. $5x^2 - 18x + 9$
55. $2x^2 + 3x - 14$
56. $3a^2 - 7a + 2$
57. $5a^2 + 3a - 2$
58. $6a^2 + 13a + 6$
59. $12a^2 - 23a + 5$
60. $8a^2 - 2a - 15$
61. $5x^2 - 26x + 5$
62. $18a^2 - 18a + 4$
63. $a^4 + 5a^3 + 6a^2$
64. $x^3 - 3x^2 - 40x$
65. $x^4 - 3x^2 + 2$
66. $2a^3 + 6a^2 + 4a$
67. $m^3 - m^2 - 30m$
68. $n^4 + n^2 - 2$
69. $p^4 + 2p^2 + 1$
70. $p^3 - p^2 - p + 1$

Soluciones

1. $(x+7)^2$ **2.** $(x+4)^2$ **3.** $(a+9)^2$ **4.** $(a-3)^2$ **5.** $(y-12)^2$ **6.** $(x+5)^2$
7. $(t-1)^2$ **8.** $(z+8)^2$ **9.** $(x-11)^2$ **10.** $(a-6)^2$ **11.** $(1+3a)^2$ **12.** $(2x+5)^2$
13. $(3x-1)^2$ **14.** $(a-2b)^2$ **15.** $(y+3x)^2$ **16.** $(2t+3)^2$ **17.** $(2x+3y)^2$
18. $(3x-5y)^2$ **19.** $(x+7y)^2$ **20.** $(x^2+1)^2$ **21.** $(x+3)(x+2)$ **22.** $(x+3)(x-2)$
23. $(x-3)(x+2)$ **24.** $(x-3)(x-2)$ **25.** $(a-9)(a+4)$ **26.** $(a+6)(a-5)$
27. $(a+7)(a+1)$ **28.** $(y-7)(y+8)$ **29.** $(x^2-3)^2$ **30.** $(2+5y^2)^2$ **31.** $(x^2+y^2)^2$
32. $(x^3+1)^2$ **33.** $(a^2-2b^2)^2$ **34.** $(3m^2-5p^2)^2$ **35.** $(3m-5p^2)^2$ **36.** $\left(\frac{x}{2}-1\right)^2$
37. $\left(a+\frac{1}{2}\right)^2$ **38.** $\left(\frac{a}{2}+b\right)^2$ **39.** $(a-12)(a-11)$ **40.** $(a+5)(a-8)$
41. $(a^2+2)(a^2+3)$ **42.** $2(2x-5)(x-3)$ **43.** $(3x+4)(3x-7)$ **44.** $(5x-1)(5x-2)$
45. $(2x+1)(x+2)$ **46.** $(2x-1)(x+3)$ **47.** $(3x+2)(x+4)$ **48.** $(3x-1)(x+4)$
49. $(3x-5)(2x-1)$ **50.** $(2x+7)(x+4)$ **51.** $(7x-1)(x-1)$ **52.** $(3x+4)(2x-1)$
53. $(4x+1)(2x-1)$ **54.** $(5x-3)(x-3)$ **55.** $(2x+7)(x-2)$ **56.** $(3a-1)(a-2)$
57. $(5a-2)(a+1)$ **58.** $(2a+3)(3a+2)$ **59.** $(3a-5)(4a-1)$ **60.** $(2a-3)(4a+5)$
61. $(x-5)(5x-1)$ **62.** $2(3a-2)(3a-1)$ **63.** $a^2(a+2)(a+3)$ **64.** $x(x+5)(x-8)$
65. $(x-1)(x+1)(x^2-2)$ **66.** $2a(a+1)(a+2)$ **67.** $m(m-6)(m+5)$
68. $(n-1)(n+1)(n^2+2)$ **69.** $(p^2+1)^2$ **70.** $(p-1)^2(p+1)$

1.6.5 Sumas o diferencias de cubos

Los factores de una diferencia de cubos son:

$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

Los factores de una suma de cubos son:

$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

Ejercicios resueltos

1. Factoricemos $a^3 - 8$

   Observamos que a^3 es el cubo de a y que 8 es el cubo de 2. Se trata de una diferencia de cubos, por lo tanto:

   $a^3 - 8 = (a - 2)(a^2 + 2a + 4)$

2. Factoricemos $x^3 + 27$

   El término x^3 es el cubo de x y 27 es el cubo de 3. Aquí tenemos una suma de cubos y por lo tanto:

   $x^3 + 27 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$

3. Factoricemos $27a^3 - 125b^3$

   El primer término es el cubo de 3a y el segundo término es el cubo de 5b, entonces escribimos:

   $27a^3 - 125b^3 = (3a - 5b)(9a^2 + 15ab + 25b^2)$

4. Factoricemos $a^6 - b^6$

   Aquí tenemos primero una diferencia de cuadrados, la cual factorizamos como una suma por su diferencia. Luego, cada uno de los factores corresponde a una suma o diferencia de cubos. Procedamos por pasos:

   $a^6 - b^6 = (a^3 + b^3)(a^3 - b^3)$

   $= (a + b)(a^2 - ab + b^2)(a - b)(a^2 + ab + b^2)$

   y ésa es la factorización requerida.

Ejercicios

Factoricemos las siguientes expresiones:

1. $m^6 - n^3$	**4.** $t^3 - 64v^3$	**7.** $1 - 125a^3$	**10.** $216a^3 - 27b^3$
2. $x^3 + p^3$	**5.** $27x^3 + y^3$	**8.** $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$	**11.** $\frac{8}{z^3} - \frac{27}{y^3}$
3. $a^3 - 8b^3$	**6.** $8m^3 - \frac{n^6}{8}$	**9.** $16x^3 - 54y^3$	**12.** $125 - \frac{1}{8a^3}$

Ejercicios

13. $3a^3 - 81b^3$
14. $a^2 b^3 c^6 + a^2 d^3$
15. $m^3 x^3 + 1$
16. $a^3 b^6 c^9 + 8$
17. $x^{12} - y^{12}$
18. $m^9 - 1$
19. $a^3 b^{12} - 27$
20. $3t^3 - 3$
21. $216a^3 + 8b^3$
22. $8t^3 + 64$
23. $125t^3 - \frac{1}{z^3}$
24. $\frac{2}{t^3} - \frac{16}{y^3}$
25. $8a^3 + \frac{1}{b^3}$
26. $-1 + a^3$
27. $a^6 - 1$
28. $-1 - b^3$
29. $\frac{8}{t^6} - \frac{27}{t^3}$
30. $p^3 + q^9$
31. $m^{12} + 1$
32. $a^{27} + b^{27}$
33. $1 - a^9$
34. $\frac{x^3}{y^3} - 1$
35. $0{,}001 - \frac{a^6}{b^3}$
36. $216 - \frac{a^3}{b^3}$
37. $\frac{1}{125} + \frac{1}{z^3}$
38. $64a^3 - \frac{1}{216}$
39. $m^3 n^3 p^6 - 8a^3$
40. $\frac{1}{8z^3} + \frac{1}{27y^3}$

Soluciones

1. $(m^2 - n)(m^4 + m^2 n + n^2)$
2. $(x + p)(x^2 - px + p^2)$
3. $(a - 2b)(a^2 + 2ab + 4b^2)$
4. $(t - 4v)(t^2 + 4tv + 16v^2)$
5. $(3x + y)(9x^2 - 3xy + y^2)$
6. $\left(2m - \frac{n^2}{2}\right)\left(4m^2 + mn^2 + \frac{n^4}{4}\right)$
7. $(1 - 5a)(1 + 5a + 25a^2)$
8. $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2}\right)$
9. $2(2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2)$
10. $27(2a - b)(4a^2 + 2ab + b^2)$
11. $\left(\frac{2}{z} - \frac{3}{y}\right)\left(\frac{4}{z^2} + \frac{6}{yz} + \frac{9}{y^2}\right)$
12. $\left(5 - \frac{1}{2a}\right)\left(25 + \frac{5}{2a} + \frac{1}{4a^2}\right)$
13. $3(a - 3b)(a^2 + 3ab + 9b^2)$
14. $a^2(bc^2 + d)(b^2c^4 - bc^2d + d^2)$
15. $(mx + 1)(m^2x^2 - mx + 1)$
16. $(ab^2c^3 + 2)(a^2b^4c^6 - 2ab^2c^3 + 4)$
17. $(x - y)(x + y)(x^2 + y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4)(x^4 - x^2y^2 + y^4)$
18. $(m - 1)(m^2 + m + 1)(m^6 + m^3 + 1)$
19. $(ab^4 - 3)(a^2b^8 + 3ab^4 + 9)$
20. $3(t - 1)(t^2 + t + 1)$
21. $8(3a + b)(9a^2 - 3ab + b^2)$
22. $8(t + 2)(t^2 - 2t + 4)$
23. $\left(5t - \frac{1}{z}\right)\left(25t^2 + \frac{5t}{z} + \frac{1}{z^2}\right)$
24. $2\left(\frac{1}{t} - \frac{2}{y}\right)\left(\frac{1}{t^2} + \frac{2}{ty} + \frac{4}{y^2}\right)$
25. $\left(2a + \frac{1}{b}\right)\left(4a^2 - \frac{2a}{b} + \frac{1}{b^2}\right)$
26. $(a - 1)(a^2 + a + 1)$
27. $(a - 1)(a + 1)(a^4 + a^2 + 1)$
28. $-(1 + b)(1 - b + b^2)$
29. $\frac{1}{t^3}\left(\frac{2}{t} - 3\right)\left(\frac{4}{t^2} + \frac{6}{t} + 9\right)$
30. $(p + q^3)(p^2 - pq^3 + q^6)$
31. $(m^4 + 1)(m^8 - m^4 + 1)$
32. $(a + b)(a^2 - ab + b^2)(a^6 - a^3b^3 + b^6)(a^{18} - a^9b^9 + b^{18})$
33. $(1 - a)(1 + a + a^2)(1 + a^3 + a^6)$
34. $\left(\frac{x}{y} - 1\right)\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{x}{y} + 1\right)$
35. $\left(0{,}1 - \frac{a^2}{b}\right)\left(0{,}01 + \frac{0{,}1a^2}{b} + \frac{a^4}{b^2}\right)$
36. $\left(6 + \frac{a}{b}\right)\left(36 - \frac{6a}{b} + \frac{a^2}{b^2}\right)$
37. $\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{25} - \frac{1}{5z} + \frac{1}{z^2}\right)$
38. $\left(4a - \frac{1}{6}\right)\left(16a^2 + \frac{2a}{3} + \frac{1}{36}\right)$
39. $(mnp^2 - 2a)(m^2n^2p^4 + 2a\,mnp^2 + 4a^2)$
40. $\left(\frac{1}{2z} + \frac{1}{3y}\right)\left(\frac{1}{4z^2} - \frac{1}{6yz} + \frac{1}{9y^2}\right)$

Fracciones algebraicas 1.7

1.7.1 Simplificación

Para simplificar una fracción es necesario y suficiente que el numerador y el denominador tengan un factor común.

En el caso de monomios, la simplificación se hace en forma directa; en cambio, si el numerador o el denominador de la fracción tienen dos o más términos, es necesario factorizar primero y luego simplificar.

Ejercicios resueltos

1. Simplifiquemos $\dfrac{2a^2}{3ab}$

   Aquí tanto el numerador ($2a^2$) como el denominador ($3ab$) contienen el término "a" como factor. Simplificamos, pues, por él y obtenemos:

   $$\frac{2\cancel{a^2}}{3\cancel{a}b}=\frac{2a}{3b}$$

2. Simplifiquemos $\dfrac{6m^2p^2q}{27\,mp^3\,q^2}$

   En este ejemplo, el término $3mp^2q$ está contenido en el numerador y en el denominador. Simplificando, nos queda:

   $$\frac{6m^2p^2q}{27mp^3q^2}=\frac{2m}{9pq}$$

3. Simplifiquemos $\dfrac{2a^2+2}{4a}$

   En este caso no es posible hacer una simplificación directa, pues en el numerador hay un binomio (recordemos que no podemos simplificar términos que se suman o restan).

   Debemos entonces factorizar primero y después simplificar:

   $$\frac{2a^2+2}{4a}=\frac{\cancel{2}(a^2+1)}{\cancel{4}a}=\frac{a^2+1}{2a}$$

   Y ya no es posible seguir reduciendo porque el numerador no se puede factorizar más.

4. Simplifiquemos $\dfrac{a^2+ab}{a+b}$

   Usando el mismo razonamiento anterior, factorizamos primero y luego simplificamos:

   $$\frac{a^2+ab}{a+b}=\frac{a\cancel{(a+b)}}{\cancel{a+b}}=a$$

5. Simplifiquemos $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+3x+2}$

   Factorizando y luego simplificando obtenemos:

   $$\frac{x^2+5x+6}{x^2+3x+2}=\frac{\cancel{(x+2)}(x+3)}{\cancel{(x+2)}(x+1)}=\frac{x+3}{x+1}$$

6. Simplifiquemos $\dfrac{x^2-9}{x^2+6x+9}$

Procediendo como antes:

$$\frac{x^2-9}{x^2+6x+9}=\frac{\cancel{(x+3)}\,(x-3)}{\cancel{(x+3)}\,(x+3)}=\frac{x-3}{x+3}$$

7. Simplifiquemos $\dfrac{3x^3-3x\,y^2}{x^2\,y-xy^2}$

$$\frac{3x^3-3xy^2}{x^2\,y-xy^2}=\frac{3x\,(x^2-y^2)}{xy\,(x-y)}=\frac{3\cancel{x}\,\cancel{(x-y)}\,(x+y)}{\cancel{x}y\,\cancel{(x-y)}}=\frac{3\,(x+y)}{y}$$

Ejercicios

Simplifique las siguientes expresiones:

1. $\dfrac{2a}{5ab}$

2. $\dfrac{3a}{6b}$

3. $\dfrac{a^2\,b}{ab^2}$

4. $\dfrac{6m}{16pm}$

5. $\dfrac{5ad}{10d}$

6. $\dfrac{25\,p^2q}{15\,pq^3}$

7. $\dfrac{2\,m^2\,np}{18mn^2\,p}$

8. $\dfrac{30\,a^6\,b}{21\,a^6\,b^2}$

9. $\dfrac{-125\,x^6\,y^5\,z^4}{5\,x\,y\,z}$

10. $\dfrac{2ab}{8\,a^6\,b^6}$

11. $\dfrac{a^4\,b^4}{4ab}$

12. $\dfrac{6\,a^{12}}{12\,a^6}$

13. $\dfrac{3\,p\,q^3}{2\,p\,q^2}$

14. $\dfrac{-15\,c^7\,d^8}{35\,ab\,c^7}$

15. $\dfrac{-17\,m^6\,n^{11}}{51\,m^4\,n^9}$

16. $\dfrac{(a+b)^2}{(a+b)}$

17. $\dfrac{(p^2+1)^3}{(p^2+1)^4}$

18. $\dfrac{a^2+b^2}{(a^2+b^2)^4}$

19. $\dfrac{32\,z^4\,y^3}{96\,z^3\,y^4}$

20. $\dfrac{a}{144a}$

21. $\dfrac{121\,a}{11\,ac}$

22. $\dfrac{m^4\,n^4}{4mn}$

23. $\dfrac{12\,a^{12}\,b^{12}}{6\,a^6\,b^6}$

24. $\dfrac{(a^3\,b^2)^2}{5a^6\,b^8}$

25. $\dfrac{a^2+ab}{2a}$

26. $\dfrac{a^2\,b^2-a\,b}{a\,b-1}$

27. $\dfrac{x^2-25}{x+5}$

28. $\dfrac{1-a^2}{1+a}$

29. $\dfrac{ab^2-ac^2}{b+c}$

30. $\dfrac{x+4}{x^2+8x+16}$

31. $\dfrac{xy}{x^2\,y^2-xy^3}$

32. $\dfrac{3\,abc}{6\,a^2\,bc-9\,ab^2c}$

33. $\dfrac{6x^2-3xy}{4x^2-y^2}$

34. $\dfrac{2\,pq}{p^2\,q-pq^2}$

35. $\dfrac{5xy+10x}{y^2-4}$

36. $\dfrac{m^2-2mn+n^2}{m^2-n^2}$

37. $\dfrac{ab+ac+xb+xc}{b^2-c^2}$

38. $\dfrac{x^2+7x+12}{x^2+5x+6}$

39. $\dfrac{x^4-y^2}{x^2+y}$

40. $\dfrac{x^2-8x+12}{x^2-4x-12}$

41. $\dfrac{2\,a^2\,b-8\,a\,b^2}{4\,a^2\,b-16\,a\,b^2}$

42. $\dfrac{ax+bx-ay-by}{x^2-y^2}$

43. $\dfrac{10x^2-15xy}{4x^2-9y^2}$

44. $\dfrac{3a^3-3a^2-6a}{2a^3+6a^2+4a}$

45. $\dfrac{x^4-x^2}{x^3+2\,x^2+x}$

46. $\dfrac{x^2-11x+30}{x^2-25}$

47. $\dfrac{x^3-3\,xy^2}{x^4-9y^4}$

48. $\dfrac{x^8-9y^4}{x^4-3y^2}$

49. $\dfrac{5ab}{25a^2 - 5ab}$ 52. $\dfrac{x^2 - 7x + 6}{x^2 - 1}$ 55. $\dfrac{ac - ad - bc + bd}{c^2 - d^2}$ 58. $\dfrac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 9}$

50. $\dfrac{x^2 + x - 2}{ax + 2a - x - 2}$ 53. $\dfrac{2a^2b - 2ab^2}{a^2 - 2ab + b^2}$ 56. $\dfrac{2p^2x + 2px^2}{p^2 - pq + xp - xq}$ 59. $\dfrac{4p^2 - 4p + 1}{4p^2 - 1}$

51. $\dfrac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$ 54. $\dfrac{6p^2q - 2pq^2}{3p^2q - pq^2}$ 57. $\dfrac{x^2 + 10x - 11}{x^2 + 9x - 10}$ 60. $\dfrac{2m^3 - 18m}{2m^2 - 6}$

Soluciones

1. $\dfrac{2}{5b}$ 2. $\dfrac{a}{2b}$ 3. $\dfrac{a}{b}$ 4. $\dfrac{3}{8p}$ 5. $\dfrac{a}{2}$ 6. $\dfrac{5p}{3q^2}$ 7. $\dfrac{m}{9n}$ 8. $\dfrac{10}{7b}$

9. $-25x^5y^4z^3$ 10. $\dfrac{1}{4a^5b^5}$ 11. $\dfrac{a^3b^3}{4}$ 12. $\dfrac{a^6}{2}$ 13. $\dfrac{3q}{2}$ 14. $-\dfrac{3d^8}{7ab}$

15. $-\dfrac{m^2n^2}{3}$ 16. $a + b$ 17. $\dfrac{1}{p^2 + 1}$ 18. $\dfrac{1}{(a^2 + b^2)^3}$ 19. $\dfrac{z}{3y}$ 20. $\dfrac{1}{144}$ 21. $\dfrac{11}{c}$

22. $\dfrac{m^3n^3}{4}$ 23. $2a^6b^6$ 24. $\dfrac{1}{5b^4}$ 25. $\dfrac{a + b}{2}$ 26. $a\,b$ 27. $x - 5$ 28. $1 - a$

29. $ab - ac$ 30. $\dfrac{1}{x + 4}$ 31. $\dfrac{1}{xy - y^2}$ 32. $\dfrac{1}{2a - 3b}$ 33. $\dfrac{3x}{2x + y}$ 34. $\dfrac{2}{p - q}$

35. $\dfrac{5x}{y - 2}$ 36. $\dfrac{m - n}{m + n}$ 37. $\dfrac{a + x}{b - c}$ 38. $\dfrac{x + 4}{x + 2}$ 39. $x^2 - y$ 40. $\dfrac{x - 2}{x + 2}$

41. $\dfrac{1}{2}$ 42. $\dfrac{a + b}{x + y}$ 43. $\dfrac{5x}{2x + 3y}$ 44. $\dfrac{3a - 6}{2a + 4}$ 45. $\dfrac{x^2 - x}{x + 1}$ 46. $\dfrac{x - 6}{x + 5}$

47. $\dfrac{x}{x^2 + 3y^2}$ 48. $x^4 + 3y^2$ 49. $\dfrac{b}{5a - b}$ 50. $\dfrac{x - 1}{a - 1}$ 51. $\dfrac{x^2 + 1}{x + 1}$ 52. $\dfrac{x - 6}{x + 1}$

53. $\dfrac{2ab}{a - b}$ 54. 2 55. $\dfrac{a - b}{c + d}$ 56. $\dfrac{2px}{p - q}$ 57. $\dfrac{x + 11}{x + 10}$ 58. $\dfrac{x - 5}{x + 3}$ 59. $\dfrac{2p - 1}{2p + 1}$

60. $\dfrac{m^3 - 9m}{m^2 - 3}$

1.7.2 Multiplicación y división de fracciones algebraicas

Multiplicamos los numeradores y los denominadores entre sí y hacemos todas las simplificaciones posibles.

En el caso de los monomios las simplificaciones pueden hacerse antes o después de multiplicar; en el caso de los polinomios (expresiones con dos términos o más) es conveniente hacer todas las simplificaciones primero (factorizando por supuesto) y luego las multiplicaciones.

Para dividir fracciones, multiplicamos la primera por el recíproco de la segunda.

Ejercicios resueltos

1. Efectuemos el siguiente producto:

$$\frac{3ab}{2a} \cdot \frac{2b}{3a^2}$$

Multiplicando en forma directa obtenemos:

$$\frac{3ab}{2a} \cdot \frac{2b}{3a^2} = \frac{3ab \cdot 2b}{2a \cdot 3a^2} = \frac{\cancel{6}\cancel{a}b^2}{\cancel{6}\cancel{a}^3} = \frac{b^2}{a^2}$$

2. Efectuemos el producto:

$$\frac{3xy}{2a} \cdot \frac{6ab}{3xz} \cdot \frac{-5z^2}{10b^2x}$$

Multiplicando en forma directa obtenemos:

$$\frac{3xy \cdot 6ab \cdot -5z^2}{2a \cdot 3xz \cdot 10b^2x} = \frac{-90\cancel{x}y\cancel{a}\cancel{b}z^2}{60\cancel{a}x^{\cancel{2}}\cancel{z}b^{\cancel{2}}} = \frac{-3yz}{2xb}$$

3. Efectuemos el producto:

$$\frac{a+b}{ax-bx} \cdot \frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2} =$$

Aquí debemos simplificar antes de multiplicar (de lo contrario complicamos mucho el ejercicio). Como sabemos, factorizamos primero, obteniendo:

$$\frac{a+b}{ax-bx} \cdot \frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2} = \frac{\cancel{a+b}}{x\cancel{(a-b)}} \cdot \frac{\cancel{(a-b)}\cancel{(a-b)}}{\cancel{(a+b)}\cancel{(a-b)}} = \frac{1}{x}$$

Una vez hechas las factorizaciones podemos simplificar un factor de cualquier numerador con un factor igual de cualquier denominador.

4. $\dfrac{a+1}{a+2} \cdot \dfrac{a^2-4}{a^2+4a+3} \cdot \dfrac{a^2-9}{a^2-4a+4}$

Factoricemos primero:

$$\frac{a+1}{a+2} \cdot \frac{a^2-4}{a^2+4a+3} \cdot \frac{a^2-9}{a^2-4a+4} = \frac{\cancel{a+1}}{\cancel{a+2}} \cdot \frac{\cancel{(a+2)}\cancel{(a-2)}}{\cancel{(a+1)}\cancel{(a+3)}} \cdot \frac{\cancel{(a+3)}(a-3)}{\cancel{(a-2)}(a-2)}$$

el resultado es $\dfrac{a-3}{a-2}$

5. Multipliquemos:

$$\frac{5a+b}{2a-b} \cdot \frac{ab}{a-b} \cdot \frac{a}{5}$$

Aquí no es posible efectuar ninguna simplificación; por lo tanto, procedemos a multiplicar directamente.

$$\frac{(5a+b) \cdot ab \cdot a}{(2a-b)(a-b) \cdot 5} = \frac{(5a+b)a^2b}{(2a-b)(5a-5b)} = \frac{5a^3b-a^2b^2}{10a^2-10ab-5ab+5b^2}$$

Reduciendo términos semejantes obtenemos finalmente:

$$\frac{5a^3b-a^2b^2}{10a^2-15ab+5b^2}$$

6. Efectuemos la siguiente división:

$$\frac{2ab}{3x} : \frac{2a}{3xy}$$

Cambiamos el signo de división : por el de multiplicación • e invertimos la segunda fracción. Nos queda:

$$\frac{2ab}{3x} : \frac{2a}{3xy} = \frac{2ab}{3x} \cdot \frac{3xy}{2a}$$

Hacemos las simplificaciones adecuadas y obtenemos:

$$\frac{\cancel{2}a\,b}{\cancel{3}\cancel{x}} \cdot \frac{\cancel{3}\cancel{x}y}{\cancel{2}\cancel{a}} = by$$

7. Efectuemos la siguiente división:

$$\frac{a+b}{2ab} : \frac{a^2-b^2}{6a^2b}$$

Procediendo como en el ejemplo anterior:

$$\frac{a+b}{2ab} : \frac{a^2-b^2}{6a^2b} = \frac{a+b}{2ab} \cdot \frac{6a^2b}{a^2-b^2}$$

$$= \frac{\cancel{a+b}}{\cancel{2}\cancel{a}\cancel{b}} \cdot \frac{\cancel{6}a^{\cancel{2}}\cancel{b}}{\cancel{(a+b)}(a-b)}$$

$$= \frac{3a}{a-b}$$

(Aquí fue necesario factorizar el término $a^2 - b^2$ antes de simplificar).

Ejercicios

I. Simplifique las siguientes expresiones:

1. $\frac{3ab}{9a}$
2. $\frac{ax^2}{bx}$
3. $\frac{2ab}{5ab}$
4. $\frac{3a}{18a^2b}$
5. $\frac{-16m^2}{18n^2}$
6. $\frac{b}{a^2b^2}$
7. $\frac{6m^2n}{15mn^2}$
8. $\frac{7p^2qr^6}{3pq^2r^5}$
9. $\frac{-3p^6q^3}{24p^6q^2}$
10. $\frac{a^2b^2c^2}{2abc}$
11. $\frac{9x^2y^7z^{11}}{x^2y^6z^{10}}$
12. $\frac{12x^6y^{10}}{-4x^5y^{11}}$
13. $\frac{(a+b)^2}{(a+b)^3}$
14. $\frac{p-q}{2p-2q}$
15. $\frac{3a+3ab}{1+b}$
16. $\frac{3x+15}{5x+25}$
17. $\frac{a^2+a}{2a+2}$
18. $\frac{20x^2-5xy}{4x-y}$
19. $\frac{3x^2y-3xy^2}{2x^2-2xy}$
20. $\frac{x^2-y^2}{x-y}$
21. $\frac{a^2-b^2}{a+b}$
22. $\frac{3a-3b}{a^2-b^2}$
23. $\frac{6p+12q}{p+2q}$
24. $\frac{1-a}{1-a^2}$
25. $\frac{12x-3x^3}{3x}$
26. $\frac{4-x^2}{2+x}$
27. $\frac{2xy}{x^2y-xy^2}$
28. $\frac{9x^2-16y^2}{3x+4y}$
29. $\frac{a^2-9b^2}{3a+9b}$
30. $\frac{(m-n)^2}{m^2-n^2}$
31. $\frac{a^2-5a+6}{a^2-4}$
32. $\frac{2a^2-2b^2}{a^2+2ab+b^2}$
33. $\frac{18a^2b+27ab^2}{4a^2+12ab+9b^2}$
34. $\frac{x^2+5x-14}{x^2+9x+14}$
35. $\frac{x^4-2x^2y^2+y^4}{x^4-y^4}$
36. $\frac{ac+ad+bc+bd}{ac-ad+bc-bd}$
37. $\frac{2a^2b+6ab^2}{a^2+ab-6b^2}$
38. $\frac{2bx^2+2bxy-axy-ay^2}{6abx^2-3a^2xy}$
39. $\frac{a^4+3a^3+2a^2}{a^3-a}$
40. $\frac{2t^2-2t-12}{4t^2-16t+12}$
41. $\frac{50-2y^2}{4y^2+44y+120}$
42. $\frac{ab-ay-bx+xy}{b^2-by+bx-xy}$
43. $\frac{2a^2-10a+12}{a^2+a-6}$
44. $\frac{4u^2-v^2}{6u^2v-3uv^2}$

Ejercicios

45. $\dfrac{p^2x+px^2}{p^2+3px+2x^2}$

46. $\dfrac{a^3-a^2-30a}{a^4-11a^3+30a^2}$

47. $\dfrac{2a^2b^2c^2}{4a^2bc+2ab^2c+2abc^2}$

48. $\dfrac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2}$

49. $\dfrac{x^3-y^3}{x^2-y^2}$

50. $\dfrac{m^2-4p^2}{m^2-4mp+4p^2}$

II. Efectúe las operaciones indicadas (multiplicaciones):

1. $\dfrac{a}{2b}\cdot\dfrac{ab}{b}$

2. $\dfrac{2x}{y}\cdot\dfrac{1}{x}$

3. $\dfrac{2m}{3n}\cdot\dfrac{3mn}{4}$

4. $\dfrac{a^2}{b}\cdot\dfrac{ab}{a}$

5. $\dfrac{3x}{5y}\cdot\dfrac{10y}{6x}$

6. $\dfrac{3u^2v}{2u}\cdot\dfrac{2uv}{18v^2}$

7. $\dfrac{10a^2bc}{4b^3}\cdot\dfrac{2b}{5ac}$

8. $\dfrac{7xy}{2m}\cdot\dfrac{m}{14x^2y}\cdot\dfrac{10m^2}{2x}$

9. $\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{2b}{3c}\cdot\dfrac{4c}{a}$

10. $\dfrac{x-y}{x}\cdot\dfrac{x^2}{x-y}$

11. $(x^2+2xy+y^2)\cdot\dfrac{1}{x+y}$

12. $\dfrac{2a^3}{a-1}\cdot\dfrac{a^2-1}{a^2}$

13. $\dfrac{9x^2-1}{x^2}\cdot\dfrac{2x}{3x-1}$

14. $\dfrac{m-n}{m^2-n^2}\cdot\dfrac{m+n}{(m-n)^2}$

15. $\dfrac{a^2+a}{a^2}\cdot\dfrac{3a}{a^2+2a+1}$

16. $\dfrac{2x^2+6x}{3y}\cdot\dfrac{2xy}{x+3}$

17. $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-4}\cdot\dfrac{x-2}{x^2-9}$

18. $\dfrac{1+x}{1-x}\cdot\dfrac{1-x^2}{(1+x)^2}$

19. $\dfrac{a^2-ab}{2ab}\cdot\dfrac{a+b}{a^2-b^2}$

20. $\dfrac{3x-6}{2x-6}\cdot\dfrac{x^2-9}{x^2-4}\cdot\dfrac{1}{3}$

21. $\dfrac{2a+4}{3a-12}\cdot\dfrac{a+4}{a^2-16}\cdot\dfrac{a^2-8a+16}{a+2}$

22. $\dfrac{x^2-6x+5}{x+2}\cdot\dfrac{x^2-4}{x^2-1}$

23. $\dfrac{x-6}{x-2}\cdot\dfrac{x^2-x-2}{x^2-9x+18}\cdot\dfrac{2x}{x+1}$

24. $\dfrac{m^2-mp}{2p^2}\cdot\dfrac{4p}{m^2-p^2}\cdot\dfrac{1}{2m}$

25. $\dfrac{a^2-3a-18}{a^2-2a-8}\cdot\dfrac{a^2-16}{a^2-5a-6}\cdot\dfrac{a+2}{a+3}$

26. $\dfrac{1}{2x}\cdot\dfrac{x^3-y^3}{3y}\cdot\dfrac{3xy}{x^2+xy+y^2}$

27. $\dfrac{a+b}{a^2-b^2}\cdot\dfrac{ab}{a+b}\cdot\dfrac{a^2-2ab+b^2}{3ab}$

28. $\dfrac{a^2-25b^2}{a-3b}\cdot\dfrac{a^2-7b+12b^2}{a-5b}$

29. $\dfrac{2a-4}{6a}\cdot\dfrac{a^2-5a+6}{a^2-4a+3}\cdot\dfrac{a}{a-2}$

30. $\dfrac{a^3+2a^2+a}{a^2+7a+10}\cdot\dfrac{a^2-25}{a+1}\cdot\dfrac{1}{2a^2}$

III. Efectúe las siguientes operaciones (divisiones):

1. $\dfrac{a}{2}:\dfrac{a}{3}$

2. $\dfrac{1}{a}:\dfrac{2}{a}$

3. $\dfrac{x^2}{y}:\dfrac{x}{y}$

4. $\dfrac{m}{ax}:\dfrac{n}{ax}$

5. $\dfrac{2ab}{3b}:\dfrac{6a}{2ab}$

6. $\dfrac{x-1}{5}:\dfrac{x-1}{10}$

7. $\dfrac{2axy}{3a}:\dfrac{2x}{3y}$

8. $\dfrac{a+b}{a-b}:(a^2-b^2)$

9. $\dfrac{15n^2p}{2nz}:\dfrac{3np^2}{4z}$

10. $\dfrac{a^2-1}{a+2}:\dfrac{a-1}{a+2}$

11. $\dfrac{x-1}{a-1}:\dfrac{x^2-x}{a^2-a}$

12. $\dfrac{a^2-b^2}{a^3-b^3}:\dfrac{a+b}{a-b}$

13. $\dfrac{15a^3bc}{3ab^2}:\dfrac{25a^2b^2c^2}{bc}$

14. $\dfrac{x^3-x^2y}{2xy}:\dfrac{x^2-y^2}{x+y}$

15. $\dfrac{2ab}{8b^2}:\left(\dfrac{2x}{x-1}:\dfrac{3bx}{2x-2}\right)$

16. $\dfrac{2x-6}{3x^2y}:\dfrac{x^2-5x+6}{6xy}$

17. $\frac{1}{a^2-49} : \frac{1}{a^2-8a+7}$

18. $\left(\frac{1}{a} : \frac{2}{a^2}\right) : \frac{a}{2}$

19. $\frac{a-1}{a-2} : \frac{a^2-1}{a^2-4}$

20. $\frac{a-3}{a-5} : \frac{a^2-8a+15}{a^2-11a+30}$

21. $\frac{2a+8}{3a-3} : \frac{a^2+2a-8}{6a^2-6}$

22. $\frac{a^3-5a^2+6a}{a^2+7a+12} : \frac{a^3-3a^2}{a^2-16}$

23. $\frac{a}{b^2} : \frac{a^2}{b}$

24. $\frac{1}{x} : \left(\frac{1}{x} : \frac{1}{x}\right)$

25. $\left(\frac{22x^2y}{7} : \frac{11xy}{14}\right) : 2x$

26. $\frac{a^3+3a^2}{a^2-9} : \frac{a^2+2a}{a^2-5a+6}$

27. $\frac{1}{x^3-6x^2} : \frac{1}{x^2-12x+36}$

28. $\frac{ac-ad-bc+bd}{a^2-b^2} : \frac{c^2-d^2}{a^2+2ab+b^2}$

29. $\left(\frac{x^2+7x+10}{x^2+2x-3} : \frac{x+2}{x+3}\right) \cdot \frac{x^2+3x-4}{x^2-25}$

30. $\frac{2x}{x-2} \cdot \left(\frac{x^2-4}{x^2+x} : \frac{x+2}{x^2-1}\right)$

Soluciones

I. Simplificación

1. $\frac{b}{3}$ 2. $\frac{ax}{b}$ 3. $\frac{2}{5}$ 4. $\frac{1}{6ab}$ 5. $\frac{-8m^2}{9n^2}$ 6. $\frac{1}{a^2b}$ 7. $\frac{2m}{5n}$ 8. $\frac{7pr}{3q}$ 9. $\frac{-q}{8}$

10. $\frac{abc}{2}$ 11. $9yz$ 12. $\frac{-3x}{y}$ 13. $\frac{1}{a+b}$ 14. $\frac{1}{2}$ 15. $3a$ 16. $\frac{3}{5}$ 17. $\frac{a}{2}$ 18. $5x$

19. $\frac{3y}{2}$ 20. $x+y$ 21. $a-b$ 22. $\frac{3}{a+b}$ 23. 6 24. $\frac{1}{1+a}$ 25. $4-x^2$ 26. $2-x$

27. $\frac{2}{x-y}$ 28. $3x-4y$ 29. $\frac{a-3b}{3}$ 30. $\frac{m-n}{m+n}$ 31. $\frac{a-3}{a+2}$ 32. $\frac{2a-2b}{a+b}$

33. $\frac{9ab}{2a+3b}$ 34. $\frac{x-2}{x+2}$ 35. $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ 36. $\frac{c+d}{c-d}$ 37. $\frac{2ab}{a-2b}$ 38. $\frac{x+y}{3ax}$ 39. $\frac{a^2+2a}{a-1}$

40. $\frac{t+2}{2t-2}$ 41. $\frac{5-y}{12+2y}$ 42. $\frac{a-x}{b+x}$ 43. $\frac{2a-6}{a+3}$ 44. $\frac{2u+v}{3uv}$ 45. $\frac{px}{p+2x}$

46. $\frac{a+5}{a^2-5a}$ 47. $\frac{abc}{2a+b+c}$ 48. $x-y$ 49. $\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}$ 50. $\frac{m+2p}{m-2p}$

II. Multiplicación

1. $\frac{a^2}{2b}$ 2. $\frac{2}{y}$ 3. $\frac{m^2}{2}$ 4. a^2 5. 1 6. $\frac{u^2}{6}$ 7. $\frac{a}{b}$ 8. $\frac{5m^2}{4x^2}$ 9. $\frac{8}{3}$ 10. x

11. $x+y$ 12. $2a^2+2a$ 13. $\frac{6x+2}{x}$ 14. $\frac{1}{(m-n)^2}$ 15. $\frac{3}{a+1}$ 16. $\frac{4x^2}{3}$ 17. $\frac{1}{x-3}$

18. 1 19. $\frac{1}{2b}$ 20. $\frac{x+3}{2x+4}$ 21. $\frac{2}{3}$ 22. $\frac{x^2-7x+10}{x+1}$ 23. $\frac{2x}{x-3}$ 24. $\frac{1}{mp+p^2}$

25. $\frac{a+4}{a+1}$ 26. $\frac{x-y}{2}$ 27. $\frac{a-b}{3a+3b}$ 28. $a^2+ab-20b^2$ 29. $\frac{a-2}{3a-3}$ 30. $\frac{a^2-4a-5}{2a^2+4a}$

Soluciones

III. División

1. $\frac{3}{2}$ 2. $\frac{1}{2}$ 3. x 4. $\frac{m}{n}$ 5. $\frac{2ab}{9}$ 6. 2 7. y^2

8. $\frac{1}{a^2-2ab+b^2}$ 9. $\frac{10}{p}$ 10. $a+1$ 11. $\frac{a}{x}$ 12. $\frac{a-b}{a^2+ab+b^2}$ 13. $\frac{1}{5b^2}$

14. $\frac{x}{2y}$ 15. $\frac{3a}{16}$ 16. $\frac{4}{x^2-2x}$ 17. $\frac{a-1}{a+7}$ 18. 1 19. $\frac{a+2}{a+1}$

20. $\frac{a-6}{a-5}$ 21. $\frac{4a+4}{a-2}$ 22. $\frac{a^2-6a+8}{a^2+3a}$ 23. $\frac{1}{ab}$ 24. $\frac{1}{x}$ 25. 2

26. $\frac{a^2-2a}{a+2}$ 27. $\frac{x-6}{x^2}$ 28. $\frac{a+b}{c+d}$ 29. $\frac{x+4}{x-5}$ 30. $2x-2$

1.7.3 Adición y sustracción de fracciones algebraicas

Si las fracciones tienen el mismo denominador, entonces sumamos (o restamos) los numeradores y conservamos el denominador.

Si los denominadores son diferentes, entonces debemos buscar el **mínimo común múltiplo** (m.c.m.) de ellos y amplificar cada fracción por el factor necesario, de modo que todas queden reducidas a un denominador común.

El **mínimo común múltiplo** de expresiones algebraicas es aquella que las contiene, como factores, a todas.

Ejercicios resueltos

1. Encontremos el m.c.m. entre a y $2a$.

   Vemos que **a** está contenido (como factor) en $2a$, por lo tanto, el m.c.m. es $\mathbf{2a}$.

2. Encontremos el m.c.m. entre a, $2a$ y a^2.

   Aquí ninguno de los tres términos contiene a los otros dos. Buscamos el m.c.m. entre los coeficientes numéricos, en este caso es **2**, y entre los factores literales, en este caso, como se trata de monomios de la misma base, es el término que tiene el exponente más alto.
   Así, el m.c.m. es $2a^2$.

3. Encontremos el m.c.m. entre $2x$, $3xy$, x^2.

   Usando el razonamiento anterior, determinamos el m.c.m. entre los coeficientes numéricos, que es el 6, y entre los factores literales, que es $\mathbf{x^2 y}$. Así, el m.c.m. entre $2x$, $3xy$, x^2 es $6x^2y$.

4. Encontremos el m.c.m. entre $a-b$ y a^2-b^2.

   Como sabemos, la factorización correspondiente de a^2-b^2 es $(a-b)(a+b)$; por lo tanto, $a-b$ está contenido en a^2-b^2 y así el m.c.m. es a^2-b^2.

5. Encontremos el m.c.m. entre $a+2$ y $a+3$.

Aquí ningún término está contenido en el otro; por lo tanto, el m. c. m. es el producto de los dos, es decir, $a^2 + 5a + 6$.

6. Efectuemos las operaciones indicadas.

$$\frac{a+2}{3}+\frac{2a+5}{3}$$

Se trata de una suma con igual denominador, así es que sumamos los numeradores y conservamos el denominador.

$$\frac{a+2}{3}+\frac{2a+5}{3}=\frac{a+2+2a+5}{3}=\frac{3a+7}{3}$$

7. Efectuemos las operaciones indicadas:

$$\frac{4}{x}+\frac{5}{2x}-\frac{3}{5x^2}$$

Los denominadores son diferentes; por lo tanto, debemos determinar el m.c.m. entre ellos, que será el denominador común. Este es $10x^2$. Luego amplificamos cada fracción por el término adecuado para obtener el m.c.m.

$$\frac{4}{x}+\frac{5}{2x}-\frac{3}{5x^2}=\frac{4\cdot 10x+5\cdot 5x-3\cdot 2}{10x^2}$$

$$=\frac{40x+25x-6}{10x^2}$$

$$=\frac{65x-6}{10x^2}$$

8. Efectuemos las operaciones siguientes:

$$\frac{m+1}{2m^2+4m}-\frac{m+1}{m^2-4}+\frac{1}{m-2}$$

Factoricemos los denominadores para encontrar el m.c.m.

$$\frac{m+1}{2m(m+2)}-\frac{m+1}{(m-2)(m+2)}+\frac{1}{m-2}$$

El m.c.m. es $2m\,(m+2)\,(m-2)$

Es conveniente mantener el m.c.m. factorizado, pues así facilita el proceso de amplificación de cada fracción y el de simplificación, si es posible, al final.

$$\frac{m+1}{2m(m+2)}-\frac{m+1}{(m-2)(m+2)}+\frac{1}{m-2}=$$

$$\frac{(m-2)(m+1)-2m(m+1)+2m(m+2)}{2m(m+2)(m-2)}=$$

$$\frac{m^2+m-2m-2-2m^2-2m+2m^2+4m}{2m(m+2)(m-2)}=\frac{m^2+m-2}{2m(m+2)(m-2)}$$

Factorizamos el numerador y hacemos la simplificación correspondiente:

$$\frac{\cancel{(m+2)}(m-1)}{2m\cancel{(m+2)}(m-2)}=\frac{m-1}{2m(m-2)}$$

$$=\frac{m-1}{2m^2-4m}$$

Ejercicios

I.

Determine el mínimo común múltiplo entre:

1. $2, 3, 5$
2. $2, 2a, 3a$
3. $3x, 3xy$
4. $2x, 3xy, 2y$
5. m^2, n^2
6. m, mn, n
7. x^2, y^2, xy
8. $1, a, a^2$
9. x^2yz, xy^2z
10. xy^2z, xyz^2
11. $4p^2q, 5pq^2$
12. $5p^6q^6, 6p^5q^5$
13. $a + b, a - b$
14. $2a + 4, a + 2$
15. $3a + 6, a^2 - 4$
16. $6m, 3m + 1, 6m + 2$
17. $x + a, x^2 - a^2, x - a$
18. $1, x + 1, x + 2$
19. $a, b, a + b$
20. $a^2 - b^2, a^2 - 2ab + b^2$
21. $x + 3, x^2 + 5x + 6, x + 2$
22. $x - 3, 2x - 4, x^2 - 5x + 6$
23. $a^2 + a, a^2 - 1, a^2 + 2a + 1$
24. $a + 2, a^2 + 4a + 4, a^2 - 4$
25. $x^2 + 9x + 14, x^2 - 4, x^2 + 5x -14$
26. $a - 1, a^2 - 1, 3a^2 - 3a$
27. $p, p + 5, p^3 - 25p$
28. $2x + 2, 4x + 4, x^2 + 2x + 1$
29. $t - 5p, t^2 - 25p^2, 5t - 25p$
30. $x + y, x^2 + 2xy + y^2, x^2 - y^2$

II.

Efectúe las operaciones indicadas:

1. $\frac{3}{11}-\frac{4}{11}+\frac{15}{11}$
2. $\frac{3}{16}+\frac{5}{16}+\frac{21}{16}+\frac{3}{16}$
3. $\frac{2}{a}-\frac{6}{a}+\frac{9}{a}-\frac{12}{a}$
4. $\frac{3a-1}{5}+\frac{2a-7}{5}-\frac{2}{5}$
5. $\frac{9}{3x-4}+\frac{2}{3x-4}+\frac{1}{3x-4}$
6. $\frac{a+5b}{a+3b}-\frac{2a+b}{a+3b}+\frac{4a+5b}{a+3b}$
7. $\frac{2x-2}{x+6}+\frac{3x-1}{x+6}-\frac{4x-4}{x+6}$
8. $\frac{3x+5}{2x-3}+\frac{5x+8}{2x-3}-\frac{x-4}{2x-3}$
9. $\frac{a^2}{a^2-4}-\frac{4a}{a^2-4}+\frac{4}{a^2-4}$
10. $\frac{7p-3q}{p^2+1}-\frac{6p-4q}{p^2+1}+\frac{2p}{p^2+1}$
11. $\frac{2a(a+4)}{a^2-20a}-\frac{3a(a+6)}{a^2-20a}+\frac{2a(a-5)}{a^2-20a}$
12. $\frac{3a^2}{3a-4b}-\frac{3a(a+4)}{3a-4b}+\frac{4a\cdot 4b}{3a-4b}$
13. $\frac{x^2-7x+1}{x^2+5x+6}-\frac{2x(x-3)}{x^2+5x+6}+\frac{x^2+x+2}{x^2+5x+6}$
14. $\frac{5x^2-7x-1}{x^2+3x}+\frac{2x^2+4x-1}{x^2+3x}-\frac{3x^2-6x-2}{x^2+3x}$
15. $\frac{2x^2+3x+6}{x^2-121}+\frac{x^2-6x+8}{x^2-121}-\frac{3x^2-4x+3}{x^2-121}$

16. $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}-\frac{1}{2}$

17. $a+\frac{a}{2}$

18. $\frac{a}{2}+\frac{a}{3}+\frac{a}{4}$

19. $\frac{2b}{3}-b$

20. $\frac{2x}{5}-\frac{x}{7}+\frac{x}{35}$

21. $\frac{a}{2}+\frac{a}{3}+\frac{a}{3}$

22. $a+\frac{a}{2}-\frac{a}{3}$

23. $\frac{3x}{5}-\frac{2x}{5}+\frac{x}{10}$

24. $\frac{a}{9}-2$

25. $\frac{1}{x}+x$

26. $\frac{1}{x}+\frac{x}{2}$

27. $a-\frac{7a}{4}-\frac{2a}{3}$

28. $\frac{3}{2a}+\frac{4}{3a}+\frac{5}{6a}$

29. $\frac{x-1}{4}+\frac{x-2}{3}+\frac{x}{2}$

30. $\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a}-\frac{2}{a^3}$

31. $\frac{3x}{x-3}+\frac{2x}{2x-6}-\frac{11x}{2}$

32. $\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^2-1}$

33. $\frac{3x-5}{x-1}+\frac{2x-7}{x^2-1}+\frac{x-1}{x+1}$

34. $\frac{2a+b}{3a}-\frac{2a-b}{3b}-\frac{a}{b}$

35. $\frac{2a-1}{3(a-2)}-\frac{2a-2}{a^2-4}-\frac{a}{3}$

36. $\frac{2x}{x+y}-\frac{3x-y}{x-y}+\frac{2x-4y}{x^2-2xy+y^2}$

37. $\frac{a+7}{a-6}-\frac{a-6}{a-5}+\frac{2a-4}{a^2-25}$

38. $\frac{2x}{x^2+3x+2}+\frac{x+4}{x^2-4}+\frac{2x-3}{x^2-x-2}$

39. $\frac{x+1}{x^2-1}+\frac{x-2}{x^2-9}-\frac{x-3}{x^2+5x+6}+\frac{x+4}{x^2-4x+3}$

40. $\frac{3x-2}{2x+8}-\frac{1}{x^2-16}-\frac{2x}{x^2+5x+4}-\frac{6-3x}{x^2-1}$

41. $\frac{2x-1}{x+3}+\frac{3x+1}{x+5}-\frac{5x^2+19x-2}{x^2+8x+15}$

42. $\frac{m}{m+m^2}-\frac{1}{m^2+m^3}-\frac{3m}{m^2-1}$

43. $\frac{m+1}{m-4}+\frac{m+2}{m-5}+\frac{2m}{m^2-9m+20}$

44. $\frac{x}{2x+3}-\frac{2x}{2x-3}+\frac{x-2}{4x^2-9}$

45. $\frac{2}{x^2+7x+12}+\frac{1}{x^2-16}-\frac{3}{x^2-9}$

46. $\frac{x-4}{3x^2+12x}-\frac{2x-4}{x^2+x-12}-\frac{4-2x}{2x^2-6x}$

47. $\frac{3x}{3x^2+15x}+\frac{4x}{x^2+8x+15}+\frac{2x^2-3x}{3x^2+9x}$

48. $\frac{1}{x+2}+\frac{2+x}{x^2+4x+4}-\frac{2-x}{x^2-4}$

49. $\frac{2x}{x^2-2x-24}-\frac{x-2}{x^2-36}+\frac{x-5}{x^2-16}$

50. $\frac{2x}{3x+15}-\frac{x-3}{x^2-25}-\frac{x-12}{6x}+\frac{3x}{x-5}$

III. Efectúe las operaciones indicadas:

1. $\left(\frac{2a}{a-3}-\frac{6a}{a^2-9}\right)\cdot\frac{a+3}{2a}$

2. $\left(1+\frac{1}{x}\right):\left(1-\frac{1}{x}\right)$

3. $\left(a+\frac{ab}{a+b}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{b}{2a}\right)$

Ejercicios

4. $\left(\frac{1}{x}+1\right):\left(\frac{1}{x}-1\right)$

5. $\left(\frac{x-y}{x+y}-1\right)\cdot\left(\frac{1-x}{2y}\right)$

6. $\left(\frac{a}{a+x}+\frac{x}{a+x}\right):\frac{a+x}{a^2+2ax+x^2}$

7. $(a-b):\left(1-\frac{1}{a+b}\right)$

8. $\left(1-\frac{1}{x-1}\right):\left(1+\frac{1}{x+1}\right)$

9. $\frac{a^2+ab}{2a}:\left(1-\frac{1}{a}\right)$

10. $\frac{m^2+mn}{m}:\left(1+\frac{1}{m}\right)$

11. $\frac{2a}{5b}-\frac{3b}{b-1}\cdot\frac{b^2-1}{2}$

12. $\left(\frac{2a}{2+c}\cdot\frac{4-c^2}{4b}\right):\left(\frac{2+c}{2c}-1\right)$

13. $\left(\frac{a+b}{b}-\frac{a-b}{a}\right)\cdot\frac{2ab}{a^2+b^2}$

14. $\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-2\right):\frac{(a-b)^2}{a}$

15. $\left(\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x-1}-1\right)\cdot\left(x^2-1\right)$

16. $\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}$

17. $\dfrac{\frac{3}{2}+\frac{5}{5}}{\frac{2}{15}}$

18. $\dfrac{\frac{a}{2}-\frac{a}{3}}{\frac{a}{2}+\frac{a}{3}}$

19. $\dfrac{\frac{x-1}{x+1}-1}{\frac{x-1}{x+1}+1}$

20. $\dfrac{\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}}{\frac{1}{x^2-4}}$

21. $\dfrac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$

22. $1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}$

23. $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\frac{1}{x}}}$

24. $\dfrac{2+\frac{3x^2-x}{5}}{3-\frac{x^2-1}{10}}$

25. $\dfrac{a-\frac{ab}{a+b}}{1-\frac{b}{a+b}}$

26. $\dfrac{\frac{1}{x}-y}{\frac{1}{x}+y}$

27. $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}}$

28. $\dfrac{\frac{a-b}{a}-\frac{a+b}{a}}{\frac{1}{a}}$

29. $\dfrac{2-\frac{x}{2}}{3-\frac{x}{3}}$

30. $\dfrac{1-\frac{1}{x^2-1}}{1+\frac{1}{x+1}}$

Soluciones

I.

1. 30
2. $6a$
3. $3xy$
4. $6xy$
5. m^2n^2
6. mn
7. x^2y^2
8. a^2
9. x^2y^2z
10. xy^2z^2
11. $20p^2q^2$
12. $30p^6q^6$
13. a^2-b^2
14. $2a+4$
15. $3a^2-12$
16. $18m^2+6m$
17. x^2-a^2
18. x^2+3x+2
19. a^2b+ab^2
20. $(a-b)^2(a+b)$
21. x^2+5x+6
22. $2(x-2)(x-3)$
23. $a(a-1)(a+1)^2$
24. $(a-2)(a+2)^2$
25. $(x+2)(x-2)(x+7)$
26. $3a(a^2-1)$
27. $p(p^2-25)$
28. $4(x+1)^2$
29. $5(t^2-25p^2)$
30. $(x-y)(x+y)^2$

II.

1. $\frac{14}{11}$
2. 2
3. $-\frac{7}{a}$
4. $a-2$
5. $\frac{12}{3x-4}$

6. 3 7. $\frac{x+1}{x+6}$ 8. $\frac{7x+17}{2x-3}$ 9. $\frac{a-2}{a+2}$ 10. $\frac{3p+q}{p^2+1}$

11. 1 12. -4 13. $\frac{3}{(x+2)(x+3)}$ 14. $\frac{4x+3}{x+3}$ 15. $\frac{1}{x-11}$

16. $\frac{29}{30}$ 17. $\frac{3a}{2}$ 18. $\frac{13a}{12}$ 19. $-\frac{b}{3}$ 20. $\frac{2x}{7}$

21. $\frac{7a}{6}$ 22. $\frac{7a}{6}$ 23. $\frac{3x}{10}$ 24. $\frac{a-18}{9}$ 25. $\frac{1+x^2}{x}$

26. $\frac{2+x^2}{2x}$ 27. $-\frac{17a}{12}$ 28. $\frac{11}{3a}$ 29. $\frac{13x-11}{12}$ 30. $\frac{-a^2+a-2}{a^3}$

31. $\frac{41x-11x^2}{2x-6}$ 32. $\frac{z^3-z-1}{z^2(z^2-1)}$ 33. $\frac{4x^2-2x-11}{x^2-1}$

34. $\frac{3ab+b^2-5a^2}{3ab}$ 35. $\frac{-a^3+2a^2+a+4}{3(a^2-4)}$ 36. $\frac{-x^3-3x^2y+5xy^2-2xy+2x^2-4y^2-y^3}{(x+y)(x-y)^2}$

37. $\frac{16a^2-17a-331}{(a^2-25)(a-6)}$ 38. $\frac{5x^2+2x-2}{x^3+x^2-4x-4}$ 39. $\frac{2x^3+17x^2-2x+19}{(x-1)(x^2-9)(x+2)}$

40. $\frac{3x^4-12x^3+11x^2-98x+186}{2(x^2-16)(x^2-1)}$ 41. 0

42. $\frac{-2m^3-m^2-m+1}{m^2(m^2-1)}$ 43. $\frac{2m^2-4m-13}{(m-4)(m-5)}$ 44. $\frac{-2x^2-8x-2}{4x^2-9}$

45. $\frac{-14x+63}{(x^2-16)(x^2-9)}$ 46. $\frac{-2x^2+11x-12}{3x(x+4)(x-3)}$ 47. $\frac{2x^3+22x^2-6x}{3x(x+3)(x+5)}$

48. $\frac{3}{x+2}$ 49. $\frac{2x^3+x^2-68x+148}{(x^2-36)(x^2-16)}$ 50. $\frac{21x^3+76x^2+43x-300}{6x(x^2-25)}$

III.

1. $\frac{a}{a-3}$ 2. $\frac{x+1}{x-1}$ 3. $\frac{a+2b}{2}$ 4. $\frac{1+x}{1-x}$

5. $\frac{x-1}{x+y}$ 6. $a+x$ 7. $\frac{a^2-b^2}{a+b-1}$ 8. $\frac{x^2-x-2}{x^2+x-2}$

9. $\frac{a^2+ab}{2a-2}$ 10. $\frac{m^2+mn}{m+1}$ 11. $\frac{4a-15b^3-15b^2}{10b}$ 12. $\frac{ac}{b}$

13. 2 14. $\frac{1}{b}$ 15. x^2+1 16. $\frac{1}{3}$

17. $\frac{75}{4}$ 18. $\frac{1}{5}$ 19. $-\frac{1}{x}$ 20. 4

21. $-a-b$ 22. $\frac{2x+1}{x+1}$ 23. $-x$ 24. $\frac{6x^2-2x+20}{31-x^2}$

25. a 26. $\frac{1-xy}{1+xy}$ 27. $\frac{x+1}{2x+1}$ 28. $-2b$

29. $\frac{12-3x}{18-2x}$ 30. $\frac{x^2-2}{x^2+x-2}$

Prueba de selección múltiple

Marque la alternativa correcta.

1. Si $a = -1$ y $b = -2$
el valor de $a - ab$ es:

A. -1

B. -2

C. 1

D. -3

E. 2

2. Al reducir la expresión
$\frac{a}{2} - a$ se obtiene:

A. $\frac{a}{2}$

B. $-\frac{a}{2}$

C. $-a$

D. 0

E. $-\frac{1}{2}$

3. Al reducir $2a - a - \frac{a}{2}$
se obtiene:

A. $-\frac{a}{2}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{a}{2}$

D. $\frac{3a}{2}$

E. $-\frac{1}{2}$

4. Si $m = 2$ y $p = 3$ entonces
$m^2 - p^2$ es:

A. 5

B. -5

C. 13

D. -13

E. -2

5. $-3p \cdot 2pq =$

A. $-5p^2q$

B. $6p^2q$

C. $-6pq$

D. $-6p^2q$

E. $6pq^2$

6. Si $p = 1$ y $q = -1$ entonces
$p + q + pq$ es:

A. -1

B. 1

C. 0

D. 2

E. -2

7. Si $p + q = -6$ y $q = 2$ entonces el valor
de p es:

A. 6

B. 8

C. -8

D. -4

E. 4

8. Si $m + 5n = 5$ y $n = -2$ entonces el
valor de m es:

A. 15

B. -5

C. 5

D. -15

E. -10

9. Si $a = -5$ y $a + b = 5$ entonces el valor
de b es:

A. 0

B. 10

C. 5

D. -5

E. -10

10. Si $m = \frac{n}{2}$ y $n = -16$ entonces el valor de m es:

A. 32
B. -32
C. 8
D. -8
E. -4

11. Si $q = -2r$, $r = \frac{s}{2}$ y $s = 9$ entonces el valor de q es:

A. 9
B. -9
C. $\frac{9}{2}$
D. 18
E. $-\frac{9}{2}$

12. La expresión "el doble del cuadrado de a" corresponde a:

A. $(2a)^2$
B. $2(a^2)^2$
C. $2a^2$
D. $(2a^2)^2$
. a2

13. La expresión "el cubo de la mitad de a" corresponde a:

A. $\frac{3a^3}{2}$
B. $\frac{a^3}{2}$
C. $\frac{a^2}{3}$
D. $\left(\frac{a}{2}\right)^3$
E. $\frac{3a}{2}$

14. La expresión "el cuadrado de la diferencia entre a y b" es:

A. $(a-b)^2$
B. a^2-b^2
C. $a-b^2$
D. $2(a-b)$
E. $\frac{a-b}{2}$

15. "El doble del producto entre a y b" corresponde a:

A. $2a^2b$
B. $2ab^2$
C. $2a^2b^2$
D. a^2b^2
E. $2ab$

16. Al reducir $2a - [\,a - (a - 2a)\,]$ se obtiene:

A. 2a
B. 0
C. a
D. 4a
E. $-4a$

17. Al reducir $(a + b) - (a - b)$ se obtiene:

A. 2b
B. $-2b$
C. 2a
D. $-2a$
E. 0

18. Al reducir $(a - b) - (a + b)$ se obtiene:

A. 2a
B. $-2a$
C. 2b
D. $-2b$
E. 0

19. Al reducir $3m - [2m - (3p + m) - p]$ se obtiene:

A. $2m - 4p$
B. $m + 2p$
C. $2m + 4p$
D. $2m + 2p$
E. $-4p$

20. $\frac{1}{2}a + \frac{2}{3}a - \frac{1}{3}a - a$ es igual a:

A. $\frac{a}{6}$
B. $-\frac{a}{6}$
C. $-\frac{a}{2}$
D. $\frac{a}{2}$
E. $-\frac{a}{3}$

21. $a \cdot a^2 \cdot a^{-2} =$

A. a
B. a^{-3}
C. a^{-4}
D. a^3
E. a^5

22. $ab^2 \cdot - ab^2 =$

A. 0
B. $-a^2b^2$
C. $-a^2b^4$

Prueba de selección múltiple

D. a^2b^4
E. $-2a^2b^4$

23. $2m \bullet -3m \bullet -4mp^2 =$
A. $24m^3p^3$
B. $-24m^3p^3$
C. $24m^3p^2$
D. $-24m^3p^2$
E. $-9m^3p^3$

24. $x - [2x - 3y + (3y - 2x)] =$
A. $3x - 6y$
B. $4x - 6y$
C. $4x + 6y$
D. $-x$
E. x

25. $a(a^2 + a^3) =$
A. a^6
B. $2a^6$
C. a^7
D. $a^2 + a^3$
E. $a^3 + a^4$

26. $m(1 + m) - m(1 - m) =$
A. $-m^2$
B. $2m^2$
C. $m - m^2$
D. $m + m^2$
E. 0

27. $a(1 + a + a^2) - a =$
A. $a + a^2$
B. $a + a^3$
C. $a + a^2 + a^3$
D. $a^2 + a^3$
E. $1 + a + a^2$

28. $xy(x + 2y) - 2xy^2 =$
A. $x^2y + xy^2$
B. xy^2
C. x^2y
D. $2xy^2$
E. $-2xy^2$

29. Al factorizar $m^2 - mn$ se obtiene:
A. $mn(m - 1)$
B. $m^2(m - n)$
C. $m(m - n)$
D. $m(1 - n)$
E. $m^2(1 - n)$

30. Al factorizar $4 - p^2$ se obtiene:
A. $(2 - p)^2$
B. $(2 - p)(2 + p)$
C. $(p - 2)(p + 2)$
D. $(4 - p)^2$
E. $2p(2 - p)$

31. La expresión $1 - p^6$ es equivalente a:
A. $(1 - p^3)(1 - p^2)$
B. $p^3(1 - p^2)$
C. $(1 - p^3)(1 + p^3)$
D. $(1 - p^3)^2$
E. $(1 - p^2)^3$

32. Factorice
$m^2 - n^2 - m - n =$
A. $(m - n)(m^2 + n^2)$
B. $(m + n)(m - n - 1)$
C. $(m - n)(m - n - 1)$
D. $(m + n)(m - n + 1)$
E. $(m - n)(m - n + 1)$

33. $(a + b) + (a + b)^2 =$
A. $3(a + b)$
B. $3(a + b)^2$
C. $3(a^2 + b^2)$
D. $a(a + b + 1)$
E. $(a + b)(a + b + 1)$

34. Para que la expresión $9a^2 + 12ab + ...$ sea un cuadrado de binomio falta:
A. $4b^2$
B. $4b$
C. 4
D. b^2
E. 9

35. $\dfrac{abc^2}{abc} =$
A. $\frac{1}{c}$
B. c
C. 1
D. abc
E. $\dfrac{1}{abc}$

36. $\dfrac{a + ab}{ab} =$
A. ab
B. a
C. $\dfrac{a+1}{a}$
D. $\dfrac{b+1}{b}$
E. b

37. $\dfrac{m^2 - n^2}{m - n} =$
A. $m - n$
B. $\dfrac{1}{m - n}$
C. $m + n$
D. $\dfrac{1}{m + n}$
E. $\dfrac{m + n}{m - n}$

38. $\left(a-\frac{1}{a}\right):\frac{a-1}{a}=$

A. $a+1$

B. $a-1$

C. $\frac{1}{a+1}$

D. $\frac{1}{a-1}$

E. $\frac{1}{a^2}$

39. $\frac{3xy^2-3x^2y}{3xy}=$

A. $3(x-y)$

B. $3(y-x)$

C. $y-x$

D. $x-y$

E. $y-3x$

40. $\frac{a^2-b^2}{a^4-b^4}=$

A. $\frac{1}{a^2-b^2}$

B. $\frac{1}{a^2+b^2}$

C. a^2-b^2

D. a^2+b^2

E. $\frac{1}{a-b}$

41. $\frac{x^2-11x+28}{x-7}=$

A. $\frac{x-4}{x-7}$

B. $x-7$

C. $x-4$

D. $x+4$

E. $x+7$

42. $\frac{x+5}{x^2-25}=$

A. $x+5$

B. $x-5$

C. $\frac{1}{x+5}$

D. $\frac{1}{x-5}$

E. $\frac{1}{x^2-5}$

43. $\frac{a^2-4}{a^2+3a+2}=$

A. $\frac{a-2}{a+1}$

B. $\frac{a+1}{a-2}$

C. -2

D. $-\frac{1}{2}$

E. $a-2$

44. $\frac{x^3+y^3}{x^2-xy+y^2}=$

A. $x+y$

B. $\frac{1}{x+y}$

C. $x-y$

D. $\frac{1}{x-y}$

E. $\frac{x+y}{xy}$

45. $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}=$

A. a

B. $(a+b)$

C. $(a+b)^2$

D. 1

E. $\frac{a+b}{a^2+b^2}$

46. $\frac{m}{2n}-\frac{2m}{n}=$

A. $\frac{-3m}{2n}$

B. $\frac{-3m}{n}$

C. $\frac{3m}{n}$

D. $\frac{3m}{2n}$

E. $\frac{-3m}{2}$

47. $\frac{a^{n+1}+a^n}{a^n}=$

A. a^n

B. a

C. $a+1$

D. a^{n+1}

E. a^{n-1}

48. $5^6+5^6+5^6+5^6+5^6=$

A. 5^{30}

B. 5^7

C. 25^6

D. 25^{30}

49. $\frac{3\cdot 4^n-4^{n+1}}{4^n}=$

A. $3-4^{n+1}$

B. 2

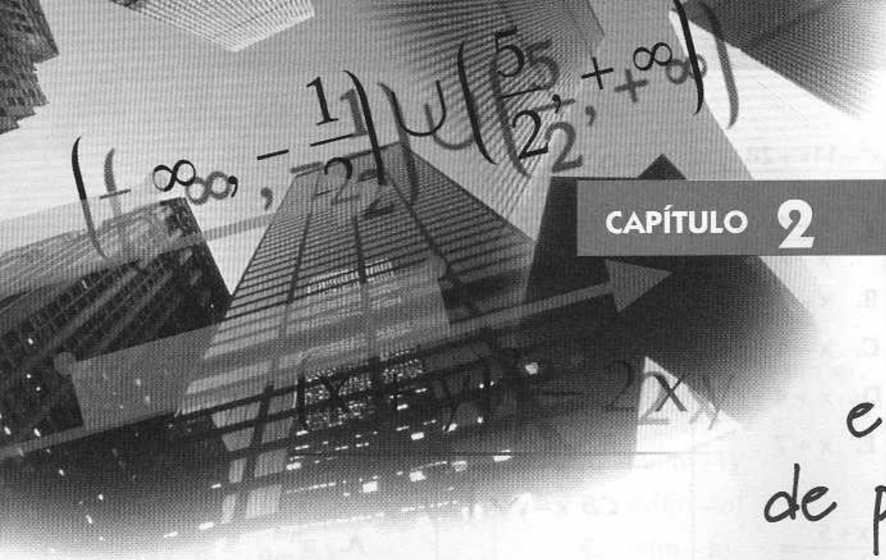
C. 1

D. -1

E. 0

Soluciones

1. D	8. A	15. E	22. C	29. C	36. D	43. A
2. B	9. B	16. B	23. C	30. B	37. C	44. A
3. C	10. D	17. A	24. E	31. C	38. A	45. D
4. B	11. B	18. D	25. E	32. B	39. C	46. A
5. D	12. C	19. C	26. B	33. E	40. B	47. C
6. A	13. D	20. B	27. D	34. A	41. C	48. B
7. C	14. A	21. A	28. C	35. B	42. D	49. D



CAPÍTULO 2

Ecuaciones e inecuaciones de primer grado

2.1 Ecuaciones

Definición: Se llama ecuación a una igualdad que presenta incógnitas y que es verdadera sólo para algunos valores de la incógnita:

Ejemplos:

$$2x - 5 = 3$$
$$4x + 2y - 1 = 0$$
$$5x^2 - 3x + 2 = 0$$
$$ax - by = 3 - ab$$
$$2x^3 - 1 = x^2 + 2$$

• **Observación 1:** La expresión de la izquierda del signo igual se denomina **primer miembro** y la del lado derecho se llama **segundo miembro.**

• **Observación 2:** Una ecuación puede tener una o más incógnitas.

• **Observación 3:** Se llama **grado** de una ecuación al grado del término que presenta el grado más alto, después que se hayan reducido los términos semejantes.

Ejemplos:

$2x - 1 = 5$ es ecuación de primer grado

$x^2 - x = 7 + x$ es ecuación de segundo grado

$x^4 - x + 2 = 0$ es ecuación de cuarto grado

$2xy + 5 - 3x + 2y = 0$ es ecuación de segundo grado

$x^2 + 5x - 1 = (x - 2)^2$ es una ecuación de primer grado

- **Observación 4:** Se llama **raíz o solución** de una ecuación a todo valor de la incógnita que verifique la igualdad.

Resolver una ecuación significa encontrar el o los valores de la o las variables (incógnitas) para que la igualdad sea verdadera.

Para resolver una ecuación debemos tener presente las siguientes propiedades de la igualdad.

- Propiedad 1: Al sumar o restar la misma cantidad en ambos miembros de una igualdad, la igualdad persiste.
- Propiedad 2: Al multiplicar o dividir por una misma cantidad distinta de 0 en ambos miembros de una igualdad, la igualdad persiste.
- Propiedad 3: Al elevar a una potencia distinta de 0 ambos miembros de una igualdad, la igualdad persiste.
- Propiedad 4: Al extraer la misma raíz, en ambos miembros de una igualdad, la igualdad persiste.

2.1.1 Ecuaciones de primer grado con coeficientes enteros

Ejercicios resueltos

1. Resolver la ecuación $3x + 2 = 7$

Debemos despejar x. Para ello restamos 2 en ambos miembros (Propiedad 1).

$$3x + 2 - 2 = 7 - 2$$

efectuamos las operaciones $\quad 3x = 5$

dividimos ambos miembros por 3 (Propiedad 2) $\quad \frac{3x}{3} = \frac{5}{3}$

efectuamos las operaciones $\quad x = \frac{5}{3}$

Verificamos:

$$3x + 2 = 7$$
$$3 \cdot \frac{5}{3} + 2 = 7$$
$$5 + 2 = 7$$
$$7 = 7$$

2. Resolver la ecuación $3 - 2x = 5x - 9$

Despejamos x. Para ello restamos 3 y restamos 5x en ambos miembros.

$$3 - 2x - 3 - 5x = 5x - 9 - 3 - 5x$$

efectuamos las operaciones

$$-2x - 5x = -9 - 3$$
$$-7x = -12$$

multiplicamos por -1

$$7x = 12$$

dividimos por 7 $\frac{7x}{7} = \frac{12}{7}$

$$x = \frac{12}{7}$$

Verificamos: $3 - 2x = 5x - 9$

$$3 - 2 \cdot \frac{12}{7} = 5 \cdot \frac{12}{7} - 9$$

$$3 - \frac{24}{7} = \frac{60}{7} - 9$$

$$\frac{21}{7} - \frac{24}{7} = \frac{60}{7} - \frac{63}{7}$$

$$\frac{-3}{7} \equiv \frac{-3}{7}$$

3. Resolver la ecuación $2(x-1) = 3(x+2) - 5(x+3)$

Primero resolvemos los paréntesis y reducimos términos semejantes.

$$2x - 2 = 3x + 6 - 5x - 15$$

$$2x - 2 = -2x - 9$$

sumamos 2 y sumamos 2x en ambos miembros

$$2x - 2 + 2 + 2x = -2x - 9 + 2 + 2x$$

$$4x = -7$$

dividiendo ambos miembros por 4

$$\frac{4x}{4} = \frac{-7}{4}$$

$$x = -\frac{7}{4}$$

Verificamos:

$$2(x-1) = 3(x+2) - 5(x+3)$$

$$2\left(-\frac{7}{4} - 1\right) = 3\left(-\frac{7}{4} + 2\right) - 5\left(-\frac{7}{4} + 3\right)$$

$$2 \cdot \frac{-11}{4} = 3 \cdot \frac{1}{4} - 5 \cdot \frac{5}{4}$$

$$-\frac{22}{4} = \frac{3}{4} - \frac{25}{4}$$

$$-\frac{22}{4} \equiv -\frac{22}{4}$$

4. Resolver la ecuación

$$2x^2 - 2(x+1)(x-1) = (x-3)^2 - (x+2)(x-5) + 1$$

Primero resolvemos paréntesis y reducimos términos semejantes.

$$2x^2 - 2x^2 + 2 = x^2 - 6x + 9 - x^2 + 3x + 10 + 1$$

$$2 = -3x + 20$$

restamos 2 y sumamos 3x en ambos miembros

$$2 - 2 + 3x = -3x + 20 - 2 + 3x$$
$$3x = 18$$

dividimos por 3 en ambos miembros

$$\frac{3x}{3} = \frac{18}{3}$$
$$x = 6$$

Verificamos:

$$2x^2 - 2(x + 1)(x - 1) = (x - 3)^2 - (x + 2)(x - 5) + 1$$
$$2(6)^2 - 2(6 + 1)(6 - 1) = (6 - 3)^2 - (6 + 2)(6 - 5) + 1$$
$$2 \cdot 36 - 2 \cdot 7 \cdot 5 = 3^2 - 8 \cdot 1 + 1$$
$$72 - 70 = 9 - 8 + 1$$
$$2 \equiv 2$$

Ejercicios

1. $x + 3 = 5$
2. $2x - 5 = 7$
3. $5 - 2x = x + 2$
4. $2y + 1 = 3y + 4$
5. $6z - 3 = 5 + 2z$
6. $4x - 5 + x = 3 + 2x + 4$
7. $4 + 2x - x = -3x - 4$
8. $-y + 5y - 3 + 4 = y - 1$
9. $y + 2 = 5y - 4 + 3y - 1$
10. $4y + 9 - y - 2y = 16y + 42$
11. $17y - y + 9 = 32 - 19y + 82$
12. $45x - 33x + 19 = 25x + 17$
13. $z - 12 + 44z = 18 - 15z$
14. $132x + 25 - 33x = -10 - x + 85$
15. $49x - 105 + 16x = 48x - 301 - 8$
16. $405x - 203 + 45x = 102 + 115$
17. $18z - 42 + 15z = 10z - 3 + 32z - 39$
18. $113x + 16 - 14x = -12 + 27x + 19$
19. $15x - 135 + 18x = 45 + 90 - 18x + 15x$
20. $339x + 25 = 5 + 309x + 20$
21. $2(x + 3) = 5(x - 1)$
22. $(2x - 5)\,2 = (3 + x)\,5$
23. $(x + 2) - (3x + 2) = 5(x + 4) + 1$
24. $5(1 - x) + (x - 3)\,4 = (x - 1) - (1 - x)$
25. $2[(3x + 1) - 2(x + 4)] - (3x + 5) = 0$
26. $2x - 3 - (x + 1) = -[x + 3(x + 2)] - (x + 4)$
27. $-3 + x - 5[(2x + 4) - (x + 2)] = x + 2$
28. $2x - 10 - [2x - (x + 3) + 5] = 0$
29. $-[2(2 - y) - (2y - 3)] - 5y = 4(y + 3)$
30. $3 - [5y + 2(y - 1) + 4] = 5 - [2(y - 3) - 3(y - 2)]$
31. $-x + [12x - 3(x + 1) - (3x + 2)] = 15x - 16$
32. $2x - [14x - 2(x + 3) - (2x + 3)] = 16x + 9$
33. $-[2(3x - 3) - (1 + x)] - [5(3 - 2x) - (1 + x)] = 0$

Ejercicios

34. $-[-5+3x-2(x+1)-(x+3)]=[-2x+5-(x+1)](-2)$
35. $2x+\{3x-[5x+2(x-1)-3(4x-5)]+3\}2=0$
36. $5x-\{1+(3x-5)2-[3(x+4)-2x]-(x+5)\}=17$
37. $3\{x+1-2(x+3)\}-\{6x-[2x+3(x-1)]+1\}3=x+1$
38. $1-\{-3[2x-(x+4)-(6-2x)+5]-3x\}+2=0$
39. $4(x+2)-\{3(x-1)-[5(1-x)-6x]\}2=[3(x-4)+1]2$
40. $26-\{32x-[1-x+2(18x-3)+6x]\}=12x-4$
41. $(x+1)^2=12+(x-5)^2$
42. $(x+3)(x-1)=5+(x-2)^2$
43. $(3-x)(x+4)+16=12x-(x+3)^2$
44. $(x-1)(x+1)-(x+2)(x+3)=5x-1$
45. $2(y-2)(y+2)-(y-5)(y+3)=(y-1)^2+2$
46. $y(2y-3)+(y-1)^2=2y(y-4)+3+y^2$
47. $3x(x-5)-(x-3)(x+3)=2(x+5)^2$
48. $(2x-5)(4x+3)-(2x-1)^2=3x^2+(x+4)(x-4)$
49. $-\{-[-(x+5)^2+(x+1)(x-1)]+(2x-3)(2x+3)\}=-(2x+1)^2$
50. $x(x+5)^2+2x^3-4x^2=3x(1+x)^2+22$

Soluciones

1. $x=2$	2. $x=6$	3. $x=1$	4. $y=-3$	5. $z=2$
6. $x=4$	7. $x=-2$	8. $y=-\frac{2}{3}$	9. $y=1$	10. $y=-\frac{11}{5}$
11. $y=3$	12. $x=\frac{2}{13}$	13. $z=\frac{1}{2}$	14. $x=\frac{1}{2}$	15. $x=-12$
16. $x=\frac{14}{15}$	17. $z=0$	18. $x=-\frac{1}{8}$	19. $x=\frac{15}{2}$	20. $x=0$
21. $x=\frac{11}{3}$	22. $x=-25$	23. $x=-3$	24. $x=-\frac{5}{3}$	25. $x=-19$
26. $x=-1$	27. $x=-3$	28. $x=12$	29. $y=-\frac{19}{5}$	30. $y=-\frac{1}{2}$
31. $x=\frac{11}{10}$	32. $x=0$	33. $x=\frac{7}{6}$	34. $x=3$	35. $x=\frac{10}{9}$
36. $x=-9$	37. $x=-4$	38. $x=1$	39. $x=\frac{23}{15}$	40. $x=\frac{25}{3}$
41. $x=3$	42. $x=2$	43. $x=\frac{37}{7}$	44. $x=-\frac{3}{5}$	45. $y=-1$
46. $y=\frac{2}{3}$	47. $x=-\frac{41}{35}$	48. $x=0$	49. $x=-\frac{8}{3}$	50. $x=1$

2.1.2 Ecuaciones de primer grado con coeficientes fraccionarios

Ejercicios resueltos

1. Resolver la ecuación

$$0{,}5x - 0{,}7 + 0{,}3x - 1{,}5 = 0{,}6x - 4 + 1{,}7x$$

Reducimos los términos semejantes

$$0{,}8x - 2{,}2 = 2{,}3x - 4$$

sumamos 2,2 y restamos 2,3x

$$0{,}8x - 2{,}2 + 2{,}2 - 2{,}3x = 2{,}3x - 4 + 2{,}2 - 2{,}3x$$

$$-1{,}5x = -1{,}8$$

dividimos por – 1,5

$$\frac{-1{,}5x}{-1{,}5} = \frac{-1{,}8}{-1{,}5}$$

$$x = 1{,}2$$

Verificamos :

$$0{,}5x - 0{,}7 + 0{,}3x - 1{,}5 = 0{,}6x - 4 + 1{,}7x$$

$$0{,}5 \cdot 1{,}2 - 0{,}7 + 0{,}3 \cdot 1{,}2 - 1{,}5 = 0{,}6 \cdot 1{,}2 - 4 + 1{,}7 \cdot 1{,}2$$

$$0{,}6 - 0{,}7 + 0{,}36 - 1{,}5 = 0{,}72 - 4 + 2{,}04$$

$$-1{,}24 \equiv 1{,}24$$

2. Resolver la ecuación

$$\frac{1}{3}x + \frac{3}{4} - \frac{5}{6}x + 2 = \frac{1}{5}x - 3$$

El mínimo común múltiplo de los denominadores es 60.

Multiplicamos ambos miembros por 60 para dejar todos los coeficientes enteros.

$$\frac{1}{3}x \cdot 60 + \frac{3}{4} \cdot 60 - \frac{5}{6}x \cdot 60 + 2 \cdot 60 = \frac{1}{5}x \cdot 60 - 3 \cdot 60$$

$$20x + 45 - 50x + 120 = 12x - 180$$

reducimos términos semejantes

$$-30x + 165 = 12x - 180$$

restamos 165 y restamos 12x en ambos miembros de la ecuación.

$$-30x - 12x = -180 - 165$$

$$-42x = -345$$

dividimos por – 42

$$x = \frac{-345}{-42}$$

simplificamos por -3

$$x = \frac{115}{14}$$

Verificamos: $\frac{1}{3}x + \frac{3}{4} - \frac{5}{6}x + 2 = \frac{1}{5}x - 3$

$$\frac{1}{3} \bullet \frac{115}{14} + \frac{3}{4} - \frac{5}{6} \bullet \frac{115}{14} + 2 = \frac{1}{5} \bullet \frac{115}{14} - 3$$

$$\frac{115}{42} + \frac{3}{4} - \frac{575}{84} + 2 = \frac{23}{14} - 3$$

$$\frac{230}{84} + \frac{63}{84} - \frac{575}{84} + \frac{168}{84} = \frac{138}{84} - \frac{252}{84}$$

$$-\frac{114}{84} = -\frac{114}{84}$$

3. Resolver la ecuación

$$\frac{3-x}{5} - \frac{2x+1}{3} = 2 - \frac{x+2}{10}$$

Para eliminar los denominadores multiplicamos por el mínimo común múltiplo de 5 , 3 y 10, que es 30

$$\frac{3-x}{5} \cdot 30 - \frac{2x+1}{3} \cdot 30 = 2 \cdot 30 - \frac{x+2}{10} \cdot 30$$

$$(3-x)\,6 - (2x+1)\,10 = 60 - (x+2)\,3$$

Resolvemos los paréntesis y reducimos términos semejantes.

$$18 - 6x - 20x - 10 = 60 - 3x - 6$$

$$-26x + 8 = 54 - 3x$$

sumamos 3x y restamos 8

$$-26x + 3x = 54 - 8$$

$$-23x = 46$$

dividimos por -23

$$x = \frac{46}{-23}$$

$$x = -2$$

Verificamos: $\frac{3-x}{5} - \frac{2x+1}{3} = 2 - \frac{x+2}{10}$

$$\frac{3+2}{5} - \frac{-4+1}{3} = 2 - \frac{-2+2}{10}$$

$$\frac{5}{5} + \frac{3}{3} = 2 - 0$$

$$2 \equiv 2$$

Ejercicios

1. $\frac{3}{4}x=2$

2. $\frac{x}{7}=1$

3. $\frac{2x}{5}=4$

4. $\frac{x}{8}=0$

5. $\frac{x}{4}+\frac{1}{3}=4$

6. $\frac{2x}{5}-\frac{3x}{4}+\frac{x}{10}=-\frac{1}{4}$

7. $\frac{5x}{3}+\frac{2x}{5}=\frac{x}{4}+5\frac{9}{20}$

8. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}=1$

9. $-\frac{x}{3}+\frac{3x}{2}-\frac{1}{5}=x-\frac{31}{30}$

10. $\frac{7x}{4}-\frac{5x}{3}+\frac{6x}{5}+\frac{5}{6}=-\frac{9}{20}$

11. $\frac{3}{4}-\frac{8x}{3}+\frac{7x}{5}+\frac{3x}{2}=\frac{7}{12}$

12. $\frac{3x}{4}-\frac{x}{2}+\frac{1}{8}=\frac{x}{3}+\frac{1}{12}$

13. $\frac{4x}{5}+\frac{3x}{4}-x+\frac{11}{30}=0$

14. $\frac{1}{10}+\frac{x}{5}+\frac{2x}{7}=\frac{3x}{10}-\frac{2}{175}$

15. $\frac{2x}{3}-\frac{6x}{5}+\frac{3x}{4}+\frac{5x}{2}=1-\frac{77}{240}$

16. $0{,}5x+3{,}2x-5{,}4x+0{,}9x+1{,}6=0$

17. $(x+3{,}5)-(4{,}2-2{,}3x)-(4{,}8x+2{,}1)=-1{,}3$

18. $0{,}7x+0{,}3x-0{,}1x+2{,}6x+10{,}5=0$

19. $\frac{3}{4}\,x+0{,}5x-1=\frac{3}{5}x-0{,}3x+0{,}9$

20. $\frac{5}{4}x+\frac{2}{5}x+0{,}6=0{,}5x+1{,}3x$

21. $\frac{x-3}{4}-\frac{1}{3}=\frac{x-1}{3}+\frac{1}{8}$

22. $\frac{3-x}{4}+\frac{2x-1}{5}+1=\frac{x+1}{3}+\frac{2x+6}{4}+\frac{2}{5}$

23. $\frac{2x-3}{4}-\frac{4x-1}{3}+1=\frac{3x+2}{3}-\frac{x-1}{2}+\frac{17}{300}$

24. $\frac{8-2x}{3}-\frac{x+3}{6}-\frac{26}{27}=\frac{3x+2}{3}-\frac{1-x}{9}$

25. $\frac{4-3x}{5}+\frac{2x-3}{15}+\frac{1}{2}=\frac{3x}{10}-\frac{1}{20}$

26. $\frac{x-1}{3}+\frac{3x+2}{7}-\frac{5x-2}{3}=-\frac{11}{105}$

27. $\frac{1}{2}+\frac{4x-3}{4}-\frac{5x+2}{9}+1=\frac{3x+5}{12}+\frac{6x+1}{3}-\frac{2}{9}$

28. $4x-\frac{2x+1}{3}-3=3x-\frac{x-1}{5}+\frac{11}{15}$

29. $\left(3-\frac{x}{4}\right)+\left(x-\frac{x}{3}\right)+7=\left(1-\frac{3x}{2}\right)-\frac{7}{12}$

30. $\frac{3-2x}{5}+\frac{2+\frac{x}{2}}{3}+\frac{11}{60}=\frac{5-\frac{4x}{3}}{4}$

31. $3\left(\frac{x+1}{2}\right)-4\left(\frac{x-5}{3}\right)-13=\frac{5-2x}{4}-\frac{4-x}{3}+\frac{11}{12}$

32. $\frac{12-x}{6}-\frac{4-\frac{2x}{5}}{9}+\frac{13+\frac{x}{4}}{18}=\frac{1}{9}$

33. $\frac{x+\frac{2}{3}}{5}-\frac{8x-\frac{4}{5}}{3}+\frac{5}{6}=0$

34. $(x-5)\,(x+5)-\left(x+\frac{x}{4}\right)=\frac{2}{3}\left(3x-\frac{x}{2}\right)+x^2-27\frac{11}{12}$

35. $\frac{3}{4}\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{4}{3}\left(\frac{x}{3}-\frac{5}{4}\right)=2+\frac{5}{3}\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{4}\right)$

36. $\frac{5-3x}{3}\cdot\frac{3}{4}-\frac{\frac{3}{4}-\frac{2x}{8}}{30}+\frac{207}{120}=8\,\frac{1}{2}-\frac{4-\frac{x}{4}}{5}$

Ejercicios

37. $\frac{12-13x}{3}+\frac{5-15x}{4}+\frac{17-21x}{3}=-3\frac{1}{156}$

38. $\frac{5-4x}{\frac{3}{2}}+\frac{3+2x}{\frac{4}{5}}-\frac{5-3x}{\frac{1}{2}}=67\frac{1}{12}$

39. $\frac{\frac{3x}{4}+\frac{1}{2}}{5}-\frac{\frac{4x}{5}-\frac{2}{3}}{4}=\frac{\frac{4}{5}(1-x)}{2}-\frac{\frac{2}{3}(x+9)}{3}+\frac{3}{20}$

40. $\frac{4}{3}\left(\frac{x+1}{2}\right)-\frac{13}{90}-\frac{3}{5}\left(\frac{3-x}{6}\right)+\frac{1}{4}=\frac{5}{72}-\frac{2}{9}\left(\frac{2x+5}{4}\right)$

41. $\frac{18}{15}\left(\frac{1-3x}{3}\right)+\frac{42}{45}\left(\frac{5+2x}{3}\right)=\frac{25}{30}\left(\frac{3x+9}{8}\right)-\frac{61}{80}\left(\frac{x+1}{3}\right)$

42. $\frac{13(x+2)}{7}+\frac{14(x-3)}{5}-\frac{27(x+4)}{4}+33\frac{143}{560}=0$

43. $\frac{5x-7}{3}-\frac{6x+2}{5}=\frac{27x-9}{6}-\frac{12x+7}{15}+2\frac{2}{15}$

44. $\frac{(x+2)(x+3)}{2}-\frac{(2x-1)(5x+3)}{20}=-14$

45. $\frac{(2x+5)^2}{5}+\frac{(x+1)(x-1)}{3}-\frac{17(x-1)(x+2)}{15}=12\frac{2}{3}$

46. $\frac{(3x-1)(x+4)}{3}-\frac{(2x-5)^2}{4}=\frac{4x+9}{12}$

47. $\frac{x(x+5)^2}{4}-\frac{(x-1)^3}{3}=\frac{(7x+3)(x-1)}{2}+\frac{51}{2}+\frac{64-x^3}{12}$

48. $\frac{(x+1)^3}{5}-\frac{(x-1)^3}{5}=\frac{x+7}{2}+\frac{27}{10}+\frac{(x+2)(6x-1)}{5}$

49. $\frac{(2x-1)^2}{3}+\frac{(x-2)^3}{4}-\frac{(x+1)^2}{4}=\frac{1-5x^2}{12}+\frac{x^3-1}{4}-\frac{7}{12}$

50. $\frac{(x-2)^2}{5}+\frac{(x-3)^2}{4}=\frac{9x^2+3x-5}{20}-\frac{81}{20}$

Soluciones

1. $x=\frac{8}{3}$	2. $x=7$	3. $x=10$	4. $x=0$	5. $x=\frac{44}{3}$
6. $x=1$	7. $x=3$	8. $x=3$	9. $x=-5$	10. $x=-1$
11. $x=-\frac{5}{7}$	12. $x=\frac{1}{2}$	13. $x=-\frac{2}{3}$	14. $x=-\frac{3}{5}$	15. $x=\frac{1}{4}$
16. $x=2$	17. $x=-1$	18. $x=-3$	19. $x=2$	20. $x=4$
21. $x=-\frac{21}{2}$	22. $x=-1$	23. $x=-\frac{12}{25}$	24. $x=\frac{1}{3}$	25. $x=\frac{3}{2}$
26. $x=\frac{4}{5}$	27. $x=0$	28. $x=8$	29. $x=-5$	30. $x=-2$
31. $x=17$	32. $x=20$	33. $x=\frac{1}{2}$	34. $x=1$	35. $x=\frac{3}{68}$
36. $x=-6$	37. $x=\frac{12}{13}$	38. $x=12$	39. $x=-3$	40. $x=-\frac{245}{316}$
41. $x=2$	42. $x=\frac{3}{4}$	43. $x=-\frac{87}{97}$	44. $x=-7$	45. $x=2$
46. $x=1$	47. $x=4$	48. $x=-2$	49. $x=1$	50. $x=3$

2.1.3 Ecuaciones fraccionarias de primer grado

Se denominan ecuaciones fraccionarias aquellas que presentan incógnita en el denominador.

Para resolverlas usamos la técnica de multiplicar por el mínimo común múltiplo de las expresiones que son denominadores o simplificar al máximo las fracciones.

Debemos poner especial atención en que la solución que aparezca no vaya a indeterminar alguna expresión, es decir, no vaya a hacer cero algún denominador. En un caso así la ecuación no tiene solución. Ver ejemplo 5.

Ejercicios resueltos

1. $$\frac{1}{x}+\frac{3}{2x}=\frac{1}{3x}+\frac{13}{12}$$

Multiplicamos por el mínimo común múltiplo (m.c.m.) que es $12x$

$$12+18=4+13x$$

despejando x

$$13x=26$$

$$x=2$$

Verificamos:

$$\frac{1}{x}+\frac{3}{2x}=\frac{1}{3x}+\frac{13}{12}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{1}{6}+\frac{13}{12}$$

$$\frac{5}{4}=\frac{15}{12}$$

$$\frac{5}{4}=\frac{5}{4}$$

2. Resolver la ecuación:

$$\frac{1}{x+3}-\frac{3}{2x-1}=\frac{5}{2x^2+5x-3}$$

Primero tratamos de factorizar al máximo las expresiones del denominador. Observamos que $2x^2+5x-3=(x+3)(2x-1)$

Así, el m.c.m. es $2x^2+5x-3$

multiplicamos ambos miembros de la ecuación por el m.c.m.

$$(2x-1)-3(x+3)=5$$

$$\frac{4x^2+10x-6}{2}$$

$$\frac{(2x+6)(2x-1)}{2}$$

$$\frac{2(x+3)(2x-1)}{2}$$

Ejercicios resueltos

resolvemos paréntesis y reducimos términos semejantes

$$2x - 1 - 3x - 9 = 5$$
$$-x = 15$$
$$x = -15$$

Verificamos:

$$\frac{1}{x+3} - \frac{3}{2x-1} = \frac{5}{2x^2+5x-3}$$

$$\frac{1}{-15+3} - \frac{3}{2(-15)-1} = \frac{5}{2(-15)^2+5(-15)-3}$$

$$\frac{1}{-12} - \frac{3}{-31} = \frac{5}{372}$$

$$\frac{5}{372} = \frac{5}{372}$$

3. Resolver la ecuación

$$\frac{2x-1}{x+2} - \frac{x+3}{x+5} = \frac{x^2-3}{x^2+7x+10}$$

Primero factorizamos todas las expresiones posibles de factorizar

$$\frac{2x-1}{x+2} - \frac{x+3}{x+5} = \frac{x^2-3}{(x+2)(x+5)}$$

m.c.m. : (x+2)(x+5). Multiplicamos toda la ecuación por el m.c.m.

$$(2x-1)(x+5) - (x+3)(x+2) = x^2 - 3$$

desarrollamos los paréntesis y reducimos términos semejantes.

$$(2x^2 + 9x - 5) - (x^2 + 5x + 6) = x^2 - 3$$
$$2x^2 + 9x - 5 - x^2 - 5x - 6 = x^2 - 3$$
$$4x = 8$$
$$x = 2$$

Verificamos:

$$\frac{2x-1}{x+2} - \frac{x+3}{x+5} = \frac{x^2-3}{x^2+7x+10}$$

$$\frac{2 \cdot 2-1}{2+2} - \frac{2+3}{2+5} = \frac{2^2-3}{2^2+7 \cdot 2+10}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{5}{7} = \frac{1}{28}$$

$$\frac{1}{28} = \frac{1}{28}$$

4. Resolver la ecuación

$$\frac{4x+2}{12} - \frac{3x+1}{2x-3} = \frac{5x-1}{4} - \frac{11x^2 - \frac{1}{2}}{12x-18}$$

Vemos que $12x - 18 = 6(2x-3)$ y que 4 está contenido en 12, luego, el m.c.m. de los denominadores es $12(2x-3)$.

Multiplicamos por este m.c.m.

$$(4x+2)(2x-3) - (3x+1) \cdot 12 = (5x-1)(2x-3) \cdot 3 - (11x^2 - \tfrac{1}{2}) \cdot 2$$

Resolvemos los paréntesis y reducimos términos semejantes.

$$(8x^2 - 8x - 6) - (36x + 12) = (30x^2 - 51x + 9) - 22x^2 + 1$$
$$\cancel{8x^2} - 8x - 6 - 36x - 12 = \cancel{30x^2} - 51x + 9 - \cancel{22x^2} + 1$$
$$7x = 28$$
$$x = 4$$

Verificamos:

$$\frac{4x+2}{12} - \frac{3x+1}{2x-3} = \frac{5x-1}{4} - \frac{11x^2 - \frac{1}{2}}{12x-18}$$

$$\frac{16+2}{12} - \frac{12+1}{8-3} = \frac{20-1}{4} - \frac{11 \cdot 16 - \frac{1}{2}}{12 \cdot 4 - 18}$$

$$\frac{18}{12} - \frac{13}{5} = \frac{19}{4} - \frac{176 - \frac{1}{2}}{30}$$

$$\frac{3}{2} - \frac{13}{5} = \frac{19}{4} - \frac{176}{30} + \frac{1}{60}$$

$$-\frac{11}{10} \equiv -\frac{11}{10}$$

5. Resolver la ecuación

$$\frac{2(2-x)}{x-1} + \frac{3-x}{x+1} + 3 = \frac{4}{x^2-1}$$

Para eliminar los denominadores multiplicamos por el m. c. m / $x^2 - 1$

$$2\ (2-x)(x+1) + (3-x)(x-1) + 3\ (x^2-1) = 4$$
$$4x + 4 - \cancel{2x^2} - 2x + 3x - 3 - \cancel{x^2} + x + \cancel{3x^2} - 3 = 4$$

reducimos términos semejantes

$$6x = 6$$
$$x = 1$$

pero ocurre que si $x = 1$ se indeterminan dos de los términos de la ecuación: $\frac{2(2-x)}{x-1}$ y $\frac{4}{x^2-1}$; por lo tanto, la ecuación planteada no tiene solución.

Ejercicios

1. $\frac{1}{x} = 3$
2. $\frac{3}{x} = \frac{1}{2}$
3. $\frac{4}{5x} - 3 = 0$
4. $\frac{1}{2x+1} = 3$
5. $\frac{2}{x-1} - \frac{3}{x+3} = 0$
6. $\frac{1}{2(x-5)} + \frac{3}{4(3-2x)} = 0$
7. $\frac{-3}{5x-1} = \frac{4}{6-7x}$
8. $\frac{1}{2x} + \frac{3}{5x} = \frac{11}{x^2}$
9. $\frac{3}{4x} - \frac{6}{5x} - \frac{3}{x^2} = 0$
10. $x + 3 = \frac{2x^2}{2x-1}$
11. $\frac{4}{3x-1} - \frac{5}{2x+3} = \frac{3}{6x^2+7x-3}$
12. $\frac{2}{3(x+4)} + \frac{1}{4(x-5)} = \frac{x+4}{6x^2-6x-120}$
13. $\frac{1}{3x-2} - \frac{4}{5x+1} = \frac{3x-1}{15x^2-7x-2}$
14. $\frac{3}{x+2} - \frac{4}{x-2} = \frac{6}{x^2-4}$
15. $\frac{2(2-x)}{x-1} + \frac{3-x}{x+1} + 3 = \frac{1}{x^2-1}$

16. $\dfrac{6}{3x-5}+\dfrac{3}{x^2-2x+1}=\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{5}{3x^2-8x+5}$

17. $\dfrac{2x+3}{5x-1}=\dfrac{6x+4}{15x+2}$

18. $\dfrac{3-x}{x+1}+\dfrac{2}{x^2-1}=\dfrac{2(x-2)}{x-1}-3$

19. $\dfrac{4x-7}{12x+3}=\dfrac{x-16}{3x+5}$

20. $3-\dfrac{16}{x^2-1}+\dfrac{2(2-x)}{x-1}=\dfrac{x-3}{x+1}$

21. $\dfrac{4x-5}{3x+2}-\dfrac{8x-3}{6x+5}=0$

22. $\dfrac{3-5x}{1-3x}-\dfrac{5(x+2)}{3x+20}=0$

23. $\dfrac{x^3-125}{x^2-2x-15}-\dfrac{x-1}{x+3}=1+x$

24. $\dfrac{x^2+2x+1}{x+1}+\dfrac{x-1}{x+3}=\dfrac{x^3}{x^2-2x-15}+\dfrac{3}{2x^2-4x-30}$

25. $\dfrac{x}{3x+2}+\dfrac{x+1}{2x-1}=\dfrac{5x^2+x+4}{6x^2+x-2}$

26. $\dfrac{2}{3x-3}+\dfrac{3}{4x-4}-\dfrac{1}{2x-2}+\dfrac{5}{6x-6}=-\dfrac{7}{16}$

27. $\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{2}{3x-5}=\dfrac{x-13}{3x^2+x-10}$

28. $\dfrac{x}{2x-6}+\dfrac{1}{6x+3}=\dfrac{4x^2+3x-1}{8x^2-20x-12}$

29. $\dfrac{6x^3}{4x^3-12x^2-x+3}-\dfrac{x+2}{4x^2-1}=\dfrac{3x^2-1}{2x^2-7x+3}+\dfrac{\frac{3}{2}x+1}{2x^2-5x-3}$

30. $\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{\frac{3}{x}-\frac{1}{3}}=\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{2}{5+3x}}$

31. $\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{3}-\frac{3}{x}}=\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{2}{3x+5}}$

32. $\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}}=x$

33. $\dfrac{2+\dfrac{2}{2+\frac{2}{x}}}{2-\dfrac{2}{2-\frac{2}{x}}}=3$

34. $\dfrac{\frac{1}{3}-\dfrac{1}{1-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{4}+\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}}=-\dfrac{8}{15}$

35. $\dfrac{\frac{2}{3x}-\frac{1}{6x}}{\frac{1}{2x}-\frac{4}{6x}}=\dfrac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$

36. $\dfrac{2(2-x)}{x-1}+\dfrac{3-x}{x+1}+3=\dfrac{8}{1-x^2}$

37. $\dfrac{x^2+1}{x+2}-\dfrac{3}{2}=\dfrac{x^2+3}{x-2}-\dfrac{11x^2}{2x^2-8}$

38. $\dfrac{5x-1}{2x-6}-\dfrac{12x^2}{4x^2-11x-3}=\dfrac{3-2x}{4x+1}$

39. $\dfrac{12x^2-17}{4x^2-11x-3}=\dfrac{5x-1}{2x-6}+\dfrac{2x-3}{4x+1}$

40. $\dfrac{x}{2x+3}+\dfrac{2x}{x-5}-\dfrac{5x^2+125}{2x^2-7x-15}=0$

Soluciones

1. $x = \frac{1}{3}$	2. $x = 6$	3. $x = \frac{4}{15}$	4. $x = -\frac{1}{3}$	5. $x = 9$
6. $x = -9$	7. $x = 14$	8. $x = 10$	9. $x = -\frac{20}{3}$	10. $x = \frac{3}{5}$
11. $x = 2$	12. $x = 4$	13. $x = 1$	14. $x = -20$	15. $x = \frac{1}{2}$
16. $x = \frac{4}{3}$	17. $x = -\frac{2}{7}$	18. $x = 0$	19. $x = -\frac{13}{188}$	20. $x = 3$
21. $x = -\frac{19}{17}$	22. $x = \frac{25}{33}$	23. No tiene solución	24. $x = -\frac{1}{2}$	25. $x = \frac{2}{3}$
26. $x = -3$	27. $x = -\frac{1}{3}$	28. $x = 9$	29. Ecuación de 2° grado	30. $x = -2\frac{13}{16}$
31. $x = -\frac{45}{16}$	32. $x = -\frac{1}{2}$	33. $x = -2$	34. $x = -\frac{7}{23}$	35. $x = -\frac{1}{2}$
36. No tiene solución	37. $x = -1$	38. $x = 1$	39. No tiene solución	40. $x = 125$

2.1.4 Ecuaciones literales de primer grado

Se denominan ecuaciones literales de primer grado aquellas que presentan expresiones literales y/o numéricas además de la incógnita. Generalmente para la incógnita se utilizan las letras x, y o z y para los coeficientes u otros términos, las letras a, b, c, m, n, s, t . . .

Resolver una ecuación literal es despejar una de las letras que en ella intervienen, generalmente x, y o z en función de las otras y/o los números que aparezcan. Para ello se usan los mismos procedimientos que se utilizan para resolver ecuaciones numéricas.

Ejercicios resueltos

1. Resolver la ecuación

$a(x + 1) = a(a + 1) - x$

Resolvemos los paréntesis y reducimos términos semejantes

$ax + a = a^2 + a - x$

trasponemos términos dejando todos los que contengan x en el primer miembro y los que no la contienen en el segundo.

$ax + x = a^2 + a - a$

$ax + x = a^2$

factorizamos por x y dividimos toda la expresión por (a + 1)

$x(a + 1) = a^2$

$$x = \frac{a^2}{a+1}$$

Ejercicios resueltos

Verificamos:

$$a(x+1) = a(a+1) - x$$
$$a\left(\frac{a^2}{a+1}+1\right) = a(a+1) - \frac{a^2}{a+1}$$
$$\frac{a^3}{a+1} + a = a^2 + a - \frac{a^2}{a+1} \quad / \cdot a+1$$
$$a^3 + a(a+1) = (a^2+a)(a+1) - a^2$$
$$a^3 + a^2 + a = a^3 + a^2 + \cancel{a^2} + a - \cancel{a^2}$$
$$a^3 + a^2 + a \equiv a^3 + a^2 + a$$

2. Resolver la ecuación

$$x + b(bx+1) = (1+b) - b(2x-1)$$

Resolvemos los paréntesis y reducimos términos semejantes.

$$x + b^2x + b = 1 + b - 2bx + b$$
$$x + b^2x + b = 1 + 2b - 2bx$$

trasponemos los términos agrupando los que contienen x en el primer miembro y los que no la contienen en el segundo.

$$x + b^2x + 2bx = 1 + 2b - b$$

factorizamos ambos miembros

$$x(1 + 2b + b^2) = 1 + b$$
$$x(1+b)^2 = 1 + b$$

dividimos ambos miembros por $(1+b)^2$

$$x = \frac{1+b}{(1+b)^2}$$
$$x = \frac{1}{1+b}$$

Verificamos:

$$x + b(bx+1) = (1+b) - b(2x-1)$$
$$\frac{1}{1+b} + b\left(\frac{b}{1+b}+1\right) = (1+b) - b\left(\frac{2}{1+b}-1\right)$$
$$\frac{1}{1+b} + \frac{b^2}{1+b} + \cancel{b} = 1 + b - \frac{2b}{1+b} + \cancel{b}$$
$$\frac{1+b^2}{1+b} = \frac{(1+b)^2-2b}{1+b}$$
$$\frac{1+b^2}{1+b} \equiv \frac{1+b^2}{1+b}$$

3. Resolver la ecuación

$$\frac{1+x}{b} + \frac{1+x}{a} = \frac{1+a}{b} + \frac{1-b}{a}$$

Eliminamos los denominadores multiplicando la ecuación completa por el m.c.m. = ab

$$a(1+x) + b(1+x) = a(1+a) + b(1-b)$$

resolvemos paréntesis y trasponemos términos

$$\cancel{a} + ax + \cancel{b} + bx = \cancel{a} + a^2 + \cancel{b} - b^2$$
$$ax + bx = a^2 - b^2$$

factorizamos por x y dividimos por $a + b$

$$x(a+b) = a^2 - b^2$$

$$x = \frac{(a+b)(a-b)}{a+b}$$

$$x = a - b$$

Verificamos:

$$\frac{1+x}{b} + \frac{1+x}{a} = \frac{1+a}{b} + \frac{1-b}{a}$$

$$\frac{1+a-b}{b} + \frac{1+a-b}{a} = \frac{1+a}{b} + \frac{1-b}{a}$$

$$\frac{a+a^2-\cancel{ab}+b+\cancel{ab}-b^2}{ab} = \frac{a+a^2+b-b^2}{ab}$$

$$\frac{a+a^2+b-b^2}{ab} \equiv \frac{a+a^2+b-b^2}{ab}$$

4. Resolver la ecuación

$$\frac{m+x}{n} - \frac{n+x}{m} = 0$$

Para eliminar los denominadores multiplicamos toda la ecuación por el m.c.m. que es $m\,n$

$$m(m+x) - n(n+x) = 0$$

$$m^2 + mx - n^2 - nx = 0$$

asociamos los términos agrupando los que contienen a x

$$mx - nx = n^2 - m^2$$

factorizamos por x en el primer miembro y factorizamos el segundo miembro

$$x(m-n) = (n-m)(n+m)$$

$$x(m-n) = -(m-n)(n+m)$$

$$x = \frac{-\cancel{(m-n)}(n+m)}{\cancel{m-n}}$$

$$x = -n - m$$

Verificamos:

$$\frac{m+x}{n} - \frac{n+x}{m} = 0$$

$$\frac{m+(-n-m)}{n} - \frac{n+(-n-m)}{m} = 0$$

$$\frac{-n}{n} - \frac{-m}{m} = 0$$

$$(-1) - (-1) = 0$$

$$-1 + 1 = 0$$

$$0 \equiv 0$$

5. Despejar h en la ecuación

$$A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2) \cdot h$$

En este tipo de ecuaciones literales que generalmente se trata de fórmulas que se usan en algún cálculo de geometría, física o química, se especifica cuál de las variables se debe despejar en función de las otras.

Ejercicios resueltos

Aquí debemos despejar h.

La ecuación o fórmula puede ser escrita así:

$$A = \frac{(b_1 + b_2) \cdot h}{2}$$

multiplicamos por 2

$$2A = (b_1 + b_2) \cdot h$$

dividimos por $(b_1 + b_2)$

$$\frac{2A}{b_1 + b_2} = h$$

con esto quedó despejada h, tal como se pedía.

Ejercicios

I.

1. $\frac{x}{a} = b$
2. $ax = ab$
3. $ax - 1 = b$
4. $2ax - a = a + 2x$
5. $abx = a - x(a^2 + b^2) - b(ax - 1)$
6. $ax - 3 = bx - 5$
7. $a^2b + bx = ab^2 + ax$
8. $ax - 1 = bx + 1$
9. $(a - 1)x + (b - 1)x = (x - 1)a + (x - 1)b$
10. $(1 - a)^2 - (a + x)^2 = (1 - b)^2 - (b + x)^2$
11. $a^2(x - 2) - b^2(x - 2) = b(a^2 - b^2)$
12. $m^2x = n(1 + n) + x(m^2 - n^2)$
13. $(m - 4)x + (m - 5)x = (x - 5)m + (x - 4)m$
14. $(a - 4x)(2a - x) - (2x - a)^2 = (a + x)(a - 1)$
15. $(x + m)^2 - (x + n)^2 = (m - n)^2$
16. $(a + b + c)x - (a + b + x)c = (a + x + c)b - (x + b + c)a$
17. $(x + 1)a - (x + 1)b - (x + 1)c = (a + b + c)x + a$
18. $2(x - a) + 3(x - b) - 4(x - c) = 3a + 2b - c$
19. $(x + a)(x - b) - (x - a)(x + b) = a^2 - b^2$
20. $(a + b + c)(x - a) + (a + b + c)(x - b) + (a + b + c)(x - c) = 0$
21. $x - b = \frac{x}{a}$
22. $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = \frac{1}{ab}$
23. $\frac{ax}{b} - \frac{bx}{a} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$
24. $\frac{1}{x} - \frac{a}{x} = \frac{2}{a}$
25. $\frac{3}{x} - \frac{a}{2} + \frac{1}{a} = 0$
26. $\frac{x - a}{x - b} - \frac{x - b}{x - a} = \frac{2ab - 2b^2}{x^2 - ax - bx + ab}$
27. $\frac{x}{b} - \frac{x}{3a} = \frac{\frac{9a^2}{b} - 6a + b}{6a}$
28. $\frac{3(a - x)}{b} - \frac{2(b - x)}{a} = \frac{2b^2 - 6a^2}{ab}$

29. $\frac{a-x}{a}+\frac{b-x}{b}+\frac{c-x}{c}=3+\frac{1}{abc}$

30. $\frac{x-a}{x+b}+\frac{x-b}{x+a}=2$

31. $\frac{bx}{a}=\frac{a}{b}(x-a)+a$

32. $\frac{bx}{a}-\frac{a}{b}(x-a)=b$

33. $\frac{3x+2b}{x-3b}-3=\frac{4b^2}{x^2-9b^2}$

34. $\frac{3x+5a}{2x+b}=\frac{6x-2b}{4x-2a}$

35. $\frac{x}{2m}+\frac{2x}{3n}-\frac{1}{mn}=0$

36. $\frac{3}{2x-b}-\frac{2}{2x+b}=\frac{3b}{4x^2-b^2}$

II. En los ejercicios siguientes se trata de despejar la variable indicada.

1. Si $d=v \cdot t$, despejar v.
2. Si $F=m \cdot a$, despejar m.
3. Si $P=2\pi r$, despejar r.
4. Si $v=\frac{d}{t}$, despejar t.
5. Si $S=R \cdot \varphi$, despejar R.
6. Si $P=\frac{w}{t}$, despejar w.
7. Si $E_c=\frac{1}{2}mv^2$, despejar m.
8. Si $E_c=\frac{1}{2}mv^2$, despejar v.
9. Si $E_p=m \cdot g \cdot h$, despejar m.
10. Si $\frac{m_2}{m_1}=\frac{a_1}{a_2}$, despejar a_1.
11. Si $F=m \cdot g$, despejar g.
12. Si $T=P+m \cdot a$, despejar m.
13. Si $F_r=\mu \cdot m \cdot a$, despejar a.
14. Si $F+F_r-mg \operatorname{sen}\alpha=ma$, despejar m.
15. Si $N-mg\cos\alpha-F\operatorname{sen}\alpha=0$, despejar F.
16. Si $F_c=m\frac{v^2}{R}$, despejar R.
17. Si $\frac{v^2}{R}=\mu g$, despejar v.
18. Si $T-m\frac{v^2}{R}=0$, despejar m.
19. Si $F=m\frac{dv}{dt}+\frac{dm}{dt}$, despejar $\frac{dv}{dt}$.
20. Si $x=\frac{v^2}{2\mu g}$, despejar g.
21. Si $F=\frac{4}{(1+t)^2}$, despejar t.
22. Si $L=m \cdot r^2 \cdot w$, despejar r.
23. Si $d=\frac{1}{2}at^2$, despejar a.
24. Si $I=MR^2$, despejar R.
25. Si $T=2k\sqrt{\frac{m}{k}}$, despejar m.
26. Si $L=\sqrt{mkr}$, despejar r.
27. Si $Z=\sqrt{x_1^2+R_2}$, despejar x_1.
28. Si $E_c=h(f-f_0)$, despejar f_0.
29. Si $\frac{1}{f}-\frac{1}{f'}=\frac{h}{m_c c^2}\cdot(1-\cos a)$, despejar f.
30. Si $P \cdot V=n \cdot R \cdot T$, despejar T.
31. Si $Q=C(T_2-T_1)$, despejar T_2.
32. Si $E_1=\frac{Q_2}{Q_1-Q_2}$, despejar Q_2.
33. Si $\frac{Q_1}{T_1}-\frac{Q_2}{T_2}=0$, despejar T_1.
34. Si $T^2=\frac{4\pi}{g}\cdot l$, despejar l.

Ejercicios

35. Si $\bar{X} = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$, despejar n.

36. Si $Z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$, despejar σ.

37. Si $Z = \dfrac{t - \bar{x}}{\sigma}$, despejar t.

38. Si $S = S_o + gt$, despejar t.

39. Si $\dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{s'} - \dfrac{1}{s}$, despejar s.

40. Si $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}$, despejar R.

Soluciones

I.

1. $x = a\,b$
2. $x = b$
3. $x = \dfrac{b+1}{a}$
4. $x = \dfrac{a}{a-1}$
5. $x = \dfrac{1}{a+b}$
6. $x = \dfrac{2}{b-a}$
7. $x = a\,b$
8. $x = \dfrac{2}{a-b}$
9. $x = \dfrac{a+b}{2}$
10. $x = -1$
11. $x = b + 2$
12. $x = \dfrac{1+n}{n}$
13. $x = m$
14. $x = \dfrac{a}{6a-1}$
15. $x = -n$
16. $x = \dfrac{b\,c}{a}$
17. $x = -\dfrac{1}{2}$
18. $x = 5(a + b + c)$
19. $x = \dfrac{a+b}{2}$
20. $x = \dfrac{a+b+c}{3}$
21. $\dfrac{a\,b}{a-1}$
22. $x = \dfrac{1}{a+b}$
23. $x = \dfrac{1}{a-b}$
24. $x = \dfrac{a-a^2}{2}$
25. $\dfrac{6a}{a^2-2}$
26. $x = \dfrac{a-b}{2}$
27. $x = \dfrac{3a-b}{2}$
28. $x = 3a + 2b$
29. $\dfrac{-1}{ab + bc + ac}$
30. $x = -\dfrac{a+b}{2}$
31. $x = \dfrac{a^2}{a+b}$
32. $x = a$
33. $x = -\dfrac{29}{11}b$
34. $x = \dfrac{5a^2 - b^2}{7a - b}$
35. $x = \dfrac{6}{3n + 4m}$
36. $x = -b$

II.

1. $v = \dfrac{d}{t}$
2. $m = \dfrac{F}{a}$
3. $r = \dfrac{P}{2\pi}$
4. $t = \dfrac{d}{v}$
5. $R = \dfrac{s}{\varphi}$
6. $w = P \bullet t$
7. $m = \dfrac{2\,E_c}{v^2}$
8. $v = \sqrt{\dfrac{2\,E_c}{m}}$
9. $m = \dfrac{E_p}{g \bullet h}$
10. $a_1 = \dfrac{a_2\,m_2}{m_1}$
11. $g = \dfrac{F}{m}$
12. $m = \dfrac{T-P}{a}$
13. $a = \dfrac{Fr}{\mu m}$
14. $m = \dfrac{F + Fr}{a + g\,\mathrm{sen}\,\alpha}$
15. $F = \dfrac{N - m\,g\cos\alpha}{\mathrm{sen}\,\alpha}$
16. $R = \dfrac{mv^2}{Fc}$
17. $v = \sqrt{\mu\,g\,R}$
18. $m = \dfrac{T\,R}{v^2}$
19. $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{F - \dfrac{dm}{dt}}{m}$
20. $g = \dfrac{v^2}{2\,\mu x}$
21. $t = \dfrac{2}{\sqrt{F}} - 1$
22. $r = \sqrt{\dfrac{L}{mw}}$
23. $a = \dfrac{2d}{t^2}$
24. $R = \sqrt{\dfrac{I}{M}}$
25. $m = \dfrac{T^2}{4k}$
26. $r = \dfrac{L^2}{mk}$
27. $x_1 = \sqrt{Z^2 - R_2}$
28. $f_o = f - \dfrac{E_c}{h}$
29. $f = \dfrac{m_c\,c^2\,f'}{h\,f'\,(1 - \cos\alpha) + m_c\,c^2}$
30. $T = \dfrac{PV}{nR}$
31. $T_2 = \dfrac{Q}{C} + T_1$
32. $Q_2 = \dfrac{E_1\,Q_1}{1 + E_1}$
33. $T_1 = \dfrac{Q_1\,T_2}{Q_2}$
34. $I = \dfrac{g\,T^2}{4\,\pi}$
35. $n = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{\bar{X}}$
36. $\sigma = \dfrac{\sqrt{n}\,(\bar{x} - \mu)}{z}$
37. $t = z\sigma + \bar{x}$
38. $t = \dfrac{S - S_o}{g}$
39. $s = \dfrac{s'\,f}{f - s'}$
40. $R = \dfrac{R_1\,R_2\,R_3}{R_2\,R_3 + R_1\,R_3 + R_1\,R_2}$

2.1.5 Ecuaciones con valor absoluto

Definición: $|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$

Ejercicios resueltos

1. $|x+2| = 5$

Solución

i) Si $x+2 \geq 0 \Rightarrow |x+2| = x+2$

$x+2 = 5 \Rightarrow x = 3$

ii) Si $x+2 < 0 \Rightarrow |x+2| = -(x+2)$

$-x-2 = 5 \Rightarrow x = -7$

2. $|7x+3| - 2 = 1 - x$

Solución

i) Si $7x+3 \geq 0 \Rightarrow |7x+3| = 7x+3$

$7x+3-2 = 1-x \Rightarrow 8x = 0 \Rightarrow x = 0$

ii) Si $7x+3 < 0 \Rightarrow |7x+3| = -(7x+3)$

$-7x-3-2 = 1-x \Rightarrow -6x = 6 \Rightarrow x = -1$

3. $-3 = 8x - |9x+4|$

Solución

i) Si $9x+4 \geq 0$ entonces $|9x+4| = 9x+4$

Así, $-3 = 8x - |9x+4| \Rightarrow -3 = 8x - (9x+4)$

$\Rightarrow x = -1$ contradicción

pues $9x+4 \geq 0$; por lo tanto $x = -1$ no es solución

ii) Si $9x+4 < 0$ entonces $|9x+4| = -(9x+4)$

Así, $-3 = 8x - |9x+4| \Rightarrow -3 = 8x + 9x + 4$

$\Rightarrow x = -\frac{7}{17}$ contradicción

pues $9x+4 < 0$; por lo tanto $x = -\frac{7}{17}$ no es solución

La ecuación no tiene solución

Ejercicios

1. $|2x-4| = 3$
2. $8(-5 + |4x+9|) = -32$
3. $15 = -15(12 - |-2x+9|)$
4. $-3 = 7x - |10x+4|$
5. $-13 + |-6x+7| = -13$
6. $-4 = 8 - |-6x+7|$

Ejercicios

7. $|-3x-3| = 16$

8. $4 + |6x+7| + 9x = 11x + 10$

9. $-1 = -1 - |-6x-6|$

10. $|7x+2| - 1 = 2x$

11. $-3\,(-4 + |-4x+1|) = 12$

12. $10\,(2 + |-2x-5|) = 80$

13. $-55 = 11\,(4 - |-3x+8|)$

14. $-8x = 2 - |9x+4|$

15. $|19x + 3 - 8x| - 4 = 7x$

16. $|22x + 6 - 10x| - 1 = 8x$

17. $9 = 9 - |6x+3|$

18. $11\,(-6 + |-7x-8|) = 44$

19. $2 + |6x+8| = 14$

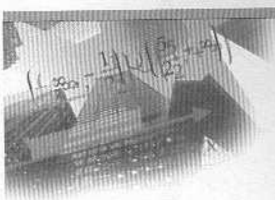
20. $|21x + 6 - 7x| - 5 = 10x$

21. $-6 = 2x - |8x + 7|$

Soluciones

1. $\frac{1}{2}, \frac{7}{2}$
2. $-2, -\frac{5}{2}$
3. $-2, 11$
4. $-\frac{1}{3}, -\frac{7}{17}$
5. $\frac{7}{6}$
6. $\frac{19}{6}, -\frac{5}{6}$
7. $\frac{13}{3}, \frac{-19}{3}$
8. $-\frac{1}{4}, -\frac{13}{8}$
9. -1
10. $-\frac{1}{5}, -\frac{1}{3}$
11. $\frac{1}{4}$
12. $-\frac{11}{2}, \frac{1}{2}$
13. $-\frac{1}{3}, \frac{17}{3}$
14. No tiene solución
15. $\frac{1}{4}, \frac{-7}{17}$
16. No tiene solución
17. $-\frac{1}{2}$
18. $-\frac{18}{7}, \frac{2}{7}$
19. $\frac{2}{3}, -\frac{10}{3}$
20. $\frac{-1}{4}, \frac{-11}{24}$
21. $-\frac{1}{6}, -\frac{13}{10}$

2.2 Problemas



Hay un sinnúmero de problemas que pueden resolverse planteando, con sus datos, ecuaciones de primer grado.

Para resolver un problema recomendamos los siguientes pasos:

1. **Leer** atenta y **comprensivamente** el enunciado del problema.
2. **Identificar la incógnita** y los datos que se utilizarán en la solución.
3. Relacionar los datos con la incógnita planteando una **ecuación.**
4. **Resolver** la ecuación.
5. **Analizar la solución** de la ecuación cuidando que tenga relación con el enunciado del problema.
6. **Dar** la respuesta.

Ejercicios resueltos

1. Escribir en forma de expresión algebraica el siguiente enunciado.

a) La mitad de los asistentes a la reunión, más uno.

Sea x el número de asistentes a la reunión.

Entonces la mitad más uno es: $\frac{x}{2}+1$

b) El doble de un número menos el 30% de él.

Sea n el número.

$2n-\frac{30}{100}n$

c) Si la suma de las edades de Juan y María es 63 años, escribir una expresión para la edad de cada uno:

Sea x la edad de Juan, entonces $63-x$ es la edad de María.

d) La suma de dos números multiplicada por su diferencia.

Sean x e y los números, entonces el producto de su suma por su diferencia se expresa:

$$(x+y)(x-y)$$

e) Sumar el cuadrado de un número con el doble de su cubo.

Si a es el número, la situación descrita se escribe así:

$$a^2+2a^3$$

f) Sumar el cuadrado de un número con su duplo al cubo.

Si a es el número, la situación ahora se escribe así:

$$a^2+(2a)^3$$

g) Escribir tres números enteros consecutivos.

Si n es un número entero, la situación descrita se puede escribir:

$$n,\ n+1,\ n+2$$

$$n-1,\ n,\ n+1$$

h) Un viajero debe recorrer m km. y ha recorrido n km. ¿Cuánto le falta por recorrer?

Le falta $(m-n)$ km por recorrer.

i) Pedro recibe por un trabajo \$ a y de mesada \$ b. Con todo el dinero alcanza a comprar $(m+2)$ revistas. Si todas las revistas tienen el mismo valor, ¿cuánto le costó cada una?

Cada revista le costó:

$$\$\left(\frac{a+b}{m+2}\right)$$

2. En un gallinero hay 5 pavos más que gallinas y 3 patos más que pavos. Si en total hay 49 aves, ¿cuántas gallinas, pavos y patos hay?

Sea x el número de gallinas, entonces:

$x+5$ será el número de pavos y

$x+5+3$ será el número de patos

Como en total hay 49 aves podemos decir que:

$$x + x + 5 + x + 5 + 3 = 49$$
$$3x + 13 = 49$$
$$3x = 36$$
$$x = 12$$

Respuesta: Hay 12 gallinas, 17 pavos y 20 patos.

3. La suma de tres números pares consecutivos es 102. Hallar los tres números.

La expresión 2n representa un número par, el siguiente es 2n + 2 y el que sigue es 2n + 4.

Como los tres números suman 102 podemos decir que:

$$2n + 2n + 2 + 2n + 4 = 102$$
$$6n + 6 = 102$$
$$6n = 96$$
$$n = \frac{96}{6}$$
$$n = 16$$

Si n = 16, entonces

$$2n = 32$$
$$2n + 2 = 34$$
$$2n + 4 = 36$$

Los números pedidos son 32, 34 y 36.

4. El perímetro de un rectángulo es de 40 m. Si el largo se aumenta 2m y el ancho se disminuye 2 m, su área disminuye en $12m^2$. Calcular sus dimensiones.

El perímetro es 40 m, luego el semiperímetro es 20 m.

Si llamamos x al largo, entonces 20 – x representa el ancho.

Área del rectángulo x (2 – x)

El nuevo rectángulo tiene:

largo x + 2, ancho 20 – x – 2 y área (x + 2) (20 – x – 2)

Pero el área disminuye en 12 m^2, luego

$x (20 - x) - (x + 2) (20 - x - 2) = 12$

resolviendo la ecuación

$$20x - x^2 - (x + 2) (18 - x) = 12$$
$$20x \cancel{- x^2} - 18x \cancel{+ x^2} - 36 + 2x = 12$$
$$4x = 48$$
$$x = 12$$

El largo es 12 m y el ancho es 8 m.

5. La edad de Pedro es el doble de la edad de María. Si en cinco años más la suma de sus edades será 43 años, ¿qué edad tienen actualmente?

En este tipo de problemas es adecuado hacer un cuadro en el tiempo.

	actual	5 años más
Edad de María	x	x + 5
Edad de Pedro	2x	2x + 5

En cinco años más sus edades sumarán 43 años:

$$(x + 5) + (2x + 5) = 43$$

resolviendo la ecuación

$$\begin{aligned} 3x + 10 &= 43 \\ 3x &= 33 \\ x &= 11 \end{aligned}$$

Actualmente María tiene 11 años y Pedro tiene 22 años.

6. Se tiene una herencia a repartir entre sus herederos y la instrucción es que el mayor debe recibir $\frac{1}{4}$ de ella, el segundo $\frac{3}{8}$ de ella y el tercero $\frac{1}{2}$ de lo que queda, entregando la otra mitad a una institución de beneficencia. Si esta institución recibe \$ 815.625, hallar el monto de la herencia y cuánto recibe cada heredero.

Sea x el monto de la herencia, entonces:

El mayor recibe $\frac{1}{4}x$

El segundo recibe $\frac{3}{8}$ x, con esto ya se han repartido

$$\frac{1}{4}x + \frac{3}{8}x = \frac{5}{8}x, \text{ luego quedan } \frac{3}{8}x$$

El tercero recibe $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{8}x = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8}x$

La institución de beneficencia recibe también $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8}$ x, lo que equivale a \$ 815. 625.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8}x &= 815.625 \\ \frac{3}{16}x &= 815.625 \\ x &= \$\ 4.350.000 \end{aligned}$$

que es el monto de la herencia, así:

El mayor recibe $\frac{1}{4}x = \$\ 1.087.500$

El segundo recibe $\frac{3}{8}x = \$\ 1.631.250$

El tercero recibe $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8}x = \$\ 815.625$

7. Un estanque se llena con la llave A en 4 horas y con la llave B en 8 horas. ¿Cuánto tardará en llenarse si se abren simultáneamente las dos llaves?

Si con la llave A tarda 4 horas en llenarse, en 1 hora se habrá llenado sólo $\frac{1}{4}$ de estanque.

En este tipo de problemas es adecuado hacer un cuadro en el tiempo.

	actual	5 años más
Edad de María	x	x + 5
Edad de Pedro	2x	2x + 5

En cinco años más sus edades sumarán 43 años:

$$(x + 5) + (2x + 5) = 43$$

resolviendo la ecuación

$$\begin{aligned} 3x + 10 &= 43 \\ 3x &= 33 \\ x &= 11 \end{aligned}$$

Actualmente María tiene 11 años y Pedro tiene 22 años.

6. Se tiene una herencia a repartir entre sus herederos y la instrucción es que el mayor debe recibir $\frac{1}{4}$ de ella, el segundo $\frac{3}{8}$ de ella y el tercero $\frac{1}{2}$ de lo que queda, entregando la otra mitad a una institución de beneficencia. Si esta institución recibe \$ 815.625, hallar el monto de la herencia y cuánto recibe cada heredero.

Sea x el monto de la herencia, entonces:

El mayor recibe $\frac{1}{4}x$

El segundo recibe $\frac{3}{8}$ x, con esto ya se han repartido

$$\frac{1}{4}x + \frac{3}{8}x = \frac{5}{8}x, \text{ luego quedan } \frac{3}{8}x$$

El tercero recibe $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{8}x = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8}x$

La institución de beneficencia recibe también $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8}$ x, lo que equivale a \$ 815. 625.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8}x &= 815.625 \\ \frac{3}{16}x &= 815.\ 625 \\ x &= \$\ 4.350.000 \end{aligned}$$

que es el monto de la herencia, así:

El mayor recibe $\frac{1}{4}x = \$\ 1.087.500$

El segundo recibe $\frac{3}{8}x = \$\ 1.631.250$

El tercero recibe $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8}x = \$\ 815.625$

7. Un estanque se llena con la llave A en 4 horas y con la llave B en 8 horas. ¿Cuánto tardará en llenarse si se abren simultáneamente las dos llaves?

Si con la llave A tarda 4 horas en llenarse, en 1 hora se habrá llenado sólo $\frac{1}{4}$ de estanque.

Si con la llave B tarda 8 horas en llenarse, en 1 hora se habrá llenado sólo $\frac{1}{8}$ de estanque.

Llamemos x al tiempo que tarda en llenarse con ambas llaves abiertas, entonces en 1 hora se habrá llenado sólo $\frac{1}{x}$ de estanque.

Podemos entonces plantear la ecuación $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{1}{x}$
Resolviendo:

$$2x + x = 8$$
$$3x = 8$$
$$x = \frac{8}{3}$$

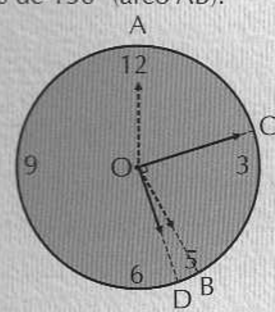
Demora $2\frac{2}{3}$ horas en llenarse el estanque con las dos llaves abiertas, es decir, 2 horas 40 min.

8. Determinar a qué hora, entre las 5 y las 6 horas, los punteros de un reloj forman un ángulo de 90°.

En cada minuto, el puntero avanza $\frac{360^\circ}{60}=6^\circ$

En cada minuto, el horario avanza $\frac{360^\circ}{60\cdot 12}=\left(\frac{1}{2}\right)^\circ$

A las 5 horas el minutero está en las 12 y el horario en las 5 y el ángulo que forman es de 150° (arco AB).



Se pide que el arco CD corresponda a un ángulo de 90°.

Si llamamos O al centro del reloj, por cada minuto OA avanza 6° y OB avanza 0,5°; por lo tanto, por cada minuto el ángulo AOB se achica 5,5°.

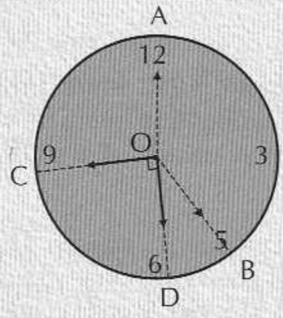
Sea x la cantidad de minutos que deben transcurrir para que el arco AB corresponda a un ángulo de 90°. Entonces podemos decir:

$$150^\circ - 5{,}5^\circ x = 90^\circ$$
$$60 = 5{,}5x$$
$$x = 10\frac{10}{11}$$

Luego, el ángulo formado por los punteros del reloj es de 90° a las 5 horas $10\frac{10}{11}$ min.

El ángulo de 90° ocurrirá nuevamente después que el minutero haya pasado sobre el horario.

Veamos primero a qué hora el ángulo se hará 0°.



$150^\circ - 5{,}5^\circ x = 0$

$150 = 5{,}5x$

$x = 27\ \frac{3}{11}$

Esto es a las 5 horas $27\ \frac{3}{11}$ min.

A partir de este momento el ángulo se va agrandando a razón de 5,5° por minuto; luego en $\frac{90}{5{,}5} = 16\ \frac{4}{11}$ minutos más, el ángulo entre los punteros volverá a ser de 90°, es decir, a las 5 horas $43\ \frac{7}{11}$ min.

Ejercicios

1. Un número multiplicado por 5 sumado con el mismo número multiplicado por seis da 55. ¿Cuál es el número?

2. ¿Qué número se debe restar de p+2 para obtener 5?

3. El doble de un número aumentado en 12 es igual a su triple disminuido en 5. ¿Cuál es el número?

4. Tres números impares consecutivos suman 81. ¿Cuáles son los números?

5. El doble de un número más el triple de su sucesor, más el doble del sucesor de éste es 147. Hallar el número.

6. La diferencia entre los cuadrados de dos números consecutivos es 103. ¿Cuáles son los números?

7. En el triángulo ABC los lados $AB = 3\ BC$ y $BC = \frac{1}{2}\ AC$. Si su perímetro es 84 m. ¿Cuánto mide cada lado?

8. Si el lado de un cuadrado se duplica, su perímetro aumenta 40 m. Calcular la medida del lado del cuadrado.

9. Las dimensiones de un rectángulo están en la razón 3:5 y su perímetro es 140 m. Calcular el largo y el ancho.

10. Una figura cerrada de seis lados tiene cinco de sus lados en la razón 1:2:3:6:4 y sus ángulos son rectos, excepto el formado por los lados que están en la razón 2: 3, que vale 270°. Si su perímetro es 144 m, hallar el sexto término de la proporción y la medida de cada uno de los lados.

11. Si el lado de un cuadrado es aumentado en 8 unidades, su perímetro se triplica. ¿Cuánto mide el lado?

Ejercicios

12. Con una cuerda de 70 cm de longitud se pide formar un triángulo cuyos lados estén en la razón 3 : 4 : 7. ¿Cuánto medirá cada lado? ¿Se podrá construir? Y si la longitud de la cuerda es 84 cm, ¿se podrá construir?

13. Un padre tiene 20 años más que su hijo. Dentro de 12 años, el padre tendrá el doble de la edad del hijo. ¿Cuántos años tiene cada uno actualmente?

14. Las edades de un matrimonio suman 62 años. Si se casaron hace 10 años y la edad de la novia era $\frac{3}{4}$ de la edad del novio, ¿qué edad tienen actualmente?

15. La edad de Pedro excede a la de su amigo Santiago en 4 años y a la de su amigo Juan en 2 años. Hace 6 años la razón entre sus edades era 2:3:4. ¿Qué edad tienen actualmente?

16. La edad de María es el triple de la de Ester y excede en 5 años a la edad de Isabel. Si las edades de Ester e Isabel suman 23 años, hallar la edad de cada una.

17. Guido tiene la cuarta parte de la edad de su padre Andrés y el triple de la edad de su hermano David. ¿Qué edad tiene cada uno, si sus edades suman 48 años?

18. Hace 6 años un padre tenía el cuádruplo de la edad de su hijo. En 10 años más tendrá sólo el doble. Hallar la edad actual de padre e hijo.

19. Un padre tiene 52 años y su hijo 16. ¿Hace cuántos años el hijo tenía la séptima parte de la edad del padre?

20. Repartir $952 entre tres personas de modo que reciban cantidades proporcionales a 4, 6 y 18.

21. Se compran 25 lápices, 32 cuadernos y 24 gomas de borrar y se cancela por ello $16.990. Si cada cuaderno cuesta el triple de cada goma, más $20 y cada lápiz cuesta el doble de cada goma, más $8, ¿cuánto cuesta cada material?

22. Hernán tiene el doble de dinero que Gladys y el triple que María. Si Hernán regalara $14 a Gladys y $35 a María, los tres quedarían con igual cantidad. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?

23. Entre Gastón y Javier juntan $ 2.340. Gastón reparte su capital entre cuatro amigos y Javier lo hace entre tres. Los amigos de Javier reciben cada uno $10 más que los amigos de Gastón. Hallar el dinero que tenían Gastón y Javier.

24. Una persona puede pintar una muralla en 5 horas, otra lo hace en 6 horas y una tercera persona tarda 12 horas en pintar la misma muralla. ¿Cuánto tardarían si la pintaran entre las tres?

25. Una llave puede llenar un estanque en 6 horas. Otra puede hacerlo en 7 horas. Estando lleno, el desagüe puede vaciarlo en 10 horas. ¿En cuánto tiempo se llenará el estanque si estando vacío y con el desagüe abierto, se abren las dos llaves?

26. ¿A qué hora entre las 11 y las 12 los punteros del reloj formarán un ángulo de 90°? ¿A qué hora coincidirán?

27. ¿A qué hora entre las 3 y las 4 los punteros de un reloj formarían un ángulo extendido? ¿A qué hora coincidirán?

28. El numerador de una fracción excede en dos unidades al denominador. Si al numerador se le suma 3, la fracción queda equivalente a $\frac{4}{3}$. Hallar la fracción.

29. La cifra de las decenas excede en 5 a la cifra de las unidades de un número de dos cifras. Si el número se divide por la suma de sus dígitos, da 8. Hallar el número.

30. Descomponer el número 564 en tres sumandos que sean inversamente proporcionales a 3, 4 y 5.

31. Considere el conjunto de alumnos y alumnas de su colegio desde 1° Básico hasta 4° Medio.

Identifique:

a) El tamaño de la población

b) 3 variables cualitativas para estudio

c) 3 variables cuantitativas para estudio

d) Los rangos de cada una de las variables identificadas en b y c.

32. En las siguientes situaciones:

a) Identifique las variables relevantes

b) Elija parejas de variables que se relacionen en forma inversa y otras que se relacionen en forma directa.

c) Identifique el campo de variación de cada una de las variables elegidas.

- El curso quiere organizar una despedida a un compañero que se va de intercambio.
- El curso decide realizar un regalo a la profesora de ciencias.
- El orientador avisa que viene un curso de visita para intercambiar experiencias en la clase de álgebra.

33. Una prueba de matemática contiene ítemes de álgebra y geometría y está estructurada con un 80% de preguntas de selección múltiple. De ellas, el 50% son de álgebra. De las preguntas con respuestas abiertas, el 75% son de álgebra. El número de preguntas de geometría que no son de selección múltiple es 2.

a) Calcule el número de preguntas de geometría que tiene la prueba.

b) Calcule el número total de preguntas de la prueba.

c) ¿Qué fracción de las preguntas de geometría son de selección múltiple?

d) Si las preguntas de selección múltiple valen 0,5 puntos; de las preguntas abiertas, las de geometría valen 0,8 puntos y las de álgebra 0,4 puntos, calcule el puntaje máximo de la prueba.

e) En una escala de 1 a 7, ¿cuál sería la nota que proporcionalmente le correspondería a un alumno que contesta correctamente la mitad de las preguntas de selección múltiple y todas las preguntas abiertas?

34. Una persona pinta una piscina en r horas y otra lo hace en s horas. ¿ Cuánto se demoran en pintar la piscina ambas personas trabajando juntas?

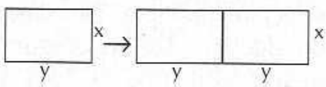
35. Para cortar el césped de una cancha de fútbol una persona tarda 4 horas y otra lo hace en 6 horas. Calcule cuánto se demorarían si trabajaran juntas.

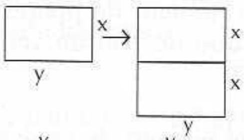
36. Si un cuadrado de área a aumenta su lado al doble, halle en qué proporción aumenta su área.

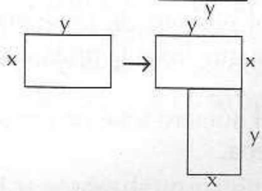
37. Haga un análisis de qué podría ocurrir con el perímetro de un rectángulo si su área se duplica. ¿El perímetro del nuevo rectángulo, depende de la forma como se duplica su área?

Ejercicios

Observación: Considere las siguientes alternativas:

a) 

b) 

c) 

¿Habrá otras posibilidades?

38. En un cubo, la longitud de su arista se triplica. ¿Cómo varía su volumen?

39. Se tiene un triángulo de base b y altura h. Si se disminuye su base a la mitad y se aumenta su altura al doble. ¿Qué ocurre con su área?

40. En un paralelogramo ABCD, P es un punto cualquiera de la diagonal AC. Por P se trazan EF $\parallel$ AD y GH $\parallel$ AB. Demostrar que el área del paralelogramo EBHP es igual al área del paralelogramo GPFD.

Soluciones

1. 5.
2. p – 3.
3. 17.
4. 25, 27 y 29.
5. 20.
6. 51 y 52.
7. AB = 42 m, BC = 14 m y AC = 28 m.
8. 10 m.
9. Largo = 43,75 m; ancho = 26,25 m.
10. l_1 = 6m; l_2 = 12 m; l_3 = 18 m; l_4 = 36 m; l_5 = 24 m; l_6 = 48 m.
11. 4 u.
12. No se puede construir un triángulo cuyos lados están en la razón 3:4:7 porque $3 + 4 \not> 7$.
13. 8 y 28 años.
14. 28 y 34 años.
15. Pedro 14 años; Juan 12 años, y Santiago 10 años.
16. Ester 7 años; Isabel 16 años, y María 21 años.
17. Andrés 36 años; Guido 9 años, y David 3 años.
18. Hijo 14 años y padre 38 años.
19. Hace 10 años.
20. \$136, \$204 y \$612.
21. Lápiz \$198, cuaderno \$305, goma \$95.
22. Hernán \$126; Gladys \$63, y María \$42.
23. Gastón \$ 1.320, y Javier \$1.020.
24. 2 horas 13 minutos 20 segundos.
25. 4 horas 46 minutos 21,8 segundos.
26. A la 11 horas 10 $\frac{10}{11}$ minutos y 11 horas 43 $\frac{7}{11}$ minutos.
    Coincidirán a las 12 horas.
27. A las 3 horas 49 $\frac{1}{11}$ minutos.
    Coincidirán a las 3 horas 16 $\frac{4}{11}$ minutos.
28. $\frac{17}{15}$
29. 72

30. 240, 180 y 144.

31. a) n = 487 (número de estudiantes matriculados.

b) Lugar de nacimiento, color de ojos, sexo.

c) Talla, peso, N° de hermanos.

d) {Ciudades del mundo}; {café, negro, gris, celeste, verde}; {masculino, femenino}
$\{x \in \mathbb{R} / 50 \leq x \leq 210 \text{ cm}\}$
$\{x \in \mathbb{R} / 10 \text{ kg} \leq x \leq 130 \text{ kg}\}$;
$\{x \in \mathbb{Z} / 0 \leq x \leq 15\}$

33. **a)** 18 **b)** 40 **c)** $\frac{8}{9}$ **d)** 20 **e)** 4.2

34. $\frac{rs}{r+s}$ horas

35. 2 horas 24 minutos

36. Se cuadriplica

38. Aumenta en un factor 27.

39. Se mantiene; el área de un triángulo varía en forma directamente proporcional a su base y a su altura.

40. Observe las áreas de los triángulos ABC y CDA; AEP y EGA; PHC y CFP.

Desigualdades e inecuaciones 2.3

El conjunto de los reales $\mathbb{R}$ es un conjunto ordenado; por lo tanto, podemos comparar sus elementos mediante una relación de orden y podemos decir que:

Para a, b $\in \mathbb{R}$ se tiene

$$a < b \Leftrightarrow a - b < 0$$
$$a > b \Leftrightarrow a - b > 0$$
$$a = b \Leftrightarrow a - b = 0$$

El signo "<" se lee menor que.
El signo ">" se lee mayor que.

También se usa la combinación de un signo de desigualdad con el signo igual:

"≤" se lee menor o igual que,
"≥" se lee mayor o igual que.

Una relación entre números o letras que representan números en que se usan los signos <, >, ≤ o ≥ se llama **desigualdad.**

Son desigualdades numéricas o literales las siguientes:

1. $3 + 2 < 7$
2. $x + 5 \geq 2$
3. $(x - 1)^2 > 0$
4. $2 - 5 \geq 4$

Una desigualdad puede ser verdadera o falsa.

En los ejemplos:

1. es verdadera
2. es verdadera para $x = 2$ y es falsa para $x = -4$
3. es verdadera para $x \neq 1$ y falsa para $x = 1$
4. es falsa

Cuando una desigualdad presenta una incógnita se denomina **inecuación** y su valor de verdad (verdadero o falso) dependerá del valor que le asignemos a la incógnita.

Resolver una inecuación es encontrar el intervalo de números reales para el cual la inecuación se transforma en una desigualdad verdadera.

Dependiendo del grado que presenta la incógnita, las inecuaciones pueden ser de primer, segundo, tercer... grado y dependiendo del número de incógnitas diferentes, pueden ser inecuaciones de una, dos o más variables.

Aquí demostraremos la veracidad de algunas desigualdades y resolveremos las inecuaciones de primer grado.

Para desarrollar estos ejercicios hay que tener presentes las siguientes propiedades de las desigualdades. Las enunciaremos usando el signo <, pero son válidas también para >, ≤ y ≥.

Propiedades de las desigualdades.

Coinciden $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

1. Al sumar una misma cantidad en ambos miembros de una desigualdad, la desigualdad se mantiene

$$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$$

2. Al restar una misma cantidad en ambos miembros de una desigualdad, la desigualdad se mantiene

$$a < b \Leftrightarrow a - c < b - c$$

3. Al multiplicar o dividir una desigualdad por una cantidad **mayor que cero**, la desigualdad se mantiene

$$a < b \Leftrightarrow ac < bc \qquad c > 0$$

$$a < b \Leftrightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \qquad c > 0$$

4. Al multiplicar o dividir una desigualdad por una cantidad **menor que cero**, la desigualdad se invierte

$$a < b \Leftrightarrow ac > bc \qquad c < 0$$

$$a < b \Leftrightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \qquad c < 0$$

5. Al invertir ambos miembros de una desigualdad, ésta cambia de signo

$$0 < a < b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

6. Al elevar a la misma potencia ambos miembros de una desigualdad, ésta se mantiene

$$0 < a < b \Rightarrow a^n < b^n \quad n \in \mathbb{R}^+$$

7. Al sumar miembro a miembro desigualdades del mismo signo, la desigualdad se mantiene

$$\left.\begin{array}{l} a < b \\ c < d \end{array}\right\} \Rightarrow a + c < b + d$$

8. La regla de los signos para el producto se expresa en términos de desigualdad así

$a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow a \bullet b > 0$

$a < 0 \wedge b < 0 \Rightarrow a \bullet b > 0$

$a > 0 \wedge b < 0 \Rightarrow a \bullet b < 0$

• **Observación:** Nótese que las propiedades 5 y 6 sólo se cumplen si los términos que se comparan son ambos mayores que cero (positivos).

2.3.1 Desigualdades

Ejercicios resueltos

1. Demostrar que si $n > 0$ entonces

$$n + \frac{1}{n} \geq 2$$

Sabemos que el cuadrado de un número es siempre mayor que cero, luego

$$(n-1)^2 \geq 0$$

$$n^2 - 2n + 1 \geq 0 \qquad / \cdot \frac{1}{n} > 0 \text{ (prop. 3)}$$

$$n - 2 + \frac{1}{n} \geq 0 \qquad / +2 \qquad \text{(prop. 1)}$$

$$n + \frac{1}{n} \geq 2$$

2. Si $x > 0$ e $y > 0$, demostrar que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > \frac{2}{x+y}$

Esto es verdadero si y sólo si

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{x+y} > 0$$

Entonces $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{x+y} =$

$$\frac{x+y}{xy} - \frac{2}{x+y} =$$

$$\frac{(x+y)^2 - 2xy}{xy(x+y)} =$$

$$\frac{x^2 + 2xy + y^2 - 2xy}{xy(x+y)} =$$

$$\frac{x^2 + y^2}{xy(x+y)} > 0$$

ya que por dato del problema

$$x > 0 \text{ e } y > 0 \Rightarrow x + y > 0$$

$$xy > 0$$

$$\therefore xy(x+y) > 0$$

además $x^2 > 0$

e $y^2 > 0$

$$\therefore x^2 + y^2 > 0$$

Ejercicios resueltos

luego $\dfrac{x^2+y^2}{xy(x+y)} > 0$

y $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{2}{x+y} > 0$

luego $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} > \dfrac{2}{x+y}$

Ejercicios

1. Demuestre que si $x > 0$ e $y > 0$ entonces $x > y \Leftrightarrow x^2 > y^2$
2. Demuestre que, para a y b positivos, su media aritmética es mayor que su media geométrica, es decir $\dfrac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$
3. Demuestre que si $0 < x < 1$ entonces $x^2 < x$
4. Demuestre que $x^2 + 4 > 4x$
5. Demuestre que $x^2 + y^2 + 1 > 2(x + y - xy)$
6. Demuestre que $a^2 + 2a + b^2 - 2b > 2ab - 1$
7. Si $b > 0$ y $d > 0$ entonces $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{b+d} < \dfrac{c}{d}$ con $\dfrac{a}{b} > \dfrac{c}{d}$
8. Demuestre que si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $a^3b + ab^3 < a^4 + b^4$
9. Demuestre que si $a > 0$ entonces $a^2 + \dfrac{1}{a^2} \geq 2$
10. Determine para qué valores de a la desigualdad del ejercicio anterior es igual a 2

Soluciones

1. Datos del ejercicio $x > 0$, $y > 0$

Debe demostrar hacia ambos lados la implicación:

$\Rightarrow$) Dato : $x > y$. Por dem : $x^2 > y^2$

$x > y \Rightarrow x - y > 0$ $\quad$ /• $(x + y) > 0$ (por dato)

$(x - y)(x + y) > 0$

$x^2 - y^2 > 0$

$x^2 > y^2$

$\Rightarrow$) Dato: $x^2 > y^2$ Por dem.: $x > y$

$$x^2 > y^2 \Rightarrow x^2 - y^2 > 0$$
$$(x + y)(x - y) > 0 \qquad \text{pero } x + y > 0 \text{ (por dato)}$$
$$x - y > 0$$
$$x > y$$

2. $$\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 > 0$$
$$a - 2\sqrt{ab} + b > 0$$
$$a + b > 2\sqrt{ab}$$
$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$$

3. $0 < x < 1 \Rightarrow x > 0$ y $x - 1 < 0$
$$x(x - 1) < 0$$
$$x^2 - x < 0$$
$$\therefore x^2 < x$$

4. $$(x - 2)^2 > 0$$
$$x^2 - 4x + 4 > 0$$
$$x^2 + 4 > 4x$$

5. $$x^2 + y^2 + 1 - 2(x + y - xy) =$$
$$x^2 + y^2 + 1 - 2x - 2y + 2xy =$$
$$(x + y)^2 - 2(x + y) + 1 =$$
$$(x + y - 1)^2 > 0$$
$$\therefore x^2 + y^2 + 1 - 2(x + y - xy) > 0$$
$$x^2 + y^2 + 1 > 2(x + y - xy)$$

6. $$a^2 + 2a + b^2 - 2b - 2ab + 1 =$$
$$(a - b)^2 + 2(a - b) + 1 =$$
$$(a - b + 1)^2 > 0$$
$$\therefore a^2 + 2a + b^2 - 2b - 2ab + 1 > 0$$
y $$a^2 + 2a + b^2 - 2b > 2ab - 1$$

7. Por hipótesis $bd > 0$ $\qquad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} < 0$
$$\frac{ad - bc}{bd} < 0 \Rightarrow ad - bc < 0$$
entonces $$\frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{ab + ad - ab - bc}{b^2 + bd}$$
$$= \frac{ad - bc}{b^2 + bd} < 0$$
$$\therefore \frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+d} < 0 \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$$

8. $$a^3 b + a b^3 - a^4 - b^4 = a^3(b - a) + b^3(a - b)$$
$$= a^3(b - a) - b^3(b - a)$$
$$= (b - a)(a^3 - b^3)$$
$$= (b - a)(a - b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$= -(b - a)^2(a^2 + ab + b^2) < 0$$
$$\therefore a^3 b + ab^3 - a^4 - b^4 < 0$$
$$a^3 b + ab^3 < a^4 + b^4$$

9. $$\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 \geq 0$$
$$a^2 - 2 + \frac{1}{a^2} \geq 0$$
$$a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2$$

10. para $a = 1$ y $a = -1$

2.3.2 Inecuaciones

Ejercicios resueltos

1. Si $a < b$. Escribir como intervalo y gráficamente los siguientes conjuntos.

a) $\{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} / x > a\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} / x \leq b\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} / x < b\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$

f) $\{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$

g) $\{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$

h) $\{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$

a) $[a, +\infty)$

b) $(a, +\infty)$

c) $(-\infty, b]$

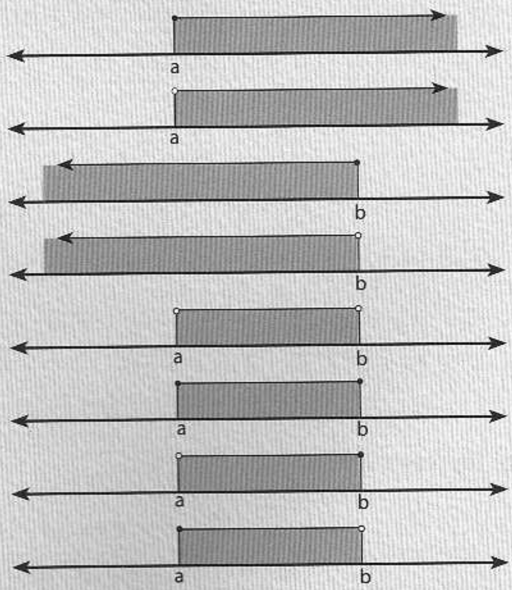
d) $(-\infty, b)$

e) (a, b)

f) $[a, b]$

g) $(a, b]$

h) $[a, b)$



2. Resolver la inecuación.

$$2x - 5 < x + 2$$

aplicando las propiedades

$$2x - x < 2 + 5$$

$$x < 7 \quad \text{o} \quad (-\infty, 7)$$

Lo que gráficamente es

En efecto, cualquier valor de x menor que 7 hace que la desigualdad sea verdadera, por ejemplo, si $x = 3$.

$$2 \bullet 3 - 5 < 3 + 5$$

$$1 < 8 \qquad \text{lo que es verdadero}$$

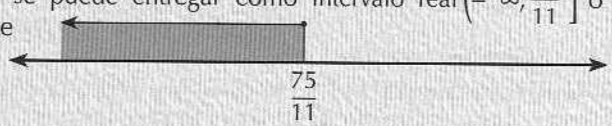
3. Resolver la inecuación

$$4-\frac{x}{3}\geq\frac{2x}{5}-1$$

Aplicando las propiedades

$$\begin{aligned} 4-\frac{x}{3} &\geq \frac{2x}{5}-1 && /\cdot 15\\ 60-5x &\geq 6x-15 && \\ -11x &\geq -75 && /\cdot -\frac{1}{11}\\ x &\leq \frac{75}{11} && \end{aligned}$$

Nótese que al multiplicar por un número negativo, la desigualdad se invierte.
La solución se puede entregar como intervalo real $\left(-\infty,\frac{75}{11}\right]$ o gráficamente



Verifiquemos para $x=-1<\frac{75}{11}$

$$4-\frac{-1}{3}\geq\frac{-2}{5}-1$$

$$\frac{13}{3}\geq\frac{-7}{5}$$ lo que es verdadero.

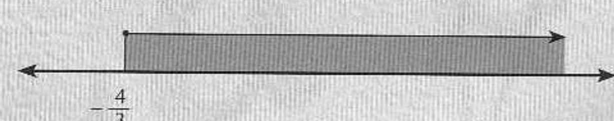
4. Resolver la inecuación

$$(x-1)^2\leq x^2-\frac{x}{2}+3$$

Resolviendo paréntesis y aplicando las propiedades

$$\begin{aligned} x^2-2x+1 &\leq x^2-\frac{x}{2}+3 && \\ -2x+1 &\leq -\frac{x}{2}+3 && /\cdot 2\\ -4x+2 &\leq -x+6 && \\ -3x &\leq 4 && /\cdot -\frac{1}{3}\\ x &\geq -\frac{4}{3} && \end{aligned}$$

como intervalo $\left[-\frac{4}{3},+\infty\right)$ y gráficamente



Ejercicios

I. Escriba los siguientes conjuntos como intervalos:

1. $\{x \in \mathbb{R} /\ \ 2 < x \leq 3\}$
2. $\{x \in \mathbb{R} /\ -7 \leq x < -5\}$
3. $\{y \in \mathbb{R} /\ \ y > -4\}$
4. $\{x \in \mathbb{R} /\ \ x < -2 \vee x > 4\}$
5. $\{x \in \mathbb{R} /\ \ x \leq 3 \vee x \geq -2\}$
6. $\{x \in \mathbb{R} /\ \ x < -1 \wedge x \geq -3\}$
7. $\{x \in \mathbb{R} /\ \ x \leq -2 \wedge x \geq 2\}$

II. Resuelva las siguientes inecuaciones y grafique su respuesta:

1. $5x + 2 < 2x - 1$
2. $3 - 4x \geq -3 + 2x$
3. $2x - 1 > 3$
4. $5 - 3x \leq 12$
5. $\frac{2x - 1}{2} > 0$
6. $4x - \frac{2x + 1}{3} + 1 < 0$
7. $\frac{4 - 2x}{3} \geq \frac{5 - 3x}{4}$
8. $\frac{2 - 3x}{2} - \frac{6x + 1}{3} \geq 0$
9. $\frac{1 - x}{2} + \frac{2x - 1}{3} < \frac{4x + 2}{6}$

III. Resuelva las siguientes inecuaciones y escriba su solución como intervalo:

1. $x^2 - 4x - 1 \geq (x - 5)^2$
2. $(x + 1)(x - 5) \leq (x - 2)(x + 5)$
3. $4x - (x^2 - 1) < (5 - x)(1 + x)$
4. $(3x - 1)(x + 2) < x + 3x^2$
5. $(x + 2)(x - 2) > (5 + x)(x + 1)$
6. $(2x - 1)(x + 4) - (x - 1)(2x + 3) \geq 0$
7. $(3x - 2)(x + 5) + (1 - x)(4 + 3x) < 0$
8. $(x + 2)(x - 3) < (x + 4)(x - 5)$
9. $(2x - 1)x \leq (x + 3)2x$
10. $(3x + 1)x + (5 - x)3x > 0$

IV.

1. Encuentre los números enteros positivos tales que su quinta parte más 3 sea mayor que la mitad de su triple.
2. Encuentre los números naturales cuya tercera parte sea mayor que su mitad, más 1.

Soluciones

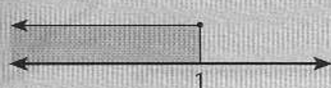
I

1. $(2, 3]$ 2. $[-7, -5)$ 3. $(-4, +\infty)$
4. $(-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$ 5. $\mathbb{R}$ 6. $[-3, -1)$ 7. $\varnothing$

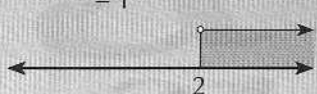
II

1. $x < -1$

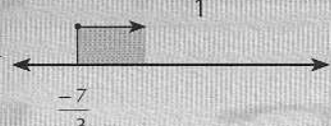
2. $x \leq 1$



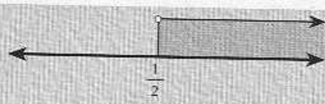
3. $x > 2$



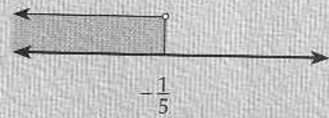
4. $x \geq \frac{-7}{3}$



5. $x > \frac{1}{2}$

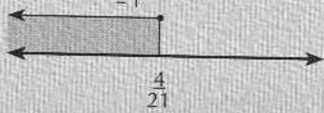


6. $x < -\frac{1}{5}$

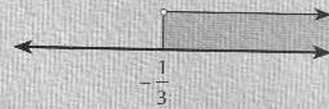


7. $x \geq -1$

8. $x \leq \frac{4}{21}$



9. $x > -\frac{1}{3}$



III

1. $\left[\frac{13}{3}, +\infty\right)$ 2. $\left[\frac{5}{7}, +\infty\right)$ 3. $\mathbb{R}$ 4. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ 5. $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$

6. $\left[\frac{1}{6}, +\infty\right)$ 7. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ 8. $\varnothing$ 9. $[0, +\infty)$ 10. $(0, +\infty)$

IV

1. 1 y 2 2. No hay.

2.3.3 Inecuaciones simultáneas

Se llaman inecuaciones simultáneas aquellas que se satisfacen simultáneamente. Se considera como solución de ellas aquel intervalo para el cual se satisfacen todas.

Ejercicios resueltos

1. Resolver simultáneamente las siguientes inecuaciones.

$$x - 1 > 2$$
$$x - 2 < 2x + 3$$

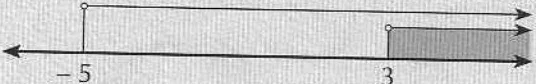
Resolviendo la primera

$$x - 1 > 2$$
$$x > 3$$

Resolviendo la segunda

$$x - 2 < 2x + 3$$
$$-x < 5$$
$$x > -5$$

Comparando ambas soluciones en la recta numérica vemos que ambas se satisfacen sólo para $x > 3$



Luego la solución es $x > 3$ o $(3, +\infty)$

2. Resolver las inecuaciones simultáneas.

$$3x - 1 > x + 2$$
$$\frac{x}{2} \leq \frac{x}{4} + 3$$

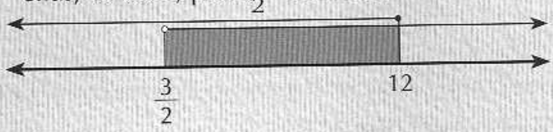
Resolviendo la primera

$$3x - 1 > x + 2$$
$$2x > 3$$
$$x > \frac{3}{2}$$

Resolviendo la segunda

$$\frac{x}{2} \leq \frac{x}{4} + 3$$
$$2x \leq x + 12$$
$$x \leq 12$$

Comparando ambas soluciones en la recta numérica, observamos que sólo se satisfacen ambas inecuaciones en la intersección de ellas, es decir, para $\frac{3}{2} < x \leq 12$.



Luego la solución es $\left(\frac{3}{2}, 12\right]$

3. Resolver las inecuaciones simultáneas

$$\left.\begin{array}{l} 5x - 1 > 0 \\ 3x + 3 < x + 1 \end{array}\right|$$

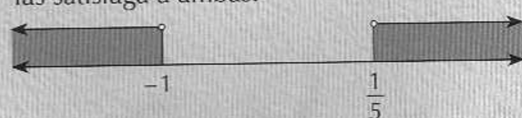
Resolviendo la primera

$$5x - 1 > 0$$
$$5x > 1$$
$$x > \frac{1}{5}$$

Resolviendo la segunda

$$3x + 3 < x + 1$$
$$2x < -2$$
$$x < -1$$

Comparando ambas soluciones en la recta numérica vemos que no hay ninguna solución común, luego no existe x que las satisfaga a ambas.



Luego la solución es vacía (∅)

4. Resolver simultáneamente las siguientes inecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} x + 3 < 2x - 1 \\ \frac{x}{2} + \frac{3}{4} < 2x + \frac{1}{3} \\ 5x - 1 > \frac{x}{4} + 2 \end{array}\right|$$

En este caso debemos resolver las tres inecuaciones y comparar sus resultados.

Resolviendo la primera

$$\begin{aligned} x + 3 &< 2x - 1 \\ -x &< -4 \qquad /\bullet -1 \\ x &> 4 \end{aligned}$$

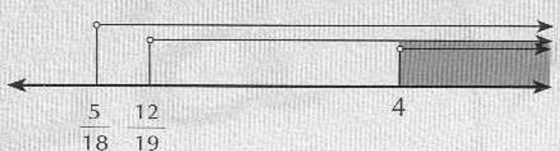
Resolviendo la segunda

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} + \frac{3}{4} &< 2x + \frac{1}{3} \qquad /\bullet\ 12 \\ 6x + 9 &< 24x + 4 \\ -18x &< -5 \\ x &> \frac{5}{18} \end{aligned}$$

Resolviendo la tercera

$$\begin{aligned} 5x - 1 &> \frac{x}{4} + 2 \qquad /\bullet\ 4 \\ 20x - 4 &> x + 8 \\ 19x &> 12 \\ x &> \frac{12}{19} \end{aligned}$$

Comparando las tres soluciones vemos que la solución para todas simultáneamente es $x > 4$



Luego la solución es $(4, +\infty)$.

Ejercicios

Resuelva las inecuaciones simultáneas siguientes:

1. $2x - 1 > x + 3 - 2x$
   $4x - 5 < x + 2$

2. $\frac{x}{2} + \frac{5x}{3} - 1 \geq 0$
   $4x - 3 \leq x + 2$

3. $2x + 1 - x < x + 3$
   $\frac{3x}{5} - \frac{2x}{4} < 0$

4. $2x + 1 \geq x + \frac{2x}{3}$
   $3x + 1 \leq 2$

5. $6x \geq 2x - 1$
   $\frac{x}{4} < \frac{x}{3} + 3$

6. $\frac{9x}{5} - \frac{x}{3} \geq x - 2$
   $\frac{3x}{2} + \frac{2x}{3} \leq x + 1$

7. $\frac{1}{2} - \frac{2x}{3} < \frac{4x}{3} + 1$
   $\frac{3}{4} - \frac{x}{5} \geq 2x + \frac{1}{4}$

Ejercicios

8. $2\frac{1}{3} + 3\,\frac{1}{4}\,x \le \frac{1}{3} - \frac{x}{4}$
$x + 2 - \frac{x}{5} \ge 0$

9. $(x-1)(2x+3) \le (x-5)(2+2x)$
$(2-x)(3-x) \ge (8-x)(1-x)$

10. $(x-1)(2x+3) \ge (x-5)(2+2x)$
$(2-x)(3-x) \le (8-x)(1-x)$

11. $2x + 1 < 3$
$x + 2 > 2x - 1$
$1 - 3x < 0$

12. $2x - 3 > -x$
$1 - 2x > 5$
$4x - 1 < 3$

13. $(x-1)\,x \le x^2 + 2$
$1 + x^2 \ge 2x + x^2 - 1$
$3x - 5 < 2x + 4$

14. $5 - 2x + 1 > 0$
$2x - 3 + x < 0$
$2x + 3 - 1 < 0$

Soluciones

1. $\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right)$
2. $\left[\frac{6}{13}, \frac{5}{3}\right]$
3. $(-\infty, 0)$
4. $\left[-3, \frac{1}{3}\right]$
5. $\left[-\frac{1}{4}, +\infty\right)$
6. $\left[-\frac{30}{7}, \frac{6}{7}\right]$
7. $\left(-\frac{1}{4}, \frac{5}{22}\right]$
8. $\left[-\frac{5}{2}, -\frac{4}{7}\right]$
9. $\varnothing$
10. $\left[-\frac{7}{9}, \frac{1}{2}\right]$
11. $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$
12. $\varnothing$
13. $[-2, 1]$
14. $(-\infty, -1)$

2.3.4 Inecuaciones con valor absoluto

El valor absoluto de un número real x representa la distancia a que éste se encuentra del origen y se denota por $|x|$

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \ge 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Propiedades de la función valor absoluto

1. $|x| \ge 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$
2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $|x|^2 = x^2\ \forall\, x \in \mathbb{R}$
4. $\sqrt{x^2} = |x|\ \forall\, x \in \mathbb{R}$
5. $-|x| \le x \le |x|\ \forall\, x \in \mathbb{R}$

Teorema 1: Sean $x, a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, entonces:

i) $|x| \le a \Rightarrow -a \le x \le a$

ii) $|x| \ge a \Rightarrow x \ge a \vee x \le -a$

Ejercicios resueltos

1. Demostrar el teorema 1 que dice: Sean $x, a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, entonces

i) $|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$

ii) $|x| \geq a \Rightarrow x \geq a \vee x \leq -a$

Demostración:

i) si $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \leq a$ ①

si $x < 0 \Rightarrow |x| = -x \leq a \Rightarrow x \geq -a$ ②

de donde ① y ② $-a \leq x \leq a$

ii) si $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \geq a$ ①

si $x < 0 \Rightarrow |x| = -x \geq a \Rightarrow x \leq -a$ ②

de donde ① y ② $x \geq a \vee x \leq -a$

2. Resolver la inecuación

$|5x - 3| < 2$

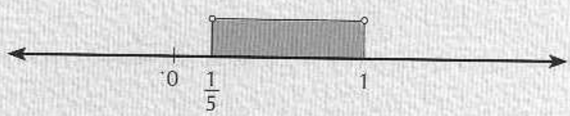
Por teorema 1 tenemos

$-2 < 5x - 3 < 2$ / sumamos 3

$1 < 5x < 5$ / dividimos por 5

$\frac{1}{5} < x < 1$

Solución $\left(\frac{1}{5}, 1\right)$



3. Resolver la inecuación

$|5 + 2x| \geq 3$

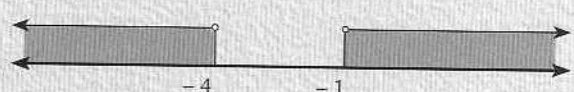
Por teorema 1

$5 + 2x \geq 3 \vee 5 + 2x \leq -3$

$2x \geq -2 \vee 2x \leq -8$

$x \geq -1 \vee x \leq -4$

Solución: $(-\infty, -4] \cup [-1, +\infty)$



4. Resolver la inecuación

$|x + 1| + |x| \leq 3$

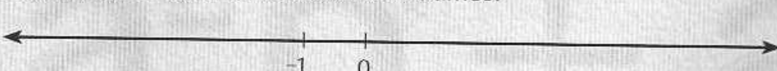
Como se trata de una suma de valores absolutos, no podemos aplicar el teorema anterior.

Vamos a eliminar las barras de valor absoluto conociendo el signo de la expresión que está entre barras. Analizaremos la recta numérica a tramos, teniendo en cuenta en qué puntos (números reales) la expresión entre barras cambia de signo (o se hace cero).

$x + 1 = 0$ para $x = -1$

$x = 0$ para $x = 0$

Dividimos la recta numérica en tres tramos:



Ejercicios resueltos

i) Si $x \in (-\infty, -1)$, entonces $x + 1 < 0$

$x < 0$

Al aplicar la definición de valor absoluto:

$|x + 1| = -(x + 1)$ $\quad |x| = -x$

entonces la inecuación queda:

$$-(x + 1) - x \leq 3$$
$$-x - 1 - x \leq 3$$
$$-2x \leq 4$$
$$x \geq -2$$

Luego del intervalo $(-\infty, -1)$ es solución el intervalo $[-2, -1)$

ii) Si $x \in [-1, 0)$, entonces $x + 1 \geq 0$

$x < 0$

$|x + 1| = x + 1$ y $|x| = -x$

entonces la inecuación queda:

$$x + 1 - x \leq 3$$

$1 \leq 3$ verdadero, lo que indica que todo el intervalo considerado es solución: $[-1, 0)$

iii) Si $x \in [0, +\infty)$ entonces $x + 1 > 0$

$x \geq 0$

luego $|x + 1| = x + 1$ y $|x| = x$

donde la inecuación queda:

$$x + 1 + x \leq 3$$
$$2x \leq 2$$
$$x \leq 1$$

Luego del intervalo $[0, +\infty)$ sólo es solución el intervalo $[0, 1]$.

Uniendo las soluciones de i, ii, iii tenemos que la solución de la inecuación es $S = [-2, -1) \cup [-1, 0) \cup [0, 1] = [-2, 1]$

Ejercicios

Resuelva las siguientes inecuaciones:

1. $|2x + 5| \leq 3$

2. $|5 + 3x| < \frac{3}{4}$

3. $|6 - 4x| \leq 2$

4. $|2x + 1| > 5$

5. $|7x - 4| \geq 3$

6. $|1 - 4x| - 2 \geq 0$

7. $1 - |2x + 5| + 3 \leq 0$

8. $\left|1 - \frac{3}{4}x\right| + 2 \leq 5$

9. $|3x + 1| + 5 \leq 0$

10. $|1 - 2x| + 3 \geq 0$

11. $3 < |x + 2 - 3x|$

12. $5 > |2x - 3|$

13. $\sqrt{(2+x)^2} \leq 3$

14. $\sqrt{x^2 - 10x + 25} \geq 2$

15. $|x + 3| \leq x$

16. $|2x - 1| - |x + 2| < 3$

17. $1 - |3 - x| + |2x + 3| \leq 0$

18. $|x| + |3x - 6| > 5$

19. $|x - 2| + |x + 3| < |2x - 2|$

20. $|2x - 1| - |3x + 2| \leq 4$

21. $|3x + 2| - |2x - 1| \leq 4$

22. $-3 > 11 - |-9x - 3|$

23. $3(6 + |-3x + 4|) \leq 63$

24. $-63 \geq 9(-7 - |9x - 2|)$

25. $-11 \leq 2 - |-x - 1|$

26. $|19x| \geq 0$

27. $5 \geq 5 - |9x|$

28. $-36 > 4(-9 - |6x + 3|)$

29. $|19x| > 0$

30. $|-4x - 3| \leq 12$

31. $9 + |-3x - 8| < -1$

32. $9 > 9 - |-9x + 5|$

33. $|3x + 4| > 0$

34. $-2 + |x - 2| \leq -2$

35. $-9 \leq -9 - |-6x - 4|$

36. $7(2 + |x - 7|) \leq 119$

37. $-2 > 3 - |5x + 6|$

Soluciones

1. $[-4, -1]$

2. $\left(-\frac{23}{12}, -\frac{17}{12}\right)$

3. $[1, 2]$

4. $(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$

5. $\left(-\infty, \frac{1}{7}\right] \cup \left[1, +\infty\right)$

6. $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$

7. $\left(-\infty, -\frac{9}{2}\right] \cup \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

8. $\left[\frac{-8}{3}, \frac{16}{3}\right]$

9. $\varnothing$

10. $\mathbb{R}$

11. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$

12. $(-1, 4)$

13. $[-5, 1]$

14. $(-\infty, 3] \cup [7, +\infty)$

15. $\varnothing$

16. $\left(-\frac{4}{3}, 6\right)$

17. $\left[-5, -\frac{1}{3}\right]$

18. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(2\frac{3}{4}, +\infty\right)$

19. $\left(-\infty, -1\frac{1}{2}\right)$

20. $\mathbb{R}$

21. $[-7, 1]$

22. $\left(-\infty, -\frac{17}{9}\right) \cup \left(\frac{11}{9}; +\infty\right)$

23. $[-3{,}67; 6{,}33] = \left[-\frac{11}{3}, \frac{19}{3}\right]$

24. $\mathbb{R}$

25. $[-14, 12]$

26. $\mathbb{R}$

27. $\mathbb{R}$

28. $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

29. $\mathbb{R} - \{0\}$

30. $[-3.75;\ 2{,}25]$

31. No tiene solución

32. $\mathbb{R} - \{0{,}\overline{5}\}$ o $\mathbb{R} - \left\{\frac{5}{9}\right\}$

33. $\mathbb{R} - \left\{-\frac{4}{3}\right\}$

34. $\{2\}$

35. $\left\{\frac{-2}{3}\right\}$

36. $[-8, 22]$

37. $(-\infty; -2{,}2) \cup (-0{,}2; +\infty)$

Prueba de selección múltiple

1. En la expresión $3x - 7 = 2$, x vale:

   $3x = 2+7$
   $x = 9/3$
   $x = 3$

   A. 1
   B. 2
   C. 3
   D. 4
   E. 5

2. La solución de la ecuación $5y + 2 = 4y - 5$ es:

   $5y - 4y = -2 - 5$
   $1y = -7$

   A. -7
   B. -5
   C. 0
   D. 5
   E. 7

3. La expresión $3(x + 2) - 2(x + 3) = x$ es verdadera para:

   $3x + 6 - 2x - 6 = x$
   $0 = x + 2x - 3x$
   $0 = 0$

   A. $x = 0$
   B. $x = 1$
   C. $x = -1$
   D. ningún x
   E. todo x real

4. En la ecuación $(x-1)^2 + 2 = x^2 - 1$, x vale:

   A. -2
   B. -1
   C. 0
   D. 1
   E. 2

5. La solución de la ecuación $(2z - 1)(z + 2) = 1 + 2z^2$

   A. 2
   B. 1
   C. 0
   D. -1
   E. -2

6. En la ecuación $x(1-x^2)+3 = 2 - (x^2 + 2)x$, x vale:

   A. 1
   B. $\frac{1}{3}$
   C. 2
   D. $-\frac{1}{3}$
   E. -1

7. En la ecuación $0{,}2x - 0{,}3x + 3{,}1 = x - 3{,}5$ x vale:

   A. 0,06
   B. 0,6
   C. 6
   D. $-0{,}6$
   E. $-0{,}06$

8. La expresión $\frac{2}{3} + \frac{x}{2} - \frac{3x}{4} = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$ es verdadera para x igual:

   A. $\frac{9}{11}$
   B. $-\frac{9}{11}$
   C. $\frac{11}{9}$
   D. $-\frac{11}{9}$
   E. $\frac{1}{9}$

9. El valor de x en la ecuación $\frac{4x - 3}{4} - \frac{5x + 2}{9} + \frac{3}{2} = \frac{6x + 1}{3} + \frac{3x + 5}{12} - \frac{2}{9}$ es:

   A. -2
   B. -1
   C. 0
   D. 1
   E. 2

10. La solución de la ecuación $\dfrac{2x - \frac{1}{2}}{3} = \dfrac{4x + \frac{2}{3}}{4}$, es:

    A. -2
    B. -1
    C. 0
    D. 1
    E. 2

11. La expresión
$\frac{13x}{3}-5(x+2)=\frac{4x}{3}-2(x+1)$
es verdadera para:

A. $x=0$
B. $x=1$
C. $x=-1$
D. ningún x
E. todo x real

12. En la ecuación
$\frac{z(z+1)^2}{2}-\frac{(z+1)^3}{3}=\frac{3-z+z^3}{6}$
el valor de z es:

A. $\frac{3}{2}$
B. $\frac{5}{2}$
C. 1
D. $-\frac{5}{2}$
E. $-\frac{3}{2}$

13. En la ecuación
$\frac{1}{3x-4}-\frac{1}{x+2}=0$, x vale:

A. 1
B. 2
C. 3
D. 4
E. 5

14. La solución de la ecuación es: $\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{1}{2x}$

A. 1
B. $\frac{2}{3}$
C. 0
D. -1
E. $-\frac{2}{3}$

15. El valor de x que hace verdadera la expresión $x-3=\frac{3x^2+5}{3x+1}$ es:

A. -2
B. -1
C. 0
D. 1
E. 2

16. La solución de la ecuación
$\frac{x-3}{2x+5}-\frac{3x+1}{6x-4}=0$ es:

A. $-\frac{7}{39}$
B. $\frac{7}{39}$
C. $-\frac{39}{7}$
D. $\frac{39}{7}$
E. $5\frac{3}{7}$

17. En la ecuación
$\frac{\frac{1}{x}-\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{2}{3}}=\frac{\frac{1}{x}}{\frac{2}{x}}$,
el valor de x es:

A. 4,0
B. 4,5
C. 5,0
D. $-4,5$
E. $-4,0$

18. En la ecuación
$\frac{1-\frac{1}{x+1}}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}=\frac{1}{3}$, x vale:

A. 1
B. -1
C. 0
D. 2
E. -2

19. La solución de la ecuación
$\frac{1}{x+2}-\frac{3}{2x-1}=\frac{-4}{2x^2+3x-2}$
es:

A. -1
B. -2
C. -3
D. -4
E. -5

20. La solución de la ecuación
$\frac{1}{2-2x}+\frac{2}{3-3x}=\frac{1+2x}{6x-6}$
es:

A. -1
B. -2
C. -3
D. -4
E. -5

21. En la expresión
$ax+bx=a+b$, x vale:

A. a
B. b
C. $-a$
D. $-b$
E. 1

22. En la ecuación
$2ax-3bx=\frac{a}{3}-\frac{b}{2}$,
x vale:

A. 6
B. a
C. b
D. $\frac{1}{6}$
E. $\frac{1}{a}$

Prueba de selección múltiple

23. La ecuación
$mx + x = m^2 - 1$
es verdadera para x =

A. $m + 1$

B. $m - 1$

C. $1 - m$

D. m

E. m^2

24. En la expresión
$p^2 x - 2pq = (p - q)^2$,
x vale:

A. $\frac{p+q}{p^2}$

B. $1 + \frac{p}{q}$

C. $1 + \frac{q}{p}$

D. $1 + \left(\frac{p}{q}\right)^2$

E. $1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2$

25. El valor de x en la ecuación
$px + p^2 = 1 + x$ es:

A. $1 + p$

B. $1 - p$

C. $p - 1$

D. $-1 - p$

E. 1

26. En la fórmula
$a_n = a_1 + (n - 1)\, d$, d =

A. $\frac{a_n + a_1}{n+1}$

B. $\frac{a_n - a_1}{n-1}$

C. $\frac{a_n - a_1}{1-n}$

D. $\frac{a_1 - a_n}{n-1}$

E. $\frac{a_n - a_1}{n+1}$

27. En la fórmula

$$S_n = \frac{n\left(a_1 + a_n\right)}{2},\ n =$$

A. $\frac{2S_n}{a_1 - a_n}$

B. $\frac{S_n}{a_1 - a_n}$

C. $\frac{2S_n}{a_1 + a_n}$

D. $\frac{S_n}{a_1 + a_n}$

E. $\frac{2S_n}{a_n - a_1}$

28. Si $y = h - \frac{5x^2}{v^2}$,

entonces x^2 =

A. $\frac{1}{5}(h - y)\, v^2$

B. $5\,(h - y)\ v^2$

C. $5\,(y - h)\ v^2$

D. $\frac{1}{5}(y - h)\, v^2$

E. $\frac{5}{v^2}(h - y)$

29. En la expresión

$y = mx + k$, m =

A. $\frac{y}{x} - k$

B. $\frac{y-k}{x}$

C. $y - \frac{k}{x}$

D. $\frac{y+k}{x}$

E. $y + \frac{k}{x}$

30. En la ecuación

$b^2 - 4ac = 0$, a =

A. $\frac{-b^2}{4c}$

B. $\frac{4b^2}{c}$

C. $\frac{-4b^2}{c}$

D. $\frac{b^2}{4c}$

E. $4b^2c$

31. Si $E = \frac{gt^2}{2}$, entonces t^2 es:

A. $2\ Eg$

B. $\frac{Eg}{2}$

C. $\frac{2E}{g}$

D. $\frac{E}{2g}$

E. $\frac{g}{2E}$

32. En la expresión
$5 = \pi r^2$, r^2 =

A. 5π

B. $\frac{\pi}{5}$

C. $\frac{5}{2\pi}$

D. $\frac{5}{\pi}$

E. $\frac{5}{r\pi}$

33. La frase "el doble de un número menos su cuarta parte" se expresa:

A. $n - \frac{n}{4}$

B. $2n - 4n$

C. $\frac{(8n - n)}{2}$

D. $\frac{2n}{4}$

E. $\frac{7n}{4}$

34. El 20% de un número sumado con el doble de él se expresa:

A. n

B. 2 n

C. 2,2 n

D. 22 n

E. 120 n

35. El 20% de x menos el 50% de y lo podemos expresar como:

A. $2x - 5y$

B. $\frac{2x-5y}{100}$

C. $\frac{2x+5y}{10}$

D. $0{,}02x - 0{,}05y$

E. $\frac{2x-5y}{10}$

36. Un número sumado con su quinta parte es 12. La ecuación que representa esta situación es:

A. $x + 12 = \frac{x}{5}$

B. $x + \frac{x}{5} = 12$

C. $12 + \frac{x}{5} = x$

D. $x - \frac{x}{5} = 12$

E. $x - 12 = \frac{x}{5}$

37. "La suma de dos números pares consecutivos es 106". Ésta se representa mediante la ecuación:

A. $2n + (2n + 1) = 106$

B. $4n + 1 = 106$

C. $4n + 2 = 106$

D. $n + n + 1 = 106$

E. $2n + 1 = 106$

38. Un poste está enterrado $\frac{2}{5}$ de su longitud, $\frac{2}{7}$ del resto está bajo agua y sobresalen 3 m. ¿Cuál es la longitud del poste?

A. 6 m.

B. 7 m.

C. 9 m.

D. 9,5 m.

E. 10 m.

39. Si un niño tiene el triple de la edad que tenía hace 6 años, ¿cuántos años tiene en la actualidad?

A. 3

B. 6

C. 9

D. 12

E. 18

40. Un comerciante compró 25 juguetes. Si hubiera comprado 5 juguetes más por el mismo valor, cada juguete le habría costado $ 10 menos. ¿Cuánto le costó cada juguete?

A. $ 10

B. $ 30

C. $ 50

D. $ 60

E. $ 80

41. Son soluciones de la inecuación $2x - 3 \leq 5$ los números:

I. 4 **II.** 5 **III.** 3

A. Sólo I

B. Sólo II

C. Sólo III

D. Sólo I y III

E. I, II y III

Prueba de selección múltiple

42. No son solución de la inecuación

$2x - 1 \leq x + 3$

I. 5 **II.** 3 **III.** 8

A. Sólo I

B. Sólo II

C. Sólo III

D. Sólo I y III

E. I, II y III

43. Si x distinto de cero, de las expresiones siguientes son verdaderas siempre:

I. $x^2 > 0$ **II.** $x^2 > x$ **III.** $|x| > 0$

A. Sólo I

B. Sólo II

C. Sólo III

D. I, II y II

E. Sólo I y III

44. De las desigualdades siguientes son siempre verdaderas:

I. $x^2+y^2 \geq 2xy$ **II.** $x + \frac{1}{x} > 2$

III. $x^2+4 \geq 4x$

A. Sólo I

B. Sólo II

C. Sólo I y III

D. Sólo III

E. I, II y III

45. La solución de la inecuación $3 - x \geq 1$ es:

A. $[-2, +\infty)$

B. $[2, +\infty)$

C. $(-\infty, -2]$

D. $(-\infty, 2]$

E. $[-2, 2]$

46. El intervalo solución de la inecuación $\frac{5x-3}{-2} < 0$ es:

A. $(3, 5)$

B. $\left(-\infty, \frac{3}{5}\right)$

C. $\left(-\infty, -\frac{3}{5}\right)$

D. $\left(\frac{3}{5}, +\infty\right)$

E. $\left(-\frac{3}{5}, +\infty\right)$

47. Al resolver la inecuación $\frac{2-3X}{5} < \frac{1-4x}{2}$ se obtiene que:

A. $x > \frac{1}{14}$

B. $x \geq \frac{1}{14}$

C. $x < \frac{1}{14}$

D. $x \leq \frac{1}{14}$

E. $x = \frac{1}{14}$

48. La inecuación $\frac{2-x}{3} - \frac{x-1}{2} \geq \frac{3-x}{4}$ es equivalente a:

A. $5x \geq 7$

B. $5x \geq -7$

C. $7x \geq 5$

D. $7x \leq 5$

E. $7x \leq -5$

49. La inecuación $(x-1)(x+3) \leq (x-2)^2$ es equivalente a:

A. $6 \leq 7x$

B. $6x \leq 7$

C. $6 \geq 7x$

D. $6x \geq 7$

E. $-6 \leq 7x$

50. La solución de la inecuación $(2x-1)(2-x) + (1+2x)(x+3) \geq 13$ es:

A. $(-\infty, 1]$

B. $(-\infty, 1)$

C. $(1, +\infty)$

D. $[1, +\infty)$

E. $(-1, 1)$

51. ¿Cuántos números naturales no cumplen la condición de que su tercera parte más 8 sea menor que su quíntuplo?

A. 1

B. 2

C. 3

D. Ninguno

E. Todos

52. ¿Cuántos números naturales cumplen la condición de que su décima parte es mayor o igual que su mitad disminuida en 2?

A. 1
B. 2
C. 3
D. 4
E. 5

53. "La quinta parte de un número disminuido en 3 es mayor que el doble de él". Esta proposición se escribe algebraicamente como:

A. $\frac{x-3}{5} > 2x$
B. $\frac{x}{5} - 3 > 2x$
C. $\frac{x-3}{5} < 2x$
D. $\frac{x}{5} - 3 < 2x$
E. $x - 10 < 2x$

54. El doble de un número natural se aumenta en 3. El doble de esta expresión resulta igual a 12. ¿Cuál es el número?

A. 1
B. 2
C. 3
D. 4
E. No existe

55. Los números enteros tales que su cuarta parte es menor que su mitad, disminuida en 2, son los números:

A. Menores que – 8
B. Menores que 8
C. Mayores que – 8
D. Mayores que 8
E. No hay

56. La solución de las inecuaciones simultáneas siguientes es:

$$\begin{array}{c|} x - 2 \geq 2x + 3 \\ 3x - 1 \leq 1 - 5x \\ \hline \end{array}$$

A. $(-\infty, -5)$
B. $(-\infty, -5]$
C. $\left(-5, \frac{1}{4}\right)$
D. $\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$
E. $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$

57. Son solución simultánea de ambas inecuaciones:

$$\begin{array}{c|} 5x \geq x - 8 \\ \frac{x}{4} + \frac{x}{3} \leq 2 \\ \hline \end{array}$$

I. –1 **II.** 0 **III.** 3

A. Sólo I
B. Sólo II
C. Sólo III
D. Sólo I y II
E. I, II y III

58. La solución simultánea de las siguientes inecuaciones es:

$$\begin{array}{c|} (x-1)(x+2) \leq (x-3)(x+1) \\ 2x - 3 \leq 2 - 3x \\ x(x+2) \geq (1+x)(x-3) \\ \hline \end{array}$$

A. $\left[-\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right]$
B. $\left[-\frac{1}{3}, 1\right]$
C. $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$
D. $\left[\frac{-3}{4}, -\frac{1}{3}\right]$
E. $\mathbb{R}$

59. La solución de $|3 - 2x| \leq 5$ es:

A. $[1, 4]$
B. $[1, -4]$
C. $[-1, 4]$
D. $[-1, -4]$
E. $(-1, -4)$

60. La solución de $|2x + 3| \geq 7$ es:

A. $(-\infty, -5) \cup (2, +\infty)$
B. $(-\infty, -5] \cup [2, +\infty)$
C. $[-5, 2]$
D. $(-5, 2)$
E. $(-5, +\infty)$

Soluciones

1. C	2. A	3. E	4. E	5. B
6. D	7. C	8. C	9. C	10. B
11. D	12. D	13. C	14. E	15. B
16. B	17. D	18. A	19. C	20. D
21. E	22. D	23. B	24. E	25. D
26. B	27. C	28. A	29. B	30. D
31. C	32. D	33. E	34. C	35. E
36. B	37. C	38. B	39. C	40. D
41. D	42. D	43. E	44. C	45. D
46. D	47. C	48. D	49. B	50. D
51. A	52. E	53. A	54. E	55. D
56. B	57. E	58. D	59. C	60. B

CAPÍTULO 3 Relaciones y funciones

Lógica 3.1

Una expresión del lenguaje a la cual puede aplicarse con sentido uno y sólo uno de los calificativos "verdadera" o "falsa" se denomina **proposición**.

Es decir, una **proposición** es una expresión susceptible de ser verdadera o falsa.

p: El ser humano es mortal
q: El perro tiene dos patas

Si una proposición es verdadera, diremos que su valor de verdad es **V** y si es falsa, diremos que su valor de verdad es **F**.

Se llama **función proposicional** o **proposición abierta** a una proposición en que el sujeto está dado en forma de símbolo y puede ser reemplazado por alguno de los elementos de un conjunto fijado con anterioridad.

p (x): x es un número natural $x \in \mathbb{N}$

Cada vez que el símbolo o variable (x) sea reemplazado por un elemento del conjunto (en este caso $\mathbb{N}$) la función proposicional pasa a ser proposición y tiene su valor de verdad.

Si x = 2 "2 es número natural" es V
Si x = 0,5 "0,5 es número natural" es F

Al conjunto al que pertenece la variable se le llama **dominio** o **universo** de la función proposicional.

Las funciones proposicionales pueden tener más de una variable.

q (x, y) : x e y viajaron en el buque Esmeralda el año 1992.

La **negación** de una proposición es aquella que modifica la proposición dándole sentido contrario.

p : 5 es mayor que 2

La negación de p se denota por $\sim p$

$\sim p$: 5 no es mayor que 2 o

$\sim p$: es falso que 5 es mayor que 2.

Axioma de la negación: p y $\sim p$ tienen valores de verdad contrarios.

p	~ p
V	F
F	V

Las proposiciones (proposiciones simples) que hemos definido dan origen a nuevas proposiciones (proposiciones compuestas) si éstas se conectan a través de los conectivos lógicos siguientes:

$\vee$: o (disyunción)

$\wedge$: y (conjunción)

$\Rightarrow$: si ...., entonces (condicional)

$\Leftrightarrow$: si y sólo si (bicondicional)

Ejemplo:

Si $a \bullet b = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$

$p : a \bullet b = 0$

$q : a = 0$

$r : b = 0$

Son proposiciones simples que dan origen a la proposición compuesta enunciada y que simbólicamente se escribe:

$p \Rightarrow (q \vee r)$

es decir $(a \bullet b = 0) \Rightarrow (a = 0 \ \vee b = 0)$

El condicional $p \Rightarrow q$ se puede expresar de las siguientes maneras:

p implica q

si p, entonces q

q es condición necesaria para p

p es condición suficiente para q.

El bicondicional $p \Leftrightarrow q$ se puede expresar de las siguientes maneras:

p si y sólo si q

q si y sólo si p

p es condición necesaria y suficiente para q

q es condición necesaria y suficiente para p

p es equivalente a q

q es equivalente a p

El valor de verdad de una proposición compuesta depende del valor de verdad de las proposiciones simples que la forman según las siguientes **tablas de verdad**.

Disyunción

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Conjunción

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Condicional

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Bicondicional

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

El conectivo disyunción $\vee$ se usa con una variante si se considera en forma excluyente. Se denota $\veebar$ y su tabla de verdad es:

Disyunción excluyente

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Se llama **tautología** a una proposición compuesta cuyo valor de verdad es verdadero (V) para cualquier combinación de los valores de verdad de las proposiciones simples que la componen.

Se llama **contradicción** a una proposición compuesta cuyo valor de verdad es falso (F) para cualquier combinación de los valores de verdad de las proposiciones simples que la componen.

Los símbolos $\forall$ y $\exists$ se llaman **cuantificador universal** y **cuantificador existencial**, respectivamente, y se leen "para todo" y "existe".

El cuantificador existencial presenta una variante que es $\exists!$, que significa "existe un único".

Ejemplos:

Si p (x) es una proposición abierta (o función proposicional) y E es el conjunto en el cual se define (dominio o universo de la función), entonces:

1. $(\forall\ x \in E)$, p(x) se lee: "para todo x en E, tal que p (x)" o "para cada x de E, p (x)".

2. $(\exists\ x \in E)$, p(x) se lee: "existe x en E tal que, p (x)" o "existe por lo menos un x en E tal que, p (x)".

3. $(\exists!\ x \in E)$, p(x) se lee: "existe un único x en E tal que, p (x)" o "existe sólo un $x \in E$ tal que p (x)".

así podemos decir que:

1. $(\forall x \in E)\ p(x) \Leftrightarrow [p(x_1) \wedge p(x_2) \wedge p(x_3) \wedge .....]$

2. $(\exists x \in E)\ p(x) \Leftrightarrow [p(x_1) \vee p(x_2) \vee p(x_3) \vee .....]$

3. $(\exists!\ x \in E)\ p(x) \Leftrightarrow [p(x_1) \veebar p(x_2) \veebar p(x_3) \veebar .....]$

Si a una función proposicional se le agrega un cuantificador, ésta pasa a ser una proposición, puesto que tiene un valor de verdad.

Ejemplo:

Sea p (x): x es un múltiplo de 2

$E = \{x \in \mathbb{N} / x < 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$(\forall x \in E)$, p (x) es falsa, puesto que hay elementos de E que no son pares.

$(\exists x \in E)$, p (x) es verdadera, puesto que hay al menos un elemento de E que es par.

$(\exists!\ x \in E)$, p (x) es falsa, ya que existe más de un elemento de E que es par.

Leyes de Morgan para cuantificadores.

1. $\sim (\forall x \in E), p(x) \Leftrightarrow (\exists x \in E), \sim p(x)$

2. $\sim (\exists x \in E), p(x) \Leftrightarrow (\forall x \in E), \sim p(x)$

En palabras:

1. "Es falso que para todo x en E se cumple p (x)" es equivalente a "existe algún x en E tal que no se cumple p (x)".

2. "Es falso que existe x en E tal que se cumple p (x)" es equivalente a" para todo x en E, no se cumple p (x)".

Ejercicios resueltos

1. Determinar cuáles de las siguientes expresiones del lenguaje son proposiciones y determinar su valor de verdad.

a) ¿Qué hora es?
b) El árbol pertenece al reino vegetal
c) El queso es un subproducto de la leche
d) En Chile en invierno la temperatura ambiente pasa de 35°
e) Voy a salir, vuelvo más tarde
f) Cierra la puerta

Solución:

a) No es proposición, no podemos asignarle un valor de verdad
b) Es proposición y es verdadera
c) Es proposición y es verdadera
d) Es proposición y es falsa
e) No es proposición, no podemos asignarle un valor de verdad
f) No es proposición

2. Determinar cuáles de las siguientes expresiones son proposiciones y cuáles son funciones proposicionales.

   a) Los números mayores que 2 son negativos.

   b) El número entero x es mayor que 10.

   c) Los múltiplos de 3 son infinitos.

   d) Los enteros x e y son factores de 12.

   Solución:

   a) Proposición; su valor de verdad es falso.

   b) Función proposicional; según el valor que tome x, su valor de verdad será verdadero o falso.

   c) Proposición; su valor de verdad es verdadero.

   d) Función proposicional; según los valores que tomen x e y será su valor de verdad.

3. Sean $p : x \cdot y > 0$, $q: x > 0$, $r: y > 0$
   $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y \neq 0$.

   a) Explicar qué significa $\sim q$, $\sim r$, $\sim p$

   b) Escribir en símbolos la siguiente proposición: "el producto de dos números reales es mayor que cero si y sólo si ambos son positivos o ambos son negativos".

   c) Escribir en palabras la siguiente proposición:
   $\sim p \Leftrightarrow (\sim q \wedge r) \vee (q \wedge \sim r)$

   Solución:

   a) Como $x, y \in \mathbb{R}$ y $x, y \neq 0$ entonces
   $\sim q : x < 0$ y $\sim r : y < 0$
   $\sim p : x \cdot y < 0$

   b) $p : x \cdot y > 0$: el producto de dos números x e y reales es mayor que cero.

   $q : x > 0$: x es mayor que cero
   $r : y > 0$: y es mayor que cero
   $\therefore\ p \Leftrightarrow (q \wedge r) \vee (\sim q \wedge \sim r)$

   c) $\sim p \Leftrightarrow (\sim q \wedge r) \vee (q \wedge \sim r)$

   El producto de dos números reales es negativo si y sólo si el primero es negativo y el segundo positivo o el primero es positivo y el segundo negativo.

4. Demostrar que si p, q y r son proposiciones, entonces:
   $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

   Para hacer esta demostración haremos la tabla de verdad de la proposición compuesta:

p	q	r	① p⇒q	② q⇒r	③ ①∧②	④ p⇒r	③⇒④
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	F	V	F	V	V
F	F	F	F	V	F	V	V

Observamos que ③ ⇒ ④ es una manera de escribir más brevemente la proposición.

$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ es verdadera para cualquier combinación de valores de verdad de las proposiciones simples que la componen.

5. Sean las siguientes proposiciones

$p: \forall x \in \mathbb{N}, x + 2 > 0$

$q: \exists x \in \mathbb{N}, x - 1 \notin \mathbb{N}$

a) Determinar su valor de verdad

b) Escribir $\sim p$ y $\sim q$

Solución:

a) p es verdadera, ya que para todo número natural x, $x + 2 > 0$
q es verdadera, porque existe un número natural x tal que $x - 1$ no es natural. Ese número es 1, ya que $1 - 1 = 0 \notin \mathbb{N}$

b) $\sim p : \exists x \in \mathbb{N}, x + 2 \leq 0$

c) $\sim q : \forall x \in \mathbb{N}, x - 1 \in \mathbb{N}$

6. Sea $A = \{x \in \mathbb{N} / x < 5\}$ y $B = \{ y \in \mathbb{N} / y < 4\}$

Sean las proposiciones:

$p: (\forall x \in A)(\exists y \in B), x + y < 6$

$q: (\exists x \in A)(\exists y \in B), x \bullet y = 15$

a) Determinar el valor de verdad de cada proposición

b) Escribir $\sim p$ y $\sim q$

Solución: Vemos que $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$

a) p es verdadero, ya que para todo número de A existe un número de B tal que la suma es menor que 6.

q es falso, ya que no existe ningún número en A ni ningún número en B tal que su producto sea 15.

b) $\sim p: (\exists x \in A)(\forall y \in B)\ \ x + y \geq 6$
$\sim q: (\forall x \in A)(\forall y \in B)\ \ x \bullet y \neq 15$

Ejercicios

1. Determine si las siguientes expresiones son o no proposiciones.

   Si lo son, determine su valor de verdad.

   a) p: Rembrandt es un pintor famoso.
   b) q: La velocidad se define como distancia recorrida en un tiempo dado.
   c) r: El 25% de 400 es 200.
   d) s: Las gallinas son mamíferos
   e) t: Vengan a tomar el té.
   f) u: 13 es un número par.
   g) v: Pintemos esa casa.
   h) w: 25 es la décima parte de 250.

2. Determine cuáles de las siguientes expresiones son proposiciones y cuáles son funciones proposicionales.

   a) El conjunto de los números naturales es parte de los números reales.
   b) Un número racional se puede escribir de muchas maneras.
   c) Los racionales $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{8}$ son equivalentes.
   d) x en Q es equivalente a $\frac{3}{4}$
   e) El número entero x se puede escribir como un racional.
   f) α es un ángulo agudo.
   g) 60^{o} es el suplemento de 120^{o}.
   h) Los enteros x e y son factores de 15.

3. Usando cuantificadores, transforme las funciones proposicionales del ejercicio anterior en proposiciones verdaderas.

4. Sean p, q, r, proposiciones simples, T tautología y C contradicción. Demuestre que las siguientes proposiciones son tautologías.

   a) $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$
   b) $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

   $\Big\}$ Leyes de Morgan

   c) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$

   d) $p \vee T \Leftrightarrow T$
   $p \wedge T \Leftrightarrow p$
   $p \vee C \Leftrightarrow p$
   $p \wedge C \Leftrightarrow C$

   $\Big\}$ Leyes de Identidad

   e) $p \vee p \Leftrightarrow p$
   $p \wedge p \Leftrightarrow p$

   $\Big\}$ Leyes de Idempotencia

   f) $[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$
   $[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$

   $\Big\}$ Leyes de Asociatividad

   g) $p \Rightarrow p \vee q$; $p \wedge q \Rightarrow p$

   h) $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$

   i) $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
   $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

   $\Big\}$ Leyes de Conmutatividad

j) $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$
$[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$ } Leyes de Distributividad

k) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$

l) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \Leftrightarrow \sim q)$

5. Sea A el conjunto de los seres humanos.

Sean las siguientes proposiciones:

a) $p : (\forall h_1 \in A)\ (\exists! h_2 \in A)\ (h_2$ es padre de $h_1)$
b) $q : (\exists h_3 \in A)\ (\forall h_4 \in A)\ (h_3$ es hermano de $h_4)$
c) $r : (\forall h \in A)\ (h$ es mortal$)$
d) $s : (\exists h \in A)\ (h$ es mortal$)$

Escriba cada proposición en palabras y determine su valor de verdad.

6. Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales.

Sean las siguientes proposiciones:

a) $p : (\forall x \in \mathbb{N}), (\exists y \in \mathbb{N})\ x + y > 10$
b) $q : (\forall x \in \mathbb{N}), (\forall y \in \mathbb{N})\ x \bullet y \in \mathbb{N}$
c) $r : (\exists x \in \mathbb{N}), (\exists y \in \mathbb{N})\ x \bullet y = 3$
d) $s : (\exists x \in \mathbb{N}), (\forall y \in \mathbb{N})\ x \bullet y = y$

Escriba cada proposición en palabras y determine su valor de verdad.

7. Escriba la negación de las cuatro proposiciones del ejercicio anterior. Determine su valor de verdad, y si es falsa, muestre un contraejemplo.

8. Sea p (x): x es solución de la ecuación $x^2 - 4 = 0$

Sea $E = \{-2, 0, 2\}$

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $p : \forall x \in E, p(x)$
b) $q : \exists x \in E, p(x)$
c) $r : \exists! x \in E, p(x)$
d) $s : \forall x \in E, \sim p(x)$
e) $t : \exists x \in E, \sim p(x)$

9. Sean las siguientes proposiciones:

$p : (\forall x \in \{1, 3, 5\})\ (\exists y \in \{2, 4, 6\})$, (x es mayor que y)

$q : (\exists x \in \{1, 3, 5\})\ (\forall y \in \{2, 4, 6\})$, (x es mayor que y)

a) Escriba p y q en lenguaje corriente.
b) Determine el valor de verdad de p y q.
c) Escriba simbólicamente ~ p y ~ q.

10. Sean p (x) : x es mayor que – 3 y menor que 2
q (x) : x es mayor que – 1 y menor que 4
r (x) : x es mayor que 0 y menor que 1
s (x) : x es mayor que 3 y menor que 5

Para las siguientes proposiciones, determine el valor de verdad y dé un ejemplo de las verdaderas.

a) $(\exists x \in \mathbb{N}),\ p(x) \wedge q(x)$

b) $(\exists x \in \mathbb{N}),\ p(x) \wedge q(x) \wedge r(x)$

c) $(\exists x \in \mathbb{R}),\ p(x) \wedge q(x) \wedge r(x)$

d) $(\exists x \in \mathbb{Z}),\ p(x) \vee s(x)$

e) $(\forall x \in \mathbb{N}),\ \sim (r(x) \wedge s(x))$

f) $(\exists x \in \mathbb{N}),\ \sim (r(x) \vee s(x))$

g) $(\exists x \in \mathbb{N}),\ \sim p(x) \wedge r(x)$

h) $(\forall x \in \mathbb{Z}),\ \sim r(x)$

Soluciones

1. a) proposición verdadera
   b) proposición verdadera
   c) proposición falsa
   d) proposición falsa
   e) no es proposición
   f) proposición falsa
   g) no es proposición
   h) proposición verdadera

2. a) proposición
   b) proposición
   c) proposición
   d) función proposicional
   e) función proposicional
   f) función proposicional
   g) proposición
   h) función proposicional

3. d) $(\exists\, x \in Q)\ x = \frac{3}{4}$
   e) $(\forall x \in \mathbb{Z})$ x se puede escribir como fracción
   f) $(\forall\ \alpha < 90°)\ \alpha$ es agudo
   h) $(\exists x, \exists\, y \in \mathbb{Z}),\ x \cdot y = 15$

4. a)

p	q	p ∨ q	~(p ∨ q)	~p	~ q	~ p ∧ ~ q
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

Comparando ambas columnas se ve que $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

b)

p	q	p ∧ q	~(p ∧ q)	~p	~ q	~ p ∨ ~ q
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Comparando ambas columnas se ve que $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

c)

p	q	p ⇒ q	~p	~ p ∨ q
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Comparando ambas columnas se ve que $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$

d)

p	T	p ∨ T
V	V	V
F	V	V

$p \vee T \Leftrightarrow T$

p	T	p ∧ T
V	V	V
F	V	F

$p \wedge T \Leftrightarrow p$

p	C	p ∨ C
V	F	V
F	F	F

$p \vee C \Leftrightarrow p$

p	C	p ∧ C
V	F	F
F	F	F

$p \wedge C \Leftrightarrow C$

e)

p	p ∨ p
V	V
F	F

$p \vee p \Leftrightarrow p$

p	p ∧ p
V	V
F	F

$p \wedge p \Leftrightarrow p$

f)

p	q	r	p ∧ q	(p ∧ q) ∧ r	q ∧ r	p ∧ (q ∧ r)
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	V	F
F	V	F	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

Comparando ambas columnas observamos que $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$

p	q	r	p ∨ q	(p ∨ q) ∨ r	q ∨ r	p ∨ (q ∨ r)
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F

Comparando ambas columnas observamos que $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

g)

p	q	$p \vee q$	$p \Rightarrow (p \vee q)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	V

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

Observando la última columna en cada caso se ve que $p \Rightarrow (p \vee q)$ y $(p \wedge q) \Rightarrow p$ son siempre verdaderas.

h)

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
V	F	V
F	V	F

$p \Leftrightarrow \sim(\sim p)$

i)

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	F

$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	F	F

$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$

j)

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee q$	$p \vee r$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	F	F	F
F	F	V	F	F	V	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	F	V	V
V	F	V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

k)

p	q	p⇒q	~q	~p	~q⇒~p
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$

l)

p	q	p⇔q	~p	~q	~p⇔~q
V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \Leftrightarrow \sim q)$

5. a) p: para todo hombre existe un único padre. Verdadero
   b) q: existe un hombre que es hermano de todos los hombres. Falso
   c) r: todo hombre es mortal. Verdadero
   d) s: existe un hombre mortal. Verdadero

6. a) p: para todo número natural existe algún número natural tal que su suma es mayor que 10. Verdadero
   b) q: para todo par de números naturales, su producto es un número natural. Verdadero
   c) r: existen dos números naturales tal que su producto es 3. Verdadero
   d) s: existe un número natural tal que su producto con cualquier número natural da este cualquier número natural. Verdadero

7. a) $\sim p : (\exists\, x \in \mathbb{N})\ (\forall\, y \in \mathbb{N})\ x + y \leq 10$. Falso
   Si $y = 10$ no hay ningún natural que sumado con 10 sea menor que 10
   b) $\sim q : \exists x \in \mathbb{N}, \exists\, y \in \mathbb{N}, x \cdot y \notin \mathbb{N}$. Falso
   No existe ningún par de números naturales tales que su producto no sea número natural
   c) $\sim r : \forall x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}, x \cdot y \neq 3$. Falso. $3 \cdot 1 = 3$
   d) $\sim s : \forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, x \cdot y \neq y$. Falso. $1 \cdot 5 = 5$

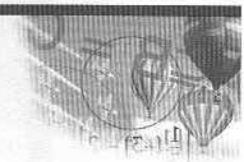
8. a) p es falso, 0 no es solución de $x^2 - 4 = 0$
   b) q es verdadero, 2 es solución de $x^2 - 4 = 0$
   c) r es falso, 2 y -2 son soluciones
   d) s es falso, 2 es solución de $x^2 - 4 = 0$
   e) t es verdadero, 0 no es solución de $x^2 - 4 = 0$

9. a) p: para cada x en {1, 3, 5} existe un y en {2, 4, 6} tal que x es mayor que y
   q: existe x en {1, 3, 5} tal que para cada y en {2, 4, 6} x es mayor que y
   b) p es falso (1 no es mayor que ningún y)
   q es falso (no hay ningún x que sea mayor que todos los y)
   c) $\sim p : (\exists\, x \in \{1, 3, 5\})\ (\forall\, y \in \{2, 4, 6\})\ (x \leq y)$
   $\sim q : (\forall\, x \in \{1, 3, 5\})\ (\exists\, y \in \{2, 4, 6\})\ (x \leq y)$

10. a) Verdadero, ejemplo: el 1
    b) Falso.
    c) Verdadero, ejemplo $\frac{1}{2}$
    d) Verdadero, ejemplo -2
    e) Verdadero, $r(x) \wedge s(x)$ es vacío

f) Verdadero, ejemplo 2
g) Falso
h) Verdadero, todos los enteros son menores o iguales que 0 o mayores o iguales que 1

Conjuntos 3.2



3.2.1 Conceptos básicos

Una teoría matemática se fundamenta y se va construyendo a partir de esos fundamentos, encadenando los nuevos conocimientos o proposiciones que se basan en las anteriores. Es así como se parte de **términos no definidos** o **conceptos fundamentales**. Luego hay proposiciones que relacionan estos conceptos fundamentales y que son tan evidentes que se aceptan como verdaderas. Estas proposiciones se denominan **axiomas** de la teoría. Siguiendo con la construcción, aparecen las proposiciones, cuya veracidad debe ser probada o demostrada. Son los llamados **teoremas**, que según su importancia se pueden denominar: proposición, lema, corolario o teorema.

En la teoría de conjuntos aceptamos como términos no definidos las ideas de "conjunto", "elemento" y "pertenencia"; son tres palabras que usamos, que entendemos, pero que no definimos.

Los conjuntos se denotan por letras mayúsculas, sus elementos por letras minúsculas y se escriben entre corchetes.

$A = \{a, e, i, o, u\}$ $\quad$ $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

La relación de pertenencia se simboliza por $\in$ y la negación de ella es $\notin$.

Así	$a \in A$	Verdadero
	$i \in B$	Falso
	$3 \notin A$	Verdadero
	$5 \notin B$	Falso

Los conjuntos se definen por **extensión** (nombrando todos sus elementos) o por **comprensión** (indicando la característica que poseen sus elementos y que no poseen los elementos que no son del conjunto).

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ $\quad$ $B = \{x/x \text{ es dígito}\}$
$P = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ $\quad$ $Q = \{x \in \mathbb{Z} / -3 < x < 3\}$
A y P están definidos por extensión
B y Q están definidos por comprensión

Conjunto vacío: es el conjunto que no contiene elementos. En símbolo $\{\}$ o $\varnothing$.

Conjunto universo: es el conjunto que contiene a todos los elementos. Se puede definir de acuerdo con el contexto en que se esté trabajando. Se denota por U.

Subconjunto: dado un conjunto no vacío A, se llama subconjunto de A a todo conjunto B tal que todo elemento de B está en A. Se anota $B \subset A$.

En símbolos:

$B \subset A \Leftrightarrow (\forall x \in B)\, x \in A$

El conjunto vacío es subconjunto de todo conjunto.

Conjunto potencia: se llama conjunto potencia de A y se denota P(A) al conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos del conjunto A.

$P(A) = \{B / B \subset A\}$
Ejemplo: si $A = \{1, 2, 3\}$
$P(A) = \{ \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \varnothing \}$

Se llama **cardinalidad** de un conjunto al número de elementos que el conjunto tiene.

A representa la cardinalidad de A.
En el ejemplo anterior $\# A = 3$ y $\# P(A) = 8$

En general, la cardinalidad del conjunto potencia de un conjunto dado es igual a 2 elevado a la cardinalidad del conjunto. Es decir:

Si $\# A = n$ entonces $\# P(A) = 2^n$

Igualdad de conjuntos: dos conjuntos A y B son iguales si y sólo si tienen los mismos elementos. En símbolos:

$(A = B) \Leftrightarrow (\forall x \in A), x \in B \wedge (\forall x \in B), x \in A$

En otras palabras y de acuerdo con la definición de subconjunto:

$(A = B) \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A)$

Equivalencia de conjuntos: dos conjuntos son equivalentes si y sólo si tienen el mismo número de elementos (igual cardinalidad). En símbolos:

$(A \sim B) \Leftrightarrow (\# A = \# B)$

Ejercicios resueltos

1. Escribir por extensión los siguientes conjuntos:

a) $B = \{x \in \mathbb{Z} / -5 \leq x \leq 5\}$

b) C = {x / x es dígito del número 4.552.361}

Solución:

a) $B = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

b) $C = \{4, 5, 2, 3, 6, 1\}$

2. Escribir por comprensión los siguientes conjuntos:

a) $A = \{2, 4, 6, 8\}$

b) $B = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7} \right\}$

Solución:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ es par} \wedge x < 10\}$

b) $B = \{ \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N} \wedge 2 \leq n \leq 7\}$

3. Hay conjuntos que no se pueden escribir por extensión porque contienen infinitos elementos. Ejemplo:

$A = \{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x \leq 5\}$

Este tipo de conjuntos se puede escribir como intervalo y graficar como subconjunto de $\mathbb{R}$ en la recta numérica. Ver cap. 2 (2.3.2).

Graficar los siguientes conjuntos en la recta numérica y escribirlos como intervalo.

a) $A = \{x \in \mathbb{R} / x > 3\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -5\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} / x < 8\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} / x \leq -1\}$

e) $E = \{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x \leq 5\}$

f) $F = \{x \in \mathbb{R} / 2 < x < 3\}$

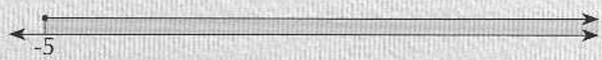
g) $G = \{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x < 2\}$

h) $H = \{x \in \mathbb{R} / -3 < x \leq 1\}$

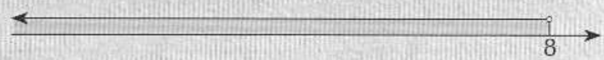
Solución:

$A = (3, +\infty)$

$B = [-5, +\infty)$

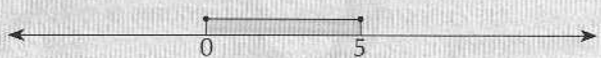


$C = (-\infty, 8)$

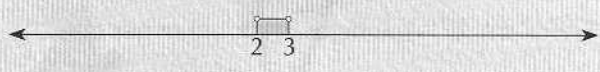


$D = (-\infty, -1]$

$E = [0, 5]$



$F = (2, 3)$



$G = [-1, 2)$

$H = (-3, 1]$

4. Dados los conjuntos A = {dígitos de 125} y B = {vocales de la frase "hace frío"}

Ejercicios resueltos

Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

Solución:

a) $2 \in A$	**a)** verdadero porque 2 pertenece a A
b) $5 \in B$	**b)** falso porque 5 no pertenece a B
c) $i \notin B$	**c)** falso porque i pertenece a B
d) $u \in B$	**d)** falso porque u no pertenece a B
e) $e \in B$	**e)** verdadero porque e pertenece a B
f) $f \in B$	**f)** falso porque f no pertenece a B
g) $125 \notin A$	**g)** verdadero porque 125 no pertenece a A
h) $1 \notin A$	**h)** falso porque 1 pertenece a A
i) $a \notin A$	**i)** verdadero porque a no pertenece a A

5. Sea $A = \{2, 4, 6\}$. Encontrar todos los subconjuntos de A y formar el conjunto potencia de A.

Solución:

Son subconjuntos de A los siguientes conjuntos:

$\{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2,4\}, \{2,6\}, \{4,6\}, A, \varnothing$.

$P(A) = \{\{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2,4\}, \{2,6\}, \{4,6\}, A, \varnothing.\}$

6. Dados los siguientes conjuntos, determinar cuáles de ellos son iguales y cuáles son equivalentes.

A = {a,e,i,o,u}

B = $\{x \in \mathbb{N} / x \leq 5\}$

C = {vocales de la frase "hace mucho frío"}

D = $\{x \in \mathbb{N} / x + 1 \leq 6\}$

Solución:

$\#A = 5$, $\#B = 5$, $\#C = 5$, $\#D = 5$

por lo tanto, todos son equivalentes, pero sólo son iguales

$A = C$ y $B = D$

Nota: $A = B \Rightarrow A \sim B$, pero el recíproco no se cumple.

Ejercicios

1. Escriba por extensión los siguientes conjuntos:

a) $A = \{$múltiplos de 5 menores que 40$\}$

b) $B = \{$divisores de 36$\}$

c) $C = \{$números primos menores que 20$\}$

d) $D = \{x / x = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}, n \leq 10\}$

e) $E = \{n^2 + 1 / n \in \mathbb{N}\}$

f) $F = \{2n / n \in \mathbb{N}\}$

g) $G = \{2n - 1 / n \in \mathbb{N}\}$

h) $H = \{n(n + 1) / n \in \mathbb{N}, n < 5\}$

i) $I = \{$factores primos de 36$\}$

2. Escriba por comprensión los siguientes conjuntos:

a) $A = \{3, 6, 9, 12, 15\}$

b) $B = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} ...\right\}$

c) $C = \{1, 3, 9, 27, 81...\}$

d) $D = \{0, 3, 8, 15, 24, 35, 48...\}$

e) $E = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} ...\right\}$

f) $F = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{7}, \frac{6}{8} ...\right\}$

g) $G = \{1, 2, 4, 8\}$

h) $H = \{1, 2, 5, 10\}$

i) $I = \{4, 8, 12, 16, 20, 24\}$

3. Grafique en la recta numérica cada uno de los siguientes conjuntos y escríbalos como intervalo:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 3\}$

b) $B = \{y \in \mathbb{R} / y \leq 5\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} / x > -4\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} / x < 2\}$

e) $E = \{y \in \mathbb{R} / -1 < y < 7\}$

f) $F = \{x \in \mathbb{R} / 3 \leq x \leq 5\}$

g) $G = \{x \in \mathbb{R} / -5 < x \leq 0\}$

h) $H = \{x \in \mathbb{R} / -3 \leq x < 3\}$

4. Dados los siguientes conjuntos:

A = {factores de 36}
B = {factores de 24}

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $6 \in A \wedge 6 \notin B$

b) $4 \in A \wedge 4 \in B$

c) $12 \notin A \vee 12 \in B$

d) $9 \in A \wedge 9 \notin B$

e) $36 \in A \vee 36 \in B$

f) $8 \notin A \wedge 8 \notin B$

g) $1 \in A \wedge 1 \in B$

h) $1 \in A \vee 1 \notin B$

5. Dados los conjuntos siguientes:

$A = \{x \in \mathbb{N} / x < 5\}$
$B = \{x \in \mathbb{Z} / -2 \leq x \leq 2\}$

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $A \subset B$

b) $\varnothing \subset A$

c) $B \subset A$

d) $\{\varnothing\} \subset A$

e) $\{x \in \mathbb{N} / -1 \leq x \leq 1\} \subset B$

f) $A \not\subset B$

g) $B \not\subset A$

h) $\{1, 2, 3\} \not\subset A$

i) $A \subset A$

j) $B \subset B$

6. Sea $A = \{x / x$ es divisor de $25\}$

a) Encuentre todos los subconjuntos de A.

b) Escriba el conjunto potencia de A.

7. Sea M un conjunto tal que $\# M = 8$ ¿Cuántos subconjuntos de M se pueden formar?

8. Sea la expresión "n|m" que significa que n divide a m. Sean los conjuntos:

$M = \{x \in \mathbb{N} / x \mid 10\}$
$N = \{x \in \mathbb{N} / x \mid 5\}$
$P = \{x \in \mathbb{N} / x \mid 2\}$

a) Escriba M, N y P por extensión.

b) Determine cuáles son equivalentes.

c) Determine el número de subconjuntos de cada uno.

9. Sean los siguientes conjuntos:

$A = \{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x \leq 2\}$
$B = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 1\}$
$C = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -1\}$

a) Grafique A, B y C en la misma recta numérica.

b) Escriba A, B y C como intervalo.

c) Escriba el conjunto de elementos comunes a los tres conjuntos dados.

d) Escriba el conjunto de elementos comunes a A y B.

e) Escriba el conjunto de elementos comunes a A y C.

f) Escriba el conjunto de elementos comunes a B y C.

10. Sean los siguientes conjuntos:

$M = \{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x \leq 2\}$
$N = \{x \in \mathbb{R} / x > 2\}$

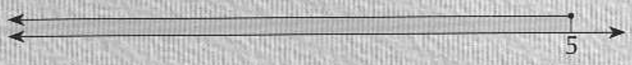
Encuentre el conjunto de elementos que pertenecen a M y a N.

1. a) $A = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35\}$
   b) $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$
   c) $C = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$
   d) $D = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{9}{10}, \frac{10}{11}\right\}$
   e) $E = \{2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65, ...\}$
   f) $F = \{2, 4, 6, 8, 10.....\}$
   g) $G = \{1, 3, 5, 7, 9, 11.....\}$
   h) $H = \{2, 6, 12, 20\}$
   i) $I = \{1, 2, 3\}$

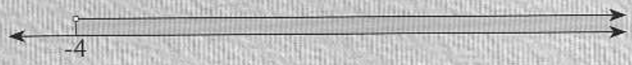
2. a) A = {múltiplos de 3 menores que 18}
   b) $B = \{\frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}\}$
   c) $C = \{3^n / n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}$
   d) $D = \{n^2 - 1 / n \in \mathbb{N}\}$
   e) $E = \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\right\}$
   f) $F = \left\{\frac{n-1}{n+1} / n \in \mathbb{N}\right\}$
   g) G = {factores de 8}
   h) H = {factores de 10}
   i) I = {múltiplos de 4 menores que 28}

3. a) $A = [3, +\infty)$

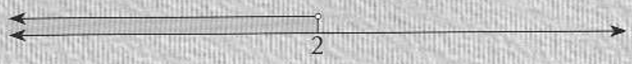
   b) $B = (-\infty, 5]$



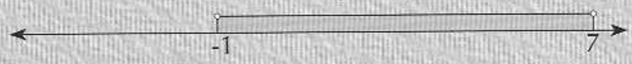
   c) $C = (-4, +\infty)$



   d) $D = (-\infty, 2)$



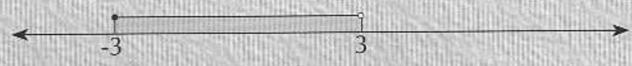
   e) $E = (-1, 7)$



   f) $F = [3, 5]$

   g) $G = (-5, 0]$

   h) $H = [-3, 3)$



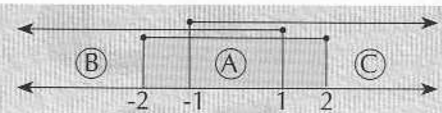
4. a) falso, porque $6 \in B$
   b) verdadero
   c) verdadero
   d) verdadero
   e) verdadero
   f) falso, porque $8 \in B$
   g) verdadero
   h) verdadero

5. a) falso, $3 \in A \wedge 3 \notin B$
   b) verdadero
   c) falso, $0 \in B \wedge 0 \notin A$
   d) falso, $\varnothing \notin A$
   e) verdadero
   f) verdadero
   g) verdadero
   h) falso, $\{1, 2, 3\} \subset A$
   i) verdadero
   j) verdadero

6. a) $\{1\}, \{5\}, \{25\}, \{1,5\}, \{1,25\}, \{5,25\}, A, \varnothing$
   b) $P(A) = \{\{1\}, \{5\}, \{25\}, \{1,5\}, \{1,25\}, \{5,25\}, A, \varnothing\}$

7. 256

8. a) $M = \{1, 2, 5, 10\}$ $N = \{1, 5\}$ $P = \{1, 2\}$
   b) $N - P$
   c) $\# P(M) = 16$, $\# P(N) = 4$, $\# P(P) = 4$

9. a) 

b) $A = [-2, 2]$; $B = (-\infty, 1]$; $C = [-1, +\infty)$

c) $\{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x \leq 1\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x \leq 1\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x \leq 2\}$

f) $\{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x \leq 1\}$

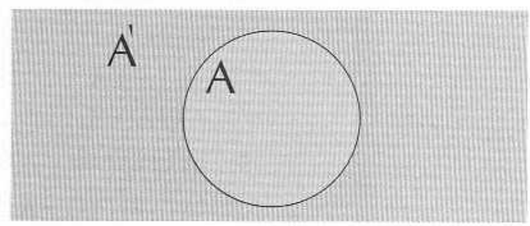
10. $\varnothing$

3.2.2 Operaciones entre conjuntos

Los conjuntos en general y sus operaciones suelen graficarse a través de una figura llamada diagrama de Venn-Euler. A continuación definiremos las operaciones más usuales y las graficaremos según el diagrama de Venn-Euler. Consideraremos el conjunto Universal como el rectángulo que contiene a todos los demás conjuntos.

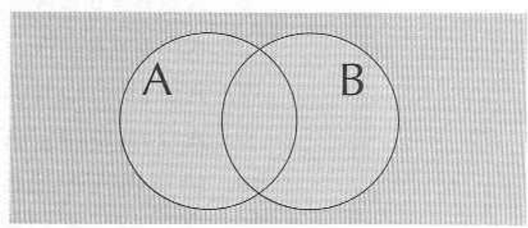
Complemento: Dado un conjunto A, llamaremos complemento de A y lo denotaremos por A', A^C o $\overline{A}$ al conjunto que contiene a todos los elementos del universo que no están en A.

$A' = \{x \in U / x \notin A\}$



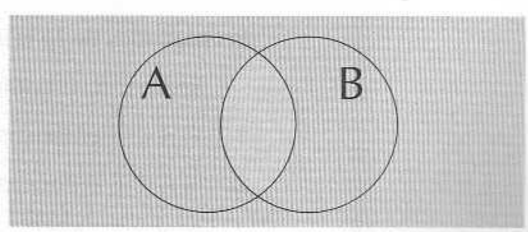
Unión de conjuntos: Dados dos conjuntos A y B, se llama unión de A y B y se denota por **A ∪ B** al conjunto que contiene los elementos de A, los elementos de B y los elementos que están en ambos conjuntos.

$A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$



Intersección de conjuntos: Dados dos conjuntos A y B, se llama **intersección** de A y B y se denota **A ∩ B** al conjunto que contiene a los elementos que están simultáneamente en ambos conjuntos:

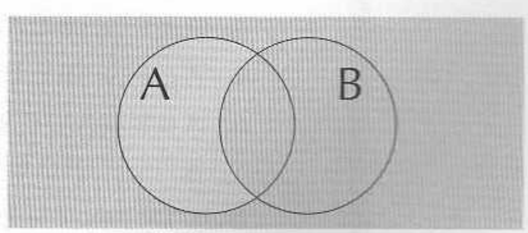
$A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$



Dos conjuntos cuya intersección es vacía se denominan **conjuntos disjuntos**.

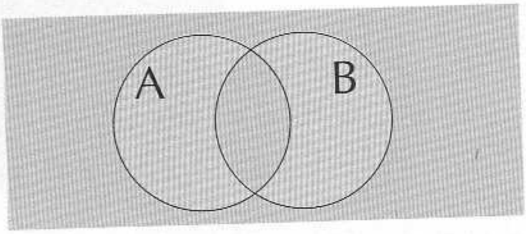
Diferencia de conjuntos: Dados dos conjuntos A y B, se llama **Diferencia** de A y B, se denota **A–B** al conjunto que contiene a los elementos de A que no están en B.

$A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$



Otra forma de definir el complemento de A es según la diferencia.

$A' = U - A = \{x / x \in U \wedge x \notin A\}$



Diferencia simétrica de conjuntos:

Dados dos conjuntos A y B se llama **diferencia simétrica** de A y B y se denota **$A \Delta B$** al conjunto que contiene a los elementos que están en A y no están en B más los elementos que están en B y no están en A.

$A \Delta B = \{x / (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$

$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

Propiedades de la operaciones entre conjuntos.

Sean A, B, C conjuntos contenidos en el universo U.

1. $(A')' = A$

2. $U' = \varnothing$ $\quad$ $\varnothing' = U$

3. $A - A = \varnothing$ $\quad$ $A - \varnothing = A$

4. $A \cup \varnothing = A$ $\quad$ $A \cap \varnothing = \varnothing$

$A \cup U = U$ $\quad$ $A \cap U = A$

$A \cup A = A$ $\quad$ $A \cap A = A$ $\quad$ Idempotencia

$A \cup A' = U$ $\quad$ $A \cap A' = \varnothing$

5. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $\quad$ Leyes de la

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ $\quad$ Asociatividad

6. $A \cup B = B \cup A$ $\quad$ Leyes de la

$A \cap B = B \cap A$ $\quad$ Conmutatividad

7. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $\quad$ Leyes de la

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $\quad$ Distributividad

8. $(A \cup B)' = A' \cap B'$ $\quad$ Leyes de Morgan

$(A \cap B)' = A' \cup B'$

Propiedades de la relación de inclusión entre conjuntos.

Sean A, B, C conjuntos en un universo U.

1. Si $A \subset B$ entonces $A \cup B = B \wedge A \cap B = A$

2. Si $A \subset B$ entonces $A - B = \varnothing$

3. $(\forall A \in U)\ A \subset A$ $\quad$ prop. reflexiva

4. $A \subset B \ \wedge \ B \subset A \Rightarrow A = B$ $\quad$ prop. antisimétrica

5. $A \subset B \ \wedge \ B \subset C \Rightarrow A \subset C$ $\quad$ prop. transitiva

6. $A \subset B \Rightarrow A \cup C \subset B \cup C \ \wedge$

$A \cap C \subset B \cap C$

Nota: Las propiedades 3, 4 y 5 dan a la relación de inclusión la característica de relación de orden (ver punto 3.3).

Observación: Si A y B son conjuntos disjuntos, entonces:

$A \cap B = \varnothing \ ; \ A - B = A \ ; \ B - A = B$

Ejercicios resueltos

1. Sean $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ y $C = \{4, 5, 6\}$

Hallar: **a)** $A \cap B$
b) $A \cup B$
c) $A \cup B \cup C$
d) $A \cap B \cap C$
e) $A - B$
f) $B \Delta C$

Solución:

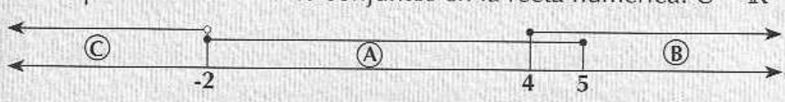
a) $A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\} = \{3\}$
b) $A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
c) $A \cup B \cup C = \{x / x \in A \vee x \in B \vee x \in C\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
d) $A \cap B \cap C = \{x / x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C\} = \varnothing$
e) $A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\} = \{1, 2\}$
f) $A \Delta B = \{x / (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\} = \{1, 2, 4, 5\}$

2. Sean $A = \{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 4\}$
$C = \{x \in \mathbb{R} / x < -2\}$

Hallar **a)** $A \cap B$
b) $B \cup C$
c) A'
d) C'
e) $(A \cap B)'$
f) $(A \cup B) - B$

Solución:

Representemos los tres conjuntos en la recta numérica. $U = \mathbb{R}$



a) $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} / 4 \leq x \leq 5\}$
b) $B \cup C = \{x \in \mathbb{R} / x < -2 \vee x \geq 4\}$
c) $A' = \{x \in \mathbb{R} / x < -2 \vee x > 5\}$
d) $C' = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -2\}$
e) $(A \cap B)' = \{x \in \mathbb{R} / x < 4 \vee x > 5\}$
f) $(A \cup B) - B = \{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x < 4\}$

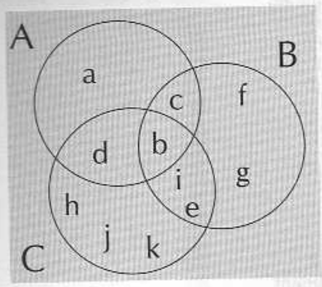
3. Sean $P = \{1, 2, 3, 4\}$, $Q = \{3, 4, 5, 6\}$ considérese el universo
$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
Verificar que: **a)** $(P \cup Q)' = P' \cap Q'$
b) $(P \cap Q)' = P' \cup Q'$

Solución:
Tenemos que $P' = \{0, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$Q' = \{0, 1, 2, 7, 8, 9\}$

a) $P \cup Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ luego $(P \cup Q)' = \{0, 7, 8, 9\}$
$P' \cap Q' = \{0, 7, 8, 9\}$ $\therefore$ $(P \cup Q)' = P' \cap Q'$

b) $P \cap Q = \{3,4\}$ luego $(P \cap Q)' = \{0, 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$P' \cup Q' = \{0, 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9\}$ $\therefore$ $(P \cap Q)' = P' \cup Q'$

4. En el diagrama de Venn-Euler adjunto verificar:



a) listar los elementos
b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
c) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$

Solución:

a) $A = \{a, b, c, d\}$ $B = \{b, c, e, g, i, f\}$ $C = \{b, e, d, h, i, j, k\}$

b) $B \cup C = \{b, c, e, d, f, g, h, i, j, k\}$, luego

$A \cap (B \cup C) = \{b, c, d\}$

por otro lado

$A \cap B = \{b, c\}$ y $A \cap C = \{b, d\}$ entonces

$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{b, c, d\}$

$\therefore A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

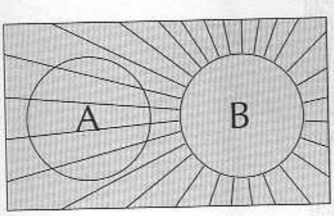
c) $B - C = \{c, f, g\}$, luego $A \cap (B - C) = \{c\}$

por otro lado

$A \cap B = \{b, c\}$, luego $(A \cap B) - C = \{c\}$

$\therefore A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$. Se hace notar que esta igualdad no siempre es verdadera.

5. Mostrar en un diagrama de Venn-Euler que si $A \cap B = \varnothing$, entonces $A \cap B' = A$.



Solución:

En el diagrama se observa claramente que si se intersecta A con B′, la resultante es A, ya que $A \subset B'$

6. Demostrar que $A \cap B' = A - B$.

Solución:

Para demostrar igualdades de conjuntos podemos hacerlo por doble inclusión, es decir:

1° $A \cap B' \subset A - B$ y 2° $A - B \subset A \cap B'$

1° Sea $x \in A \cap B' \Rightarrow x \in A \wedge x \in B' \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in (A - B)$

$\therefore A \cap B' \subset A - B$

2° Sea $x \in (A - B) \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B' \Rightarrow x \in (A \cap B')$

$\therefore A - B \subset A \cap B'$

Luego $A \cap B' = A - B$.

7. Probar que $(P \cup Q) \cap Q' = P$ si y sólo si $P \cap Q = \varnothing$.

Solución:

Aplicando las propiedades:

$(P \cup Q) \cap Q' = (P \cap Q') \cup (Q \cap Q') = (P \cap Q') \cup \varnothing = P \cap Q'$

Luego el problema se transforma en probar que $P \cap Q' = P$ si y sólo si $P \cap Q = \varnothing$.

Como es una bicondicionalidad, demostraremos primero la implicación a la derecha y luego la implicación a la izquierda.

1° $\Rightarrow$

Hip.: $P \cap Q' = P$

Tesis: $P \cap Q = \varnothing$

Dem.: $P \cap Q' = P \Rightarrow P \subset Q' \Rightarrow P \cap Q = \varnothing$

2° $\Leftarrow$

Hip.: $P \cap Q = \varnothing$

Tesis: $P \cap Q' = P$

Dem.: $P \cap Q = \varnothing \Rightarrow P \subset Q' \Rightarrow P \cap Q' = P$

$\therefore P \cap Q' = P \Leftrightarrow P \cap Q = \varnothing$

8. Probar que $A \subset B \Leftrightarrow B' \subset A'$

1° $\Rightarrow$

Hip.: $A \subset B$

Tesis: $B' \subset A'$

Dem.: Sea $x \in B' \Rightarrow x \notin B \overset{\text{Hip.}}{\Rightarrow} x \notin A \Rightarrow x \in A'$

$\therefore B' \subset A'$

2° $\Leftarrow$

Hip.: $B' \subset A'$

Tesis: $A \subset B$

Dem.: Sea $x \in A \Rightarrow x \notin A' \overset{\text{Hip.}}{\Rightarrow} x \notin B' \Rightarrow x \in B$

$\therefore A \subset B$

Luego, de 1° y 2° $A \subset B \Leftrightarrow B' \subset A'$

9. Demostrar que la diferencia simétrica es conmutativa, es decir: $A \,\Delta\, B = B \,\Delta\, A$.

Solución:

$A \,\Delta\, B = (A - B) \cup (B - A) = (B - A) \cup (A - B) = B \,\Delta\, A$.

10. Demostrar la asociatividad de la intersección: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Solución:

Demostraremos por doble inclusión:

1° Por dem.: $(A \cap B) \cap C \subset A \cap (B \cap C)$.

Ejercicios resueltos

$$\text{Sea } x \in (A \cap B) \cap C \Rightarrow x \in A \cap B \wedge x \in C$$
$$\Rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C$$
$$\Rightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C)$$
$$\Rightarrow x \in A \wedge x \in (B \cap C)$$
$$\Rightarrow x \in A \cap (B \cap C)$$

$\therefore\ (A \cap B) \cap C \subset A \cap (B \cap C)$

2° Por dem.: $A \cap (B \cap C) \subset (A \cap B) \cap C$

$$\text{Sea } x \in A \cap (B \cap C) \Rightarrow x \in A \wedge x \in (B \cap C)$$
$$\Rightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C)$$
$$\Rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C$$
$$\Rightarrow x \in (A \cap B) \wedge x \in C$$
$$\Rightarrow x \in (A \cap B) \cap C$$

$\therefore\ A \cap (B \cap C) \subset (A \cap B) \cap C$

Luego, de 1 y 2 tenemos $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Ejercicios

1. Sean $A = \{1, 3, 5, 7\}$
$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
$C = \{2, 4, 6, 8\}$

Considere
$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Determine:

a) $A \cup B$ **b)** $A \cap C$ **c)** $A \cup C$ **d)** $B \cap C$
e) $A - B$ **f)** $C - B$ **g)** $A \Delta B$ **h)** A'
i) $(A \cap B)'$ **j)** $C' \cap A$ **k)** $(A - C)'$ **l)** $(B \cup C)'$

2. Sean $P = \{x \in \mathbb{R} / 1 < x \leq 5\}$
$Q = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -2\}$
$R = \{x \in \mathbb{R} / -4 \leq x < 1\}$

Determine:

a) $P \cap Q$ **b)** $Q \cap R$ **c)** $R \cap P$ **d)** $P \cup Q$
e) $R \cup P$ **f)** $R \cup Q$ **g)** $P \cap Q \cap R$ **h)** $P - Q$
i) $Q - P$ **j)** $R - P$ **k)** $R - Q$ **l)** $Q - R$

3. Sean $A = \{x \in \mathbb{R} / -6 \leq x \leq -2\}$
$B = \{x \in \mathbb{R} / 1 \leq x \leq 6\}$
$C = \{x \in \mathbb{R} / |x| \leq 7\}$

Encuentre:

a) $(A \cap B) \cup C$ **b)** $(A \cup C) \cap B$
c) $A \cap (B \cup C)$
d) $(A \cup B) \cap C$
e) $(A \cup C) \cap (B \cup C)$
f) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$

4. Sean $A = \{x \in \mathbb{R} / 2 \leq x \leq 4\}$
$B = \{x \in \mathbb{R} / 3 \leq x \leq 6\}$
$C = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 5\}$

Encuentre:

a) $A \Delta B$ **b)** $B - C$ **c)** $(A \cup B) - C$
d) $B - (A \cup C)$ **e)** $B - (A \cap C)$ **f)** $A \Delta C$

5. Sean $P = [-6, 0]$, $Q = [-3, 4]$ y $R = [3, 5]$ subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Determine:

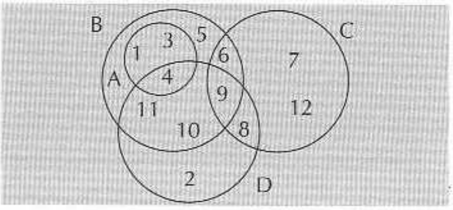
a) $(P \cup R)'$
b) $(P \cap Q)'$
c) $(P \cup Q \cup R)'$
d) $(P - Q) \cap R'$
e) $(R - Q) \cap P'$
f) $(Q - P) \Delta (Q - R)$

6. Sean $U = \{n \in \mathbb{N} / n < 10\}$
$A = \{n \in U / n < 5\}$
$B = \{n \in U / 4 < n < 8\}$
$C = \{n \in U / 3 < n < 10\}$

a) Liste los elementos de A, B, C y U
b) Haga un diagrama de Venn-Euler
c) Verifique que $(A \cap B)' = A' \cup B'$
d) Verifique que $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

7. En una encuesta en la Región Metropolitana se consulta a 1.000 personas y se obtiene que:
990 personas hablan castellano
626 personas hablan inglés
134 personas hablan francés
620 personas hablan castellano e inglés
130 personas hablan castellano y francés
100 personas hablan los tres idiomas
a) Haga un diagrama de Venn-Euler que refleje la situación.
b) ¿Cuántas personas hablan sólo castellano?, ¿cuántas sólo inglés? y ¿cuántas sólo francés?
c) ¿Cuántas hablan inglés y no hablan francés?
d) ¿Cuántas hablan inglés o francés?

8. En el siguiente diagrama de Venn- Euler verifique que:
a) $(A \cap B) - D = (B - D) \cap A$
b) $(B \cup C)' = D - (B \cup C)$
c) $(B \cup C) - (A \cup D) = (A \cup D)'$



9. Muestre en un diagrama de Venn-Euler y dé un ejemplo en que se vea que si $A \subset B$ entonces $B' \subset A'$.

10. Demuestre que $A \cap B = B - A'$

11. Demuestre que si $A \cap B = A \cap C \wedge A \cup B = A \cup C$, entonces $B = C$

12. Demuestre que si $P \subset Q$, entonces $P \cap R \subset Q \cap R$

13. Demuestre que $A - B = B' - A'$

14. Demuestre que si $A \subset B$, entonces $A \cup (B - A) = B$

15. Demuestre que $P - Q \subset P \cup Q$

16. Haga un diagrama de Venn-Euler para los conjuntos no vacíos A, B y C que cumplan las siguientes propiedades:
a) $A \subset B, B \subset C$
b) $A \subset B, C \subset B, A \cap C \neq \varnothing$
c) $A \cap C = \varnothing, B \cap C \neq \varnothing, A \cap B \neq \varnothing$
d) $A \subset B, \ C \cap B \neq \varnothing, C \cap A \neq \varnothing, C \not\subset B$

17. Demuestre que $A - (A - B) = A \cap B$

18. Demuestre que $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

19. Demuestre que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

20. Demuestre que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Soluciones

No se incluye la respuesta de las demostraciones.

1. a) $A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 9\} = B$ b) $A \cap C = \varnothing$ c) $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
d) $B \cap C = \varnothing$ e) $A - B = \varnothing$ f) $C - B = \{2, 4, 6, 8\} = C$ g) $A \Delta B = \{9\}$
h) $A' = \{0, 2, 4, 6, 8, 9\}$ i) $(A \cap B)' = \{0, 2, 4, 6, 8, 9\}$ j) $C' \cap A = \{1, 3, 5, 7\}$
k) $(A - C)' = \{0, 2, 4, 6, 8, 9\}$ l) $(B \cup C)' = \{0\}$

2. a) P porque $P \subset Q$ b) $\{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x < 1\}$ c) $\varnothing$ $(1 \notin R \wedge 1 \notin P)$
d) Q porque $P \subset Q$ e) $\{x \in \mathbb{R} / -4 \leq x \leq 5 \wedge x \neq 1\}$ f) $\{x \in \mathbb{R} / x \geq -4\}$

g) $\varnothing$ h) $\varnothing$ porque $P \subset Q$ i) $\{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x \leq 1 \vee x > 5\}$
j) R porque R y P son disjuntos k) $\{x \in \mathbb{R} / -4 \leq x < -2\}$ l) $\{x \in \mathbb{R} / x \geq 1\}$

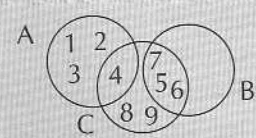
3. a) C b) B c) A d) $A \cup B$ e) C f) $A \cup B$

4. a) $[2, 3) \cup (4, 6]$ b) $[3, 5)$ c) $[2, 5)$ d) $(4, 5)$ e) $[3, 6] = B$
f) $A \cup C$, ya que $A \cap C = \varnothing$

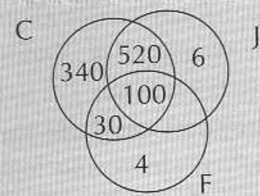
5. a) $(-\infty, -6) \cup (0, 3) \cup (5, +\infty)$ b) $(-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$
c) $(-\infty, -6) \cup (5, +\infty)$ d) $[-6, -3)$ e) $(4, 5]$ f) $[-3, 0] \cup [3, 4]$

6. a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$
$B = \{5, 6, 7\}$
$C = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

b)

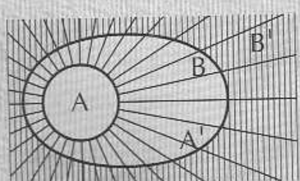


7. a) Los números representan la cardinalidad de cada conjunto.
b) Sólo castellano 340, sólo inglés 6 y sólo francés 4.
c) 526
d) 660



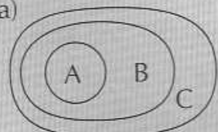
8. a) ambos son el conjunto $\{1, 3\}$ b) ambos son el conjunto $\{2\}$
c) ambos son el conjunto $\{5, 6, 7, 12\}$

9.

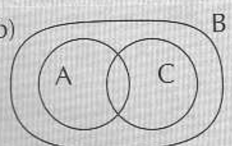


Ej.: Sea $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
$A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{1, 2, 3, 4\}$
$A' = \{0, 4, 5\}$ $B' = \{0, 5\}$
aquí claramente $A \subset B \wedge B' \subset A'$

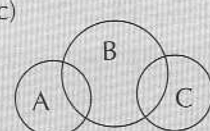
16. a)



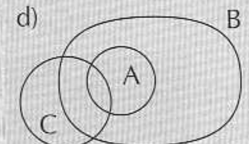
b)



c)



d)



3.3 Relaciones

3.3.1 Conceptos básicos

Sean A y B conjuntos no vacíos. Se define la operación **producto cartesiano** de los conjuntos A y B que se denota $A \times B$ al conjunto de pares ordenados.

$$A \times B = \{(a, b) / a \in A \wedge b \in B\}$$

Una **relación R** de un conjunto A en un conjunto B es un subconjunto del conjunto $A \times B$.

(R relación de A en B) $\Leftrightarrow$ R $\subset$ A $\times$ B

- **Observación 1:** Una relación es un conjunto de pares ordenados.
- **Observación 2:** Una relación R de A en B se denota R : A $\to$ B.
- **Observación 3:** $(a, b) \in R \Leftrightarrow a\,R\,b$

  $(a, b) \notin R \Leftrightarrow a \not{R}\, b$

Sea R : A $\to$ B una relación y $(a, b) \in R$

1. a se denomina preimagen.
2. b se denomina imagen de a según la relación R. Se denota b = R (a).
3. Im. (a) es el conjunto de todas las imágenes del elemento a.

Sea R : A $\to$ B una relación. Se denomina.

Dominio de la relación al conjunto de todas las preimágenes.

Dom. R = $\{a \in A / \exists\, b \in B \wedge (a, b) \in R\} \subset A$

Rango o recorrido de la relación, al conjunto de todas las imágenes.

Rang. R = $\{b \in B / \exists\, a \in A \wedge (a, b) \in R\} \subset B$.

Una relación se puede graficar usando un sistema cartesiano o un diagrama sagital (diagrama de flechas).

Si A = {a, b, c, d, e} B = {a, b, c, d}

R : A $\to$ B, R = {(a, a), (a, b), (b, b), (b, c), (d, c), (e, d)}

GRÁFICO CARTESIANO

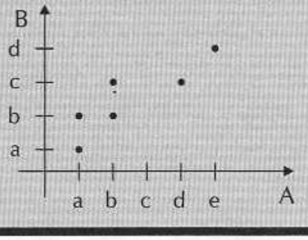
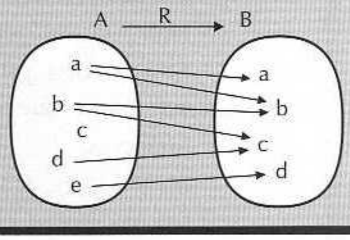


GRÁFICO SAGITAL



Si la relación se define en conjuntos numéricos, sus gráficos pueden ser figuras geométricas.

Cada relación R : A $\to$ B tiene una **relación inversa** R^{-1} : B $\to$ A

$R^{-1} = \{(b, a) / (a, b) \in R\}$

Ejercicios resueltos

1. Sean A = {1, 2, 3, 4} y B = {1, 5, 3}. Escribir tres relaciones de A en B.

   Se tiene que A $\times$ B tiene cardinalidad 12, luego hay 2^{12} = 4.096 subconjuntos de A $\times$ B y por lo tanto el mismo número de relaciones que se pueden formar. Tenemos que:

$R: A \to B = \{(a, b) / a \in A \wedge b \in B\}$

$R_1 = \{(1, 1), (1, 5), (1, 3)\}$
$R_2 = \{(1, 1), (2, 5), (3, 3), (3, 5), (4, 3)\}$
$R_3 = \{(4, 5), (3, 5), (2, 5), (1, 5)\}$
y así podríamos formar 4.093 relaciones distintas a estas tres.

2. Sean $A = \{1, 3, 5, 7\}$ y $B = \{2, 4, 6\}$. Sea $R: A \to B$ una relación definida por $R = \{(x, y), / y = x + 1\}$. Escribir R por extensión.

R está formada por todos los pares (x, y) de $A \times B$ tales que su segunda coordenada y es igual a la primera coordenada x más 1.

$R = \{(1, 2)\ (3, 4)\ (5, 6)\}$

3. Sea $R: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ una relación definida por

$$R(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 3 & \text{si} \quad x = 0 \\ x + 1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Hallar R (2), R (0), R (– 3)
Ésta es una relación definida a tramos, es decir, tiene una fórmula para las imágenes de los números mayores que 0 y otra para los números menores que 0. La imagen de 0 está dada y es 3. Así:

$$\begin{aligned} R(2) &= 2 - 1 = 1 \quad (2 > 0) \\ R(0) &= 3 \\ R(-3) &= -3 + 1 = -2 \quad (-3 < 0) \end{aligned}$$

4. Sea P una relación de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por
$P = \{(x, y) / y > x\}$
Hallar las imágenes de dos elementos cualesquiera del dominio.
Ésta es una relación donde la imagen "y" debe cumplir con ser mayor que la preimagen "x", luego, cada "x" tiene infinitas imágenes:
$Im\ 1 = \{2, 3, 4, 5, ...\}$
$Im\ 10 = \{11, 12, 13, 14, 15, ...\}$

5. Dada la relación $R = \{(1, 5)\ (5, 1)\ (3, -2)\ (4, 1)\}$

Hallar: a) Dom. R b) Rang. R

a) Dom. R = {x / x es preimagen}
= {1, 5, 3, 4}
b) Rang. R = {y / y es imagen}
= {5, 1, – 2}

6. Sea $R: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una relación definida por
$R = \{(x, y) / x + 2y - 10 = 0\}$
Hallar: **a)** Dom. R. **b)** Rang. R.
Primero escribamos R por extensión. ¿Cuáles son los pares ordenados de números naturales que cumplen con que la primera coordenada "x" más dos veces la segunda "y" menos diez es cero?

$x = 10 - 2y$

si $y = 1 \rightarrow x = 8 \rightarrow (8, 1) \in R$

$y = 2 \rightarrow x = 6 \rightarrow (6, 2) \in R$

$y = 3 \rightarrow x = 4 \rightarrow (4, 3) \in R$

$y = 4 \rightarrow x = 2 \rightarrow (2, 4) \in R$

$y = 5 \rightarrow x = 0$ que no es natural

Luego $R = \{(8, 1)\ (6, 2)\ (4, 3)\ (2, 4)\}$

Si hubiéramos despejado y en la fórmula que define R tendríamos:

$y = \frac{10-x}{2}$

Si $x = 1 \rightarrow y = \frac{9}{2} \notin \mathbb{N}$

$x = 2 \rightarrow y = 4 \rightarrow (2, 4) \in R$

$x = 3 \rightarrow y = \frac{7}{2} \notin \mathbb{N}$

$x = 4 \rightarrow y = 3 \rightarrow (4, 3) \in R$

$x = 5 \rightarrow y = \frac{5}{2} \notin \mathbb{N}$

$x = 6 \rightarrow y = 2 \rightarrow (6, 2) \in R$

$x = 7 \rightarrow y = \frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$

$x = 8 \rightarrow y = 1 \rightarrow (8, 1) \in R$

$x = 9 \rightarrow y = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$

$x=10 \rightarrow y = 0 \notin \mathbb{N}$

y no hay más pares en R

Luego $R = \{(8, 1)\ (6, 2)\ (4, 3)\ (2, 4)\}$

Así Dom. $R = \{8, 6, 4, 2\}$

Rang. $R = \{1, 2, 3, 4\}$

7. Sea $M : A \rightarrow B$ una relación definida por

$M = \{(3, 2)\ (0, 1)\ (3, 1)\ (1, 1)\ (2, 4)\}$

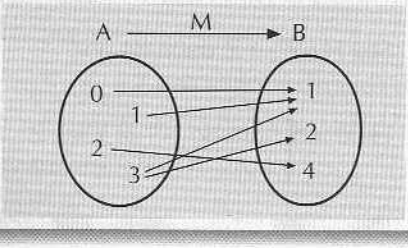
Hallar **a)** A **b)** B **c)** graficar en un diagrama sagital

d) graficar en un diagrama cartesiano.

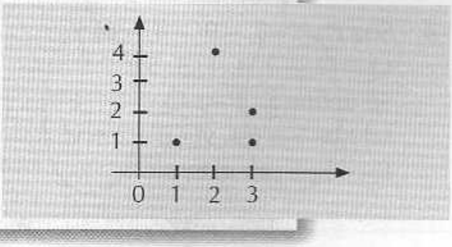
a) $A = \{3, 0, 1, 2\}$

b) $B = \{2, 1, 4\}$

c)



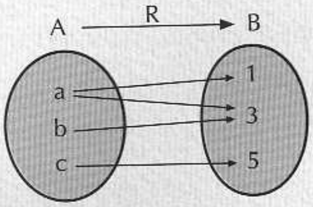
d)



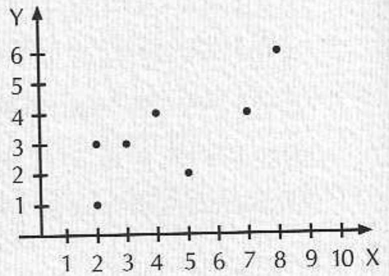
Ejercicios resueltos

8. Dadas las siguientes relaciones definidas gráficamente, escribirlas señalando sus pares por extensión.

a)



b)



Solución:

a) $R : A \rightarrow B$ $\quad R = \{(a, 1), (a, 3), (b, 3), (c, 5)\}$

b) $S : X \rightarrow Y$ $\quad S = \{(2, 1), (2, 3), (3, 3), (4, 4), (5, 2), (7, 4), (8, 6)\}$

Ejercicios

1. Sea $A = \{p, c, d, m\}$ y $B = \{b, a\}$
Se define $T : A \rightarrow B$ tal que
$T = \{(u, v) / u \in A \wedge v \in B\}$
Determine si los siguientes pares pertenecen o no a la relación T.

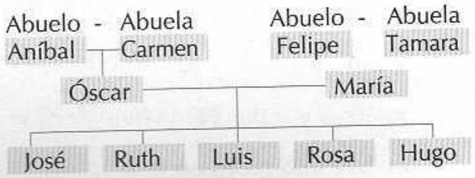
a) (p, b) **d)** (a, d)
b) (m, a) **e)** (c, a)
c) (b, c) **f)** (m, b)

2. Sea $S = \{-8, -7, -6, -5, -3, -2, 1, 4, 7, 8\}$ y $T = \{-8, -7, -6, -3, -2\}$
Se define la relación $R : S \rightarrow T$ tal que $R = \{(x, y) / y = x - 1\}$
Escriba R por extensión.

3. Sea $A = \{b, s, i, h\}$ y $B = \{n\}$
Sea $T : A \rightarrow B$ una relación definida por
$T = \{(u, v) / u \in A \wedge v \in B\}$
Escriba T por extensión.

4. Sea $P = \{-5, -9, -4, -8\}$ y $Q = \{2, -2, 4, 1, 3, 5\}$
Se define $S : P \rightarrow Q$ tal que $S = \{(u, v) / u - 2 = v\}$
Escriba S por extensión.

5. En la siguiente figura



Se definen las relaciones siguientes:

a) R_1 : "ser padre de"
b) R_2 : "ser hijo de"
c) R_3 : "ser hija de"
d) R_4 : "ser esposo de"

Escriba cada relación por extensión.

6. Sea $H : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ una relación definida por

$$H(x) = \begin{cases} -5 & \text{si } x < -2 \\ -1 - x & \text{si } x = -2 \\ -5x + 4 & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

Encuentre:
H (10), H (6), H (0), H (– 2), H (– 10)

7. Sea $H : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por:

$$H(x) = \begin{cases} -7 & \text{si } x < -2 \\ -1 - x & \text{si } x = -2 \\ -7x - 4 & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

Determine:
H (- 14), H (- 6), H (1), H (0), H (3)

8. Sea H : $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ una relación definida por

$$H(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x < 3 \\ 4 - x & \text{si } x = 3 \\ 4x + 5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Determine:
H (14), H (- 5), H (1), H (3), H (0)

9. Sea R : $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ una relación definida por
R = {(x, y) / y = 4x} Busque:
R (- 11), R (6), R (3), R (0), R (1)

10. Sea P : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una relación definida por
$P = \left\{(x, y) / y = \dfrac{6x - 7}{4}\right\}$ Determine:
P (0), P (5), P (- 1), P (3), P (- 2)

11. Sea R : $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ una relación definida por
R = {(x, y) / y = 2x} Halle:
R (- 7), R (3), R (14), R (0), R (5)

12. Sea G : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una relación definida por G = {(x, y) / y < x}
Encuentre:
a) una imagen de 7
b) una imagen de 20
c) una imagen de 1

13. Sea G : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una relación definida por G = {(x, y) / y < x}
Encuentre:
a) Im (4) **b)** Im (14) **c)** Im (10)

14. Sea S : $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ una relación definida por
S = {(- 4, - 2), (- 2, - 4), (- 4, - 5), (- 5, - 4), (- 4, 1), (1, - 4)}
Determine:
a) Im (- 4) **b)** Im (- 5) **c)** Im (- 2)

15. Sea S : $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ una relación definida por
S = {(6, 8), (8, 6), (6, 3), (3, 6), (6, 2), (2, 6)}
Encuentre: Im (6)

16. Sea S : $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ una relación definida por
S = {(3, 5), (5, 3), (3,8), (8,3), (3,7), (7,3)}
Encuentre: Im (3)

17. Dada la relación
F = {(0, 3), (- 3, - 6), (3, - 1), (0, 0), (1, 6)}
Determine:
a) Dom F **b)** Rang F

18. Dada la relación
F = {(3, 3), (- 8, - 8), (- 5, 2), (0, 6), (- 6, 8)}
Determine:
a) Dom F **b)** Rang F

19. Sea F = {(- 6 , 3), (- 7, 8), (- 5, - 7), (0, - 12), (- 5, - 8)} una relación.
Determine:
a) Dom F **b)** Rang F

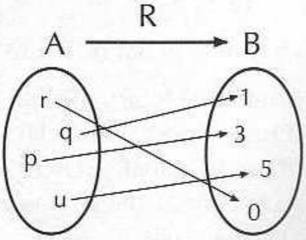
20. Sea R : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una relación definida por
R = {(u, v) / 2u + 3v - 12 = 0}
Determine:
a) Dom R **b)** Rang R

21. Sea R : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una relación definida por
R = {(s, t) / 3t + 3s = 12}
Halle:
a) Dom R **b)** Rang R

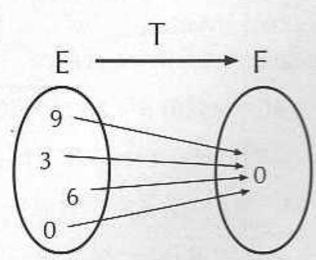
22. Sea R : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una relación definida por
$R = \left\{(p, q) / q = \dfrac{10 - 3p}{2}\right\}$
Determine:
a) Dom R **b)** Rang R

23. Escriba las siguientes relaciones por extensión:

a)

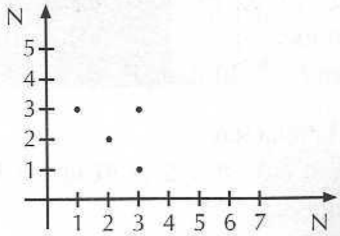


b)

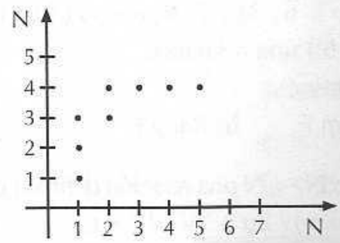


Ejercicios

c)



d)



24. Grafique las siguientes relaciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ usando un gráfico cartesiano.

a) $R = \{(x, y) / x + y = 9\}$

b) $S = \left\{(x, y) / y = \dfrac{10-x}{2}\right\}$

c) $T = \{(x, y) / 5y + x = 26\}$

25. Grafique las siguientes relaciones reales en un gráfico cartesiano.

a) $R = \{(x, y) / x^2 + y^2 = 25\}$

b) $S = \{(x, y) / x - y = 5\}$

c) $T = \{(x, y) / 2x - y = 1\}$

26. Determine la relación inversa R^{-1} dada la relación R.

a) $R = \{(1, 2), (1, 3), (1,4), (2,1), (2, 2), (2, 3)\}$

b) $R = \{(a, b), (a, c), (a, a)\}$

c) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3,3), (4,4), (3, 5), (5, 3)\}$

27. Determine la relación inversa R^{-1} dada la relación R.

a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / x = 2y\}$

b) $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / x + 2y = 22\}$

c) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 4x - 2\}$

d) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x + y - 4 = 0\}$

28. Dado el conjunto $U = \{-2, 2, 4\}$ Halle la relación inversa R^{-1} de cada relación R en U y proceda a listarla.

a) $R = \{(x, y) / x \neq y\}$

b) $R = \{(x, y) / x$ es múltiplo de $y\}$

c) $R = \{(x, y) / x$ es la mitad de $y\}$

d) $R = \{(x, y) / x$ mayor o igual que $y\}$

e) $R = \{(x, y) / y = \sqrt{x}\}$

Soluciones

1. a) sí b) sí c) no d) no e) sí f) sí
2. $R = \{(-6, -7), (-2, -3), (-5, -6), (-7, -8)\}$
3. $T = \{(b, n), (s, n), (i, n), (h, n)\}$
4. $S = \varnothing$. No hay ningún par de $P \times Q$ que satisfaga la relación definida.
5. a) R_1 = {(Aníbal, Óscar), (Felipe, María), (Óscar, José), (Óscar, Ruth), (Óscar, Luis), (Óscar, Rosa), (Óscar, Hugo)}
   b) R_2 = {(Óscar, Aníbal), (Óscar, Carmen), (José, Óscar), (José, María), (Luis, Óscar), (Luis, María), (Hugo, Óscar), (Hugo, María)}
   c) R_3 = {(María, Felipe), (María, Tamara), (Ruth, Óscar), (Ruth, María), (Rosa, Óscar), (Rosa, María)}
   d) R_4 = {(Aníbal, Carmen), (Felipe, Tamara), (Óscar, María)}
6. $H(10) = -46$ $H(6) = -26$ $H(0) = 4$ $H(-2) = 1$ $H(-10) = -5$
7. $H(-14) = -7$ $H(-6) = -7$ $H(1) = -11$ $H(0) = -4$ $H(3) = -25$
8. $H(14) = 61$ $H(-5) = 4$ $H(1) = 4$ $H(3) = 1$ $H(0) = 4$
9. $R(-11) = -44$ $R(6) = 24$ $R(3) = 12$ $R(0) = 0$ $R(1) = 4$

10. $P(0) = -\frac{7}{4}$ $P(5) = \frac{23}{4}$ $P(-1) = -\frac{13}{4}$ $P(3) = \frac{11}{4}$ $P(-2) = -\frac{19}{4}$

11. $R(-7) = -14$ $R(3) = 6$ $R(14) = 28$ $R(0) = 0$ $R(5) = 10$

12. a) cualquier número natural menor que 7. Ejemplo el 5.
b) cualquier número natural menor que 20. Ejemplo el 3.
c) cualquier número natural menor que 1. No hay.

13. a) {3, 2, 1} b) {13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1} c) {9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1}

14. a) {– 2, – 5, 1} b) {– 4} c) {– 4}

15. {8, 3, 2}

16. {5, 8, 7}

17. a) {– 3, 0, 1, 3} b) {3, – 6, – 1, 0, 6}

18. a) {3, – 8, – 5, 0, – 6} b) {3, – 8, 2, 6, 8}

19. a) {– 6, – 7, – 5, 0} b) {3, 8, – 7, – 12, – 8}

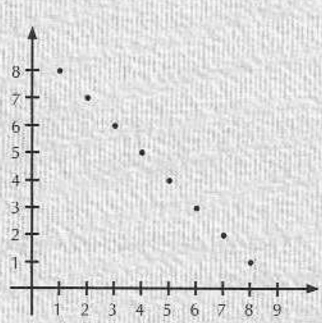
20. a) {3} b) {2}

21. a) {1, 2, 3} b) {1, 2, 3}

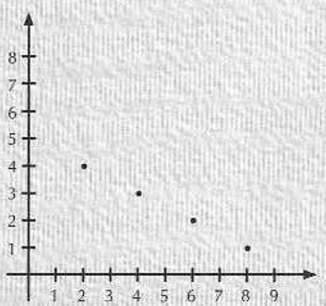
22. a) {2} b) {2}

23. a) {(r, 0), (q, 1), (p, 3), (u, 5)} b) {(9, 0), (3,0), (6, 0), (0, 0)}
c) {(1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 3)} d) {(1,1), (1,2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (5, 4)}

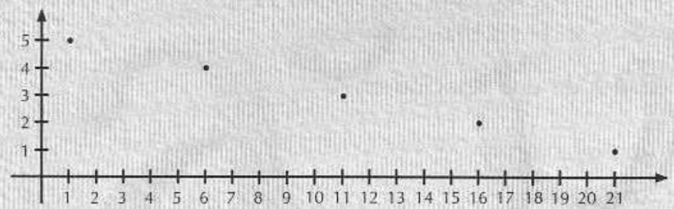
24. a)



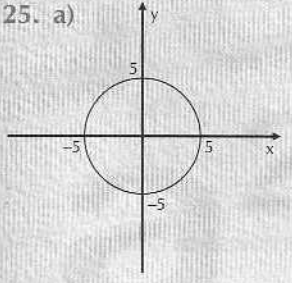
b)



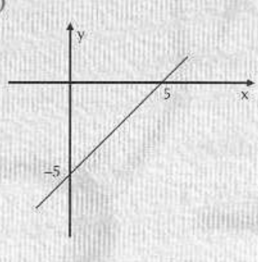
c)



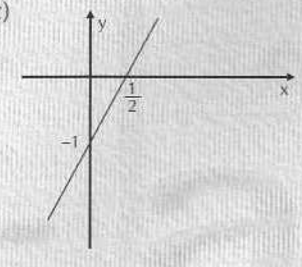
25. a)



b)



c)



26. a) $R^{-1} = \{(2, 1), (3, 1), (4, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$
b) $R^{-1} = \{(b, a), (c, a), (a, a)\}$
c) $R^{-1} = R$

27. a) $R^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ / \ x \text{ es la mitad de } y\}$
b) $R^{-1} = \left\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ / \ x = \frac{22 - y}{2}\right\}$
c) $R^{-1} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ / \ y = \frac{x + 2}{4}\right\}$
d) $R^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ / \ y = 4 - x\} = R$

28. a) $R^{-1} = \{(x, y) \ / \ x \neq y\} = \{(-2, 2), (-2, 4), (2, -2), (2, 4), (4, -2), (4, 2)\} = R$
b) $R^{-1} = \{(x, y) \ / \ x \text{ es factor de } y\} = \{(2, 2), (2, -2), (2, 4), (-2, 4), (-2, -2), (4, 4)\}$
c) $R^{-1} = \{(x, y) \ / \ x \text{ es el doble de } y\} = \{(4, 2)\}$
d) $R^{-1} = \{(x, y) \ / \ x \leq y\} = \{(-2, -2), (-2, 2), (2, 2), (2, 4), (4, 4), (-2, 4)\}$
e) $R^{-1} = \{(x, y) \ / \ y = x^2\} = \{(2, 4), (-2, 4)\}$

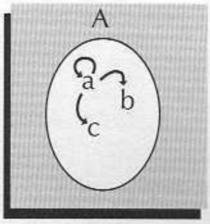
3.3.2 Relación de equivalencia y de orden

Una relación definida de un conjunto A en sí mismo se denomina **relación en A.**

(R relación en A) $\Leftrightarrow R \subset A \times A$

- **Observación 1**

El gráfico sagital de este tipo de relaciones se hace dibujando una sola vez el conjunto y uniendo mediante flechas los elementos relacionados.



Si R = {(a, b) (a, c) (a, a)} es una relación definida en el conjunto A = {a, b, c}, su gráfico sagital es el adjunto.

- **Observación 2**

Una relación definida en el conjunto $\mathbb{R}$ se denomina relación real y se grafica en el sistema cartesiano.

Propiedades de una relación en A

Sea R una relación en A.

(R es **refleja**) $\Leftrightarrow (\forall x \in A, x R x)$

(R es **simétrica**) $\Leftrightarrow (x R y \Rightarrow y R x)$

(R es **antisimétrica**) $\Leftrightarrow \big((x R y \wedge y R x) \Rightarrow x = y\big)$
$\vee \ \big((x \neq y \wedge x R y) \Rightarrow y \not R x\big)$

(R es **transitiva**) $\Leftrightarrow \big((x R y \wedge y R z) \Rightarrow x R z\big)$

- **Observación 3**

Una relación R en A se llama **relación de equivalencia** si y sólo si R es refleja, simétrica y transitiva.

- **Observación 4.**

Una relación R en A se llama **relación de orden** si y sólo si R es refleja, antisimétrica y transitiva.

Sea R una relación de orden en un conjunto A. Sean "x" e "y" elementos de A tal que $(x, y) \in R$ $(x\ R\ y)$. En este caso se dice que "x" e "y" son **comparables** según la relación R.

Si en un conjunto A todos los pares de elementos son comparables según una relación de orden R, el conjunto A se dice **totalmente ordenado** y la relación R se dice de **orden total.** Si al menos un par de elementos de A son no comparables, entonces A se dice **parcialmente ordenado** y R es una relación de **orden parcial.**

Ejercicios resueltos

1. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y R la relación.

$$R = \{(1, 2)\ (1, 3)\ (3, 1)\ (2, 3)\ (2, 1)\ (1, 1)\ (2, 2)\ (3, 3)\ (4, 4)\ (5, 5)\ (3, 4)\ (1, 4)\ (2, 4)\}$$

Determinar si R es refleja, simétrica, antisimétrica y/o transitiva.

a) R es refleja porque $\forall\ x \in A;\ \ x\ R\ x$
b) R no es simétrica porque $2\ R\ 3$ y $3\ \not R\ 2$
c) R no es antisimétrica porque $1\ R\ 3 \wedge 3\ R\ 1$ pero $3 \neq 1$
d) R no es transitiva porque $3\ R\ 1 \wedge 1\ R\ 2$ pero $3\ \not R\ 2$

2. Sea A = {alumnos de un colegio}. Se define la relación R en A tal que: $x\ R\ y \Leftrightarrow x$ está en el mismo curso que "y". Probar que R es una relación de equivalencia en A.

a) R es refleja porque x está en el mismo curso que x. Esto se cumple para todos los alumnos del colegio.
b) R es simétrica porque si x está en el mismo curso que y, esto implica que y está en el mismo curso que x.
c) R es transitiva porque si x está en el mismo curso que y, e y está en el mismo curso que z, entonces tenemos que x está en el mismo curso que z.

Observaciones:

R clasifica a todos los alumnos del colegio en diferentes cursos. Cada curso es una clase de equivalencia.

Esta es una clasificación porque:
a) Cada alumno está en un curso.
b) Ningún alumno está en dos cursos.
c) Todo curso tiene algún alumno.

3. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y R la relación en A definida por

$R = \{(a, b) / a - b$ es múltiplo de $2\}$

a) Listar los elementos de R.
b) Demostrar que R es relación de equivalencia.

c) Se llama clase de a y se denota [a] al conjunto:
$[a] = \{x \,/\, (x, a) \in R\}$
Escribir la clase de cada elemento de A.

d) Escribir la clasificación que la relación R determina en el conjunto A.

Solución:

a) R = {(1, 1) (2, 2) (3, 3) (4, 4) (5, 5) (1, 3) (3, 1) (1, 5) (5, 1) (2, 4) (4, 2) (3, 5) (5, 3)}

b) R es refleja porque $(a, a) \in R \quad \forall\, a \in A$.
R es simétrica porque si a–b es múltiplo de 2, b – a también lo es.
R es transitiva porque:

$$\begin{array}{rl} a - b \text{ múltiplo de } 2 \Rightarrow & a - b = 2n \\ b - c \text{ múltiplo de } 2 \Rightarrow & \underline{b - c = 2m} \\ \text{sumando:} & a - c = 2\,(n + m) \end{array}$$

$\therefore$ a – c, también es múltiplo de 2. Luego, por ser refleja, simétrica y transitiva, R es relación de equivalencia.

c)
$[1] = \{x \in A \,/\, (x, 1) \in R\} = \{1, 3, 5\}$
$[2] = \{x \in A \,/\, (x, 2) \in R\} = \{2, 4\}$
$[3] = \{x \in A \,/\, (x, 3) \in R\} = \{3, 1, 5\}$
$[4] = \{x \in A \,/\, (x, 4) \in R\} = \{4, 2\}$
$[5] = \{x \in A \,/\, (x, 5) \in R\} = \{5, 1, 3\}$

d) Se observan dos clases:

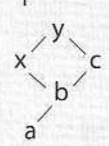
1 2 5	2 4

[1] = [3] = [5] y [2] = [4]

Nota: Cualquier elemento es representativo de su clase.

Antes de resolver los siguientes ejercicios diremos que una relación de orden se llama así porque ordena los elementos del conjunto donde se define:

Representaremos el orden según la relación R en un diagrama así:



cuando $(x, y) \in R$

cuando $(a, b), (b, c), (a, c) \in R$

4. Sea A = {a, b, c, d, e} y R la relación en A definida por:

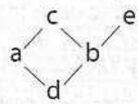
R = {(d, b), (d, a), (b, e), (b, c), (a, c), (d, c), (d, e), (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e)}

a) Determinar si R es una relación de orden.
b) Si R es relación de orden hacer el diagrama de orden.

Solución:

a) R es refleja porque $x \, R \, x \quad \forall x \in A$.
R es antisimétrica porque si $x \neq y \wedge (x, y) \in R$ entonces $(y, x) \notin R$.
R es transitiva porque $(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$, luego, R es relación de orden.

b) El diagrama de orden según R es:



Se observa que d es el menor elemento según R en el conjunto A y no hay un elemento que sea mayor que todos.

Éste es un orden parcial.

5. Sea $A = \{ x \in \mathbb{N} \; / \; x \text{ es par} \wedge x < 13\}$

$R = \{(x, y) \; / \; x \text{ es divisor de } y\}$

a) Determinar si R es relación de orden.

b) Hacer el diagrama de orden.

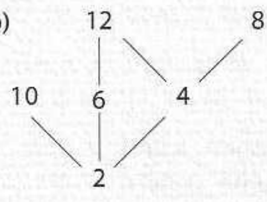
Solución:

Escribamos A y R por extensión.
$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$

$R = \{(2, 4), (2, 6), (2, 8), (2, 10), (2, 12), (4, 8), (4, 12), (6, 12),$
$(2, 2), (4, 4), (6, 6), (8, 8), (10, 10), (12, 12)\}$

a) R es relación de orden porque es refleja, antisimétrica y transitiva.

b)



10 no es menor que 12 porque 10 no divide a 12. 4 no es menor que 6. 2 es menor que todos (los divide a todos), no hay un elemento mayor que todos (que sea dividido por todos).

Éste es un orden parcial.

6. Sea $A = \{(8, 6, 2, 7\}$ y S la relación definida por
$S = \{(8, 6) \; (6, 2) \; (7, 7) \; (8, 2) \; (6, 6) \; (2, 2) \; (8, 8) \, (8, 7) \; (6, 7) \, (2, 7)\}$

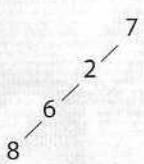
a) Determinar si S es relación de orden.

b) Hacer el diagrama de orden en A según S.

Solución:

a) S es relación de orden porque es refleja, antisimétrica y transitiva.

b) El diagrama de orden en A según la relación S es:



8 es el menor de todos, 7 es el mayor de todos y todos los pares de elementos de A son comparables.
Éste es un orden total.

Ejercicios

1. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ se definen las relaciones siguientes. Determine si éstas son reflejas, simétricas, antisimétricas y/o transitivas.

$R_1 = \{(1, 1)\ (2, 2)\ (3, 3)\ (4, 4)\ (2, 3)\ (3, 2)\}$

$R_2 = \{(1, 2)\ (3, 2)\ (4, 2)\ (2, 2)\ (2, 1)\ (2, 3)\ (2, 4)\}$

$R_3 = \{(1, 1)\ (2, 2)\ (3, 3)\ (4, 4)\}$

$R_4 = \{(1, 2)\ (1, 3)\ (1, 4)\ (2, 3)\ (2, 4)\ (3, 4)\}$

$R_5 = \{(2, 1)\ (2, 2)\ (3, 1)\ (3, 2)\ (3, 3)\ (4, 1)\ (4, 2)\ (4, 3)\ (4, 4)\ \ (1,1)\}$

2. Dadas las siguientes relaciones en Z, determine si éstas son reflejas, simétricas, antisimétricas y/o transitivas.

a) $x\ R\ y \Leftrightarrow x$ es mayor o igual a y

b) $x\ R\ y \Leftrightarrow x \cdot y \leq 0$

c) $x\ R\ y \Leftrightarrow x = y$

d) $x\ R\ y \Leftrightarrow x - y = 1$

e) $x\ R\ y \Leftrightarrow x - y$ es un número par

f) $x\ R\ y \Leftrightarrow x + y = 10$

g) $x\ R\ y \Leftrightarrow |\ x - y\ | > 2$

h) $x\ R\ y \Leftrightarrow |\ x - y\ | < 3$

3. Sea $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Se definen en A las siguientes relaciones. Determine las propiedades que tienen dichas relaciones.

a) $x\ S\ y \Leftrightarrow x - y = 2$

b) $x\ S\ y \Leftrightarrow x$ divide a y

c) $x\ S\ y \Leftrightarrow$ el cociente $\frac{x}{y}$ tiene resto 2

d) $x\ S\ y \Leftrightarrow y - x < 3$

e) $x\ S\ y \Leftrightarrow x \cdot y = 36$

f) $x\ S\ y \Leftrightarrow x + y = 9$

4. Determine las propiedades que posee la relación de inclusión entre conjuntos.

$ARB \Leftrightarrow A \subset B$ A y B conjuntos no vacíos.

5. Sea R una relación simétrica que cumpla la condición

$aRb \wedge bRc \Rightarrow cRa$. Demuestre que R es transitiva.

6. En el conjunto de países A = {Japón, Sudán, India, China} se define la relación S = {(Japón, Japón), (Sudán, Sudán), (India, India), (China, China), (Sudán, Japón), (Japón, Sudán)}

a) ¿Es S relación de equivalencia?

b) Si lo es, haga la clasificación correspondiente.

7. Dados los siguientes conjuntos A y la relación R definida en ellos

a) Determine si R es relación de equivalencia

b) Si lo es, haga la clasificación correspondiente.

i) A = {9, 2, 6, 5} R = {(2, 9), (9, 9), (6, 6), (9, 2), (2, 2), (5, 5)}

ii) A = {3, 9, 1, 8} R = {(9, 3), (3, 3), (1, 1), (3, 9), (9, 9), (8, 8)}

iii) A = {1, 6, 9, 2} R = {(6, 1), (1, 1), (9, 9), (1, 6), (6, 6), (2, 2), (9, 2), (2, 9)}

iv) A = {4, 1, 9, 7} R = {(1, 4), (4, 4), (9, 9), (4, 1), (1, 1), (7, 7)}

v) A = {Alhué, Rapel, Purén, Maule}
R = {(Alhué, Alhué), (Rapel, Rapel), (Purén, Purén), (Alhué, Rapel), (Maule, Maule), (Rapel, Alhué), (Alhué, Maule), (Maule, Rapel), (Rapel, Maule), (Maule, Alhué)}

vi) A = {Coatí, Koala, Hiena, Lirón}
R = (Coatí, Koala), (Koala, Hiena), (Lirón, Lirón), (Coatí, Hiena), (Koala, Koala), (Coatí, Coatí), (Hiena, Hiena), (Lirón, Hiena)}

vii) A = {Coatí, Lemur, Koala, Okapi}
R = {(Lemur, Okapi), (Okapi, Okapi), (Koala, Koala), (Lemur, Lemur), (Okapi, Lemur), (Coatí, Coatí)}

8. Dados los siguientes conjuntos A y las relaciones S definidas en A

a) Determine si S es relación de orden. **b)** Haga el diagrama de orden en A según S. **c)** Determine si el orden es total o parcial.

i) A = {Sirio, Aries, Urano, Virgo}
S = {(Aries, Sirio), (Sirio, Sirio), (Urano, Urano), (Aries, Aries), (Sirio, Aries), (Virgo, Virgo)}

ii) A = {5, 2, 4, 7}
S = {(5, 4), (5, 7), (2, 4), (2, 7), (4, 7), (5, 5), (2, 2), (4, 4), (7, 7)}

iii) A = {2, 5, 4, 1}
S = {(2, 4), (2, 1), (5, 4), (5, 1), (4, 1), (4, 2), (2, 2), (5, 5), (4, 4), (1, 1)}

iv) A = {7, 6, 8, 3}
S = {(7, 6), (6, 8), (3, 3), (7, 8), (6, 6), (7, 7), (8, 8), (3, 8)}

v) A = {Talca, Ancud, Alhué, Achao}
S = {(Talca, Alhué), (Talca, Achao), (Talca, Talca), (Ancud, Alhué), (Ancud, Achao), (Alhué, Achao), (Alhué, Alhué), (Ancud, Ancud), (Achao, Achao)}

vi) A = {5, 1, 6, 7}
S = {(5, 5), (6, 6), (1, 1), (5, 6), (7, 7), (6, 5), (5, 7), (7, 5), (6, 7), (7, 6)}

vii) A = {plomo, verde, caoba, rojo}
S = {(plomo, verde), (verde, caoba), (rojo, rojo), (plomo, caoba), (verde, verde), (plomo, plomo), (caoba, caoba), (rojo, caoba)}

viii) A = {5, 7, 4, 2}
S = {(5, 5), (5, 4), (4, 4), (7, 7), (7, 4), (2, 4), (2, 2)}

ix) A = {7, 9, 6, 4}
S = {(7, 6), (7, 4), (9, 6), (9, 4), (6, 4), (7, 7), (9, 9), (6, 6), (4, 4)}

x) A = {4, 8, 5, 2}
S = {(4, 4), (4, 5), (5, 5), (8, 8), (8, 5), (2, 5), (2, 2)}

Ejercicios

xi) A = {Libra, Virgo, Orión, Urano}
S = {(Libra, Orión), (Libra, Urano), (Libra, Libra), (Virgo, Orión), (Virgo, Urano), (Orión, Urano), (Orión, Orión), (Virgo, Virgo), (Urano, Urano)}

xii) A = {4, 1, 8, 9}
S = {(4, 1), (1, 8), (9, 9), (4, 8), (1, 1), (4, 4), (8, 8), (4, 9), (1, 9), (8, 9)}

xiii) A = {1, 8, 6, 4}
S = {(1, 8), (6, 4), (1, 1), (8, 1), (6, 6), (4, 6), (8, 8)}

9. Sea $\mathcal{L}$ el conjunto de rectas en el plano.
Determine qué propiedades posee la relación "ser perpendicular a".

10. En un conjunto de personas determine las propiedades de la relación "tener los mismos años que".

11. En un conjunto de circunferencias de un plano se define cRc' si y sólo si c es tangente con c'. Determine las propiedades de esta relación.

12. Determine las propiedades de la relación "ser hermano de" en un conjunto de personas.

13. Determine las propiedades de la relación "ser hijo de" en un conjunto de personas.

14. En un conjunto de jóvenes determine las propiedades de la relación "ser más alto que".

15. En el conjunto de polígonos determine las propiedades de la relación "tener igual número de lados que".

Soluciones

1. R_1: Refleja, simétrica, transitiva
R_2: Simétrica
R_3: Refleja, simétrica, antisimétrica, transitiva
R_4: Antisimétrica, transitiva
R_5: Refleja, antisimétrica, transitiva

2. a) Refleja, antisimétrica, transitiva
b) Simétrica
c) Refleja, simétrica, antisimétrica, transitiva
d) Antisimétrica
e) Refleja (0 es par), simétrica, transitiva
f) Simétrica
g) Simétrica
h) Refleja, simétrica

3. a) Antisimétrica
b) Refleja, antisimétrica, transitiva
c) Antisimétrica
d) Refleja
e) Simétrica
f) Simétrica

4. Refleja, antisimétrica y transitiva

6. a) Sí b)

China	Sudán
India	Japón

7. i) a) Sí b)

5	2
6	9

ii) a) Sí b)

8	9
1	3

iii) a) Sí b)

6	9
1	2

iv) a) Sí b)

4	9
1	7

v) a) Sí b)

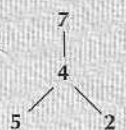
Purén	Alhué Rapel Maule

vi) a) No, no es simétrica.
b) No se puede clasificar.

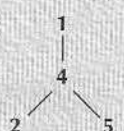
vii) a) Sí b)

Lemur	Coatí
Okapi	Koala

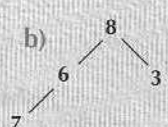
8. i) a) No

ii) a) Sí b) 

c) Orden parcial.

iii) a) Sí b) 

c) Orden parcial.

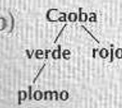
iv) a) Sí b) 

c) Orden parcial.

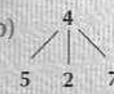
v) a) Sí b) 

c) Orden parcial.

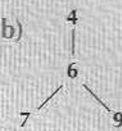
vi) a) No es relación de orden, no es antisimétrica.

vii) a) Sí b) 

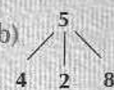
c) Orden parcial.

viii) a) Sí b) 

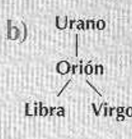
c) Orden parcial.

ix) a) Sí b) 

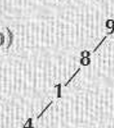
c) Orden parcial.

x) a) Sí b) 

c) Orden parcial.

xi) a) Sí b) 

c) Orden parcial.

xii) a) Sí b) 

c) Orden total.

xiii) a) No es de orden, no es refleja.

9. Simétrica.
10. Refleja, simétrica, transitiva. (Es relación de equivalencia, las personas quedan clasificadas según su edad.)
11. Simétrica.
12. Simétrica, transitiva.
13. Antisimétrica.
14. Antisimétrica, transitiva.
15. Refleja, simétrica, transitiva.

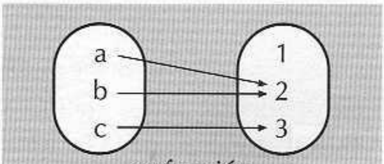
Funciones 3.4

3.4.1 Conceptos básicos

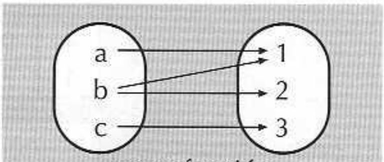
Dada una relación $F: A \to B$, esta relación es función si y sólo si **cada** elemento de A tiene imagen **única** en B.

$$(F: A \to B \text{ función}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \text{Dom } F = A \\ (F(x) = y \ \wedge F(x) = z \Rightarrow y = z) \end{pmatrix}$$

En un gráfico sagital, una relación es función si de **todos** los elementos del primer conjunto sale **una sola** flecha.

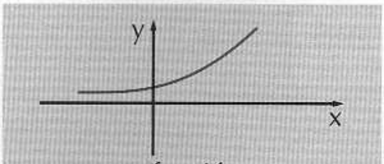


es función

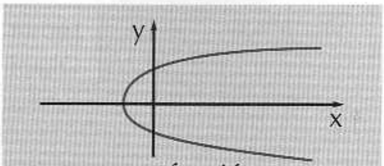


no es función

En un gráfico cartesiano una relación es función si al trazar cualquier paralela al eje y ésta corta en **un solo** punto al gráfico de la relación.



es función



no es función

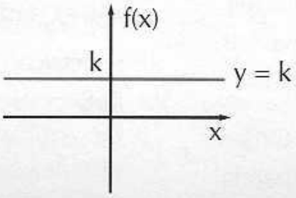
Composición de funciones.

Sea $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ funciones
$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ ver ejercicio 5.

Algunas funciones reales interesantes.

Función constante

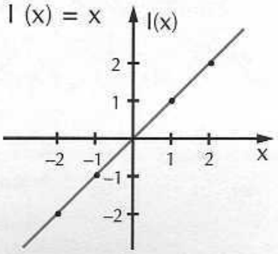
$f(x) = k$



Dom f = $\mathbb{R}$
Rang f = $\{k\}$

Función idéntica

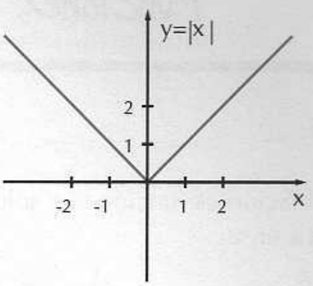
$I(x) = x$



Dom I = $\mathbb{R}$
Rang I = $\mathbb{R}$

Función valor absoluto

$$y = |x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

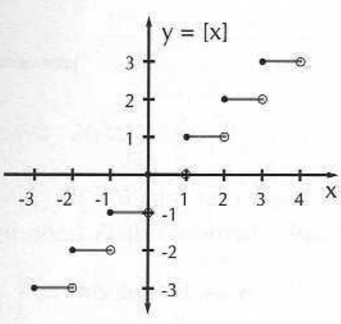


Dom $|x| = \mathbb{R}$
Rang $|x| = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

Función parte entera

$y = [x]$ = parte entera de x

$[x]$ es el entero que cumple
$x - 1 \leq [x] \leq x$



Dom $[x] = \mathbb{R}$
Rang $[x] = \mathbb{Z}$

Ejercicios resueltos

1. Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{4, 5, 6\}$. Dadas las relaciones de A en B, determinar cuáles son funciones.

a) $R = \{(1, 4)\ (2, 5)\ (3, 6)\}$
b) $R = \{(1, 4)\ (2, 4)\ (3, 4)\}$
c) $R = \{(1, 4)\ (1, 5)\ (1, 6)\ (2, 4)\ (3, 6)\}$
d) $R = \{(1, 5)\ (2, 4)\ (1, 6)\ (2, 6)\}$
e) $R = \{(1, 6)\ (2, 4)\ (3, 6)\}$

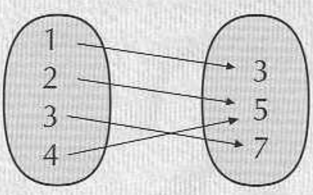
Solución:

a) R es función porque todos los elementos de A tienen una sola imagen en B.
b) R es función porque todos los elementos de A tienen una sola imagen en B, no importa que ésta sea la misma para todos.
c) R no es función porque $1 \in A$ tiene más de una imagen en B.
d) R no es función porque $3 \in A$ no tiene imagen en B.
e) R es función porque todos los elementos de A tienen una única imagen en B.

2. Dada la función $f = \{(1, 3)\ (2, 5)\ (3, 7)\ (4, 5)\}$
Determinar:
a) Dom f
b) Rang f
c) $f(1)$; $f(3)$
d) el diagrama sagital

Solución:

a) Recordemos que el dominio de una función es el conjunto de las preimágenes.
$\text{Dom } f = \{1, 2, 3, 4\}$
b) Recordemos que el rango de una función es el conjunto de las imágenes.
$\text{Rang } f = \{3, 5, 7\}$
c) $f(1) = 3$, $f(3) = 7$
d)



3. Dada la función: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \left|\frac{1}{3}x - 2\right| - 1$$

a) Graficar $f(x)$. Hallar Dom f y Rang f.
b) Determinar $f(-3)$, $f(6)$, $f(2)$
c) Determinar x si $f(x) = 1$

Solución:

a) Como se trata de una función valor absoluto, veremos para qué valor de x, $\left|\frac{1}{3}x - 2\right|$ se hace cero.

$\left|\frac{1}{3}x-2\right| = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}x - 2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}x = 2 \Rightarrow x = 6$

$\therefore\ f(6) = \left|\frac{6}{3}-2\right| - 1 = 0 - 1 = -1$

Como es un valor absoluto menos 1, la gráfica se traslada una unidad hacia abajo.

Encontraremos, además, la imagen de dos valores simétricos con respecto a 6, por ejemplo, 5 y 7.

$f(5) = \left|\frac{5}{3}-2\right| - 1 = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$

$f(7) = \left|\frac{7}{3}-2\right| - 1 = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$

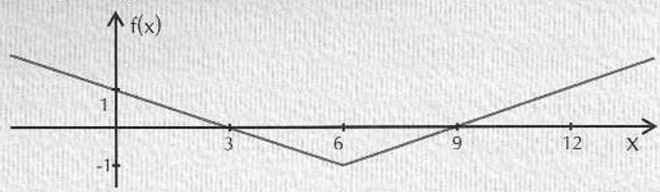
Para determinar en qué valor de x f (x) es 0, hacemos:

$\left|\frac{1}{3}x-2\right| - 1 = 0 \Rightarrow \left|\frac{1}{3}x-2\right| = 1 \Rightarrow$

$\frac{x}{3} - 2 = 1 \quad \vee \quad \frac{x}{3} - 2 = -1$

$x = 9 \quad \vee \quad x = 3$

Luego el gráfico es:



Dom f = $\mathbb{R}$, ya que cada número real tiene imagen en $\mathbb{R}$.
Rang f = $\{y \in \mathbb{R}\ /\ y \geq -1\}$, ya que el menor valor de la función es – 1.

b) $f(-3) = \left|\frac{1}{3}(-3)-2\right| - 1 = |-1-2| - 1 = |-3| - 1 = 2$

$f(6) = \left|\frac{1}{3}(6)-2\right| - 1 = |2-2| - 1 = 0 - 1 = -1$

$f(2) = \left|\frac{1}{3}(2)-2\right| - 1 = \left|\frac{2}{3}-\frac{6}{3}\right| - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$

c) $f(x) = 1 \Rightarrow \left|\frac{1}{3}x-2\right| - 1 = 1 \Rightarrow \left|\frac{1}{3}x-2\right| = 2$

$\Rightarrow \frac{x}{3} - 2 = 2 \quad \vee \quad \frac{x}{3} - 2 = -2$

$\frac{x}{3} = 4 \quad \vee \quad \frac{x}{3} = 0$

$x = 12 \quad \vee \quad x = 0$

Así, si f (x) = 1 entonces x = 12 y x = 0

4. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x+3}{x-3}$

a) ¿Es f una función?

b) Si no lo es, cómo podemos hacer que lo sea.

c) Hallar f (1), f (0), f (3), f (– 3), f (5)

Solución:

a) f no es función, porque 3 no tiene imagen, ya que al calcular f (3) aparece una indeterminación.

b) Si f la definimos de $\mathbb{R} - \{3\}$ en $\mathbb{R}$, entonces f es función, porque cada número real distinto de 3 tiene una imagen única en $\mathbb{R}$.

c) $f\ (1) = \dfrac{1+3}{1-3} = \dfrac{4}{-2} = -2$

$f\ (0) = \dfrac{0+3}{0-3} = -1$

$f\ (3) =$ no existe

$f\ (-3) = \dfrac{-3+3}{-3-3} = \dfrac{0}{-6} = 0$

$f\ (5) = \dfrac{5+3}{5-3} = \dfrac{8}{2} = 4$

5. Sean f y g funciones reales definidas por

$f\ (x) = 2x - 3$ y $g\ (x) = 4 - 5x$. Hallar :

a) $(f \circ g)\ (3)$

b) $(g \circ f)\ (-1)$

c) Una fórmula para $f \circ g$ y para $g \circ f$

Solución:

a) $(f \circ g)\ (3) = f\ (g\ (3)) = f\ (4 - 5 \cdot 3) = f\ (-11) = -25$

b) $(g \circ f)\ (-1) = g\ (f\ (-1)) = g\ (2 \cdot (-1) - 3) = g\ (-5) = 29$

c) $(f \circ g)\ (x) = f\ (g\ (x)) = f\ (4 - 5x) = 2\ (4 - 5x) - 3 = 5 - 10x$

$(g \circ f)\ (x) = g\ (f\ (x)) = g\ (2x - 3) = 4 - 5\ (2x - 3) = 19 - 10x$

Ejercicios

1. Sean $A = \{1, 3, 5, 7\}$ y $B = \{2, 4, 6\}$. Determine si las siguientes relaciones de A en B son o no funciones. Justifique la respuesta.

a) $R = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 6)\}$

b) $R = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6)\}$

c) $S = \{(3, 4), (5, 6), (7, 2), (7, 4)\}$

d) $S = \{(1, 4), (3, 4), (5, 4), (7, 4)\}$

e) $T = \{(7, 6), (5, 4), (3, 2), (1, 2)\}$

f) $T = \{(1, 6), (3, 4), (5, 2), (5, 4), (7, 6)\}$

g) $R = \{(3, 2), (3, 4), (3, 6)\}$

2. Sea $A = \{-3, 0, 3\}$. Determine si las siguientes relaciones en A son o no funciones. Justifique la respuesta.

a) $R = \{(-3, -3), (0, 0), (3, 3)\}$

b) $R = \{(0, -3), (3, 0), (-3, 3)\}$

c) $R = \{(0, -3), (0, 3), (0, 0)\}$

d) $R = \{(-3, 0), (3, 0)\}$

e) $R = \{(-3, 0), (0, 0), (3, 0)\}$

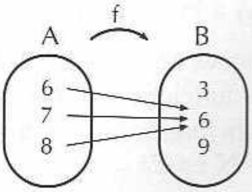
f) $R = \{(-3, -3), (3, 3), (0, -3), (0, 3)\}$

g) $R = \{(3, 0), (3, -3), (3, 3)\}$.

3. Sean $A = \{6, 7, 8\}$ y $B = \{3, 6, 9\}$.

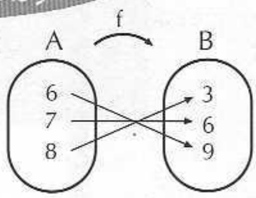
Sea f una relación de A en B definida en los diagramas dados. Determine en qué casos f es función. Justifique la respuesta.

a)

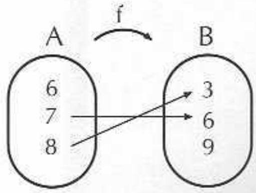


Ejercicios

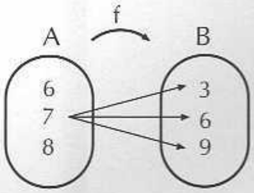
b)



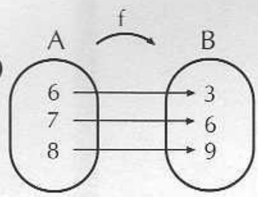
c)



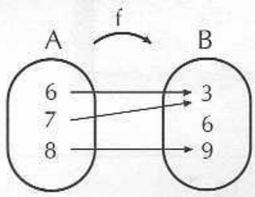
d)



e)



f)



4. Dadas las relaciones siguientes, determine si son o no funciones. Justifique la respuesta en caso de que no lo sean.

a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,/\, y = \frac{12 - x}{3}\}$

b) $F = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,/\, y = x + 1\}$

c) $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,/\, y = x - 1\}$

d) $F = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ / y es múltiplo de x$\}$

e) $G = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,/\, y = x^2 + x\}$

f) $G = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,/\, y = x^2 + 1\}$

g) $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,/\, y = 7 - x\}$

5. De las relaciones del ejercicio anterior que no son funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$, ¿cuáles serían funciones si estuvieran definidas de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}$?

6. Sea $F = \{(2,3)\ (3,5)\ (4,7)\ (5,9)\}$ una función. Determine:

a) Dom F

b) Rang F

c) F(2), F(3), F(5)

d) El diagrama sagital

7. En cada una de las siguientes funciones encuentre las imágenes pedidas.

a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = 5 + n$
$f(1)$, $f(5)$, $f(10)$, $f(50)$

b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 6 - 4x$
$f(-3)$, $f(0)$, $f(5)$, $f(9)$

c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = 3x - 1$

$h\left(-\frac{1}{2}\right)$, $h\left(\frac{1}{3}\right)$, $h(6)$, $h(a + 1)$

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$

$f(-3)$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f(0)$, $f(0{,}2)$

e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x - 2)\,(x + 3)\,(x - 5)$
$f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$

f) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = |x^2 - 3|$
$g(4)$, $g(1)$, $g(-1)$, $g(3)$

g) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4x$
$f(a)$, $f(2a)$, $f(a + \varepsilon)$, $f(a - 3)$

8. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la función definida por

$$f(n) = \begin{cases} n + 2 \text{ si } n \leq 4 \\ n - 2 \text{ si } n > 4 \end{cases}$$

Encuentre:

$f(1)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$, $f(10)$

9. $A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{2}$$

Determine Rang f.

10. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida por

$$g(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \leq 1 \\ 2 & \text{si } 1 < x < 3 \\ -x + 3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

a) Grafique la función g. Hallar Dom g y Rang g.

b) Determine

$g(0)$, $g(1)$, $g(-1)$, $g(2)$, $g(2{,}5)$, $g(5)$

11. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x \leq -1 \\ x - 1 & \text{si } -1 < x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

a) Grafique la función f. Halle: Dom f y Rang f.

b) Encuentre

$f\left(-\frac{7}{3}\right)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f\left(\frac{4}{3}\right)$

12. Sea $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2x+6}{3} & \text{si } x < 2 \\ x + 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

a) Grafique la función g. Halle: Dom g y Rang g

b) Determine

$g(-3)$, $g(-1)$, $g(0)$, $g(2)$, $g(3)$, $g(10)$

13. Sea $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida por $g(x) = |2x - 1|$

a) Haga un gráfico.
Halle Dom g y Rang g.

b) Determine $g(2)$, $g(-2)$, $g(5)$

c) Determine x si $g(x) = 9$

d) Determine x si $g(x) = 0$

14. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida por

$$f(x) = \left|\frac{1}{2}x + 3\right| + 1$$

a) Haga un gráfico de $f(x)$.
Halle Dom f y Rang f.

b) Determine $f(2)$, $f(-5)$, $f(-6)$, $f(-7)$, $f(0)$

c) Determine x si $f(x) = 5$

d) Determine x si $f(x) = 0$

15. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida por

$$f(x) = 1 - |x - 3|$$

a) Haga un gráfico de $f(x)$.
Halle Dom f y Rang f.

b) Determine $f(3)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(0)$, $f(6)$

c) Determine x si $f(x) = 0$

d) Determine x si $f(x) = 2$

16. Sea $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida por

$$g(x) = 2 - |2x + 1|$$

a) Haga un gráfico de g.
Halle Dom g y Rang g.

b) Determine

$g\left(-\frac{1}{2}\right)$, $g(0)$, $g(-1)$, $g(1)$, $g(-2)$

c) Determine x si $g(x) = 1$

d) Determine x si $g(x) = 0$

17. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida por $f(x) = 1 + [x]$

a) Grafique f. Halle Dom f y Rang f

b) Determine:
$f(1)$, $f(1{,}3)$, $f(1{,}5)$, $f(0)$ $f(0{,}2)$, $f(-3)$, $f(-3{,}5)$, $f(-3{,}8)$

c) Determine: x tal que $f(x) = 2$

d) Determine: x tal que $f(x) = -4$

18. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una relación definida por

$$f(x) = \frac{x-3}{x+3}$$

a) ¿Es f una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$?

b) Si no lo es, ¿cómo puede hacer que lo sea?

c) Determine: $f(3)$, $f(-3)$, $f(0)$, $f(2)$

19. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una relación definida por

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

a) ¿Es f una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$?

b) Si no lo es, ¿cómo puede hacer que lo sea?

c) Determine: $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$
$f(-1)$, $f(-2)$ y $f\left(-\frac{1}{2}\right)$

d) Bosqueje un gráfico de f

20. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una relación definida por

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

a) ¿Es f una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$?

b) Si no lo es, ¿cómo puede hacer que lo sea?

c) Determine: $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(1)$, $f\left(\frac{3}{2}\right)$, $f(0)$

d) Bosqueje un gráfico de f

21. Sean $f(x) = 2x - 1$ y $g(x) = x + 2$ dos funciones reales.
Halle:

a) $(f \circ g)(2)$

b) $(g \circ f)(2)$

c) $(f \circ f)(3)$

d) Una expresión para $(f \circ g)(x)$ y para $(g \circ f)(x)$.

Ejercicios

22. Sean $f(x) = 2x$, $g(x) = x^2$ y $h(x) = x+2$ tres funciones reales. Determine:

a) $(f \circ g \circ h)(3)$
b) $(g \circ h \circ f)(-2)$
c) $(g \circ h \circ g)(1)$
d) una fórmula para $(h \circ g \circ f)(x)$

23. Sean $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$ dos funciones reales. Determine:

a) Dom f y Dom g
b) $(f \circ g)(3)$
c) $(f \circ g)(-2)$
d) $(g \circ f)(1)$
e) $(g \circ f)\left(\dfrac{1}{2}\right)$
f) una expresión para $f \circ g$
g) una expresión para $g \circ f$
h) Dom $f \circ g$ y Dom $g \circ f$

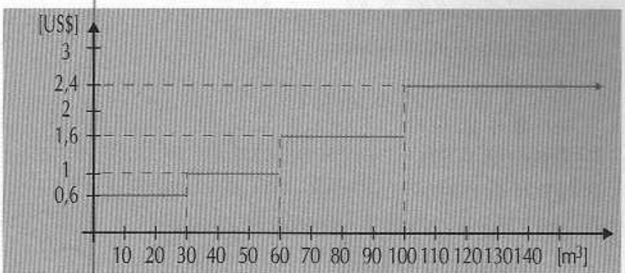
24. Sean $f(x) = 2x^2 - x + 3$ y $g(x) = x^2 - 1$ dos funciones reales. Determine:

a) $(f \circ g)(-5)$
b) $(g \circ f)(2)$
c) $(g \circ g)(-3)$
d) $(f \circ f)(1)$
e) una expresión para $f \circ g$ y $g \circ f$

25. Sean $h(x) = x^3 + 1$ y $g(x) = x^2$ dos funciones reales. Determine:

a) $(h \circ g)(-1)$
b) $(g \circ h)(-3)$
c) $(h \circ g)(x)$
d) $(g \circ h)(x)$

26. Suponiendo que el gráfico siguiente representa los valores en US$ por metro cúbico del consumo de agua potable en una ciudad desértica.



Responda las siguientes preguntas:

a) Una familia consumió 25 m^3 en el mes. ¿Cuánto debe cancelar?

b) Al mes siguiente se queda una llave goteando y el medidor arroja 52 m^3. De acuerdo con el gráfico de la tarifa, ¿pagará poco más que el doble que el mes anterior o mucho más que el doble? ¿A qué se debe?

c) ¿Cuánto debe cancelar por metro cúbico una familia que gasta entre 70 y 80 m^3 al mes?

d) ¿Hasta cuántos metros cúbicos puede gastar una familia para no cancelar más de 1 US$ por m^3?

e) Si en la cuenta se lee un cobro fijo de US$ 3 y el total a cancelar es de US$ 105. ¿Qué cantidad de m^3 consumió esa familia en el mes?

f) Defina la función del gráfico a través de una fórmula y calcule su dominio y su recorrido.

27. Si $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 1$

a) Grafique $f(x)$
b) Calcule y grafique $f(x+1)$
c) Calcule y grafique $f(x-1)$
d) Calcule y grafique $f(x) + 1$
e) Calcule y grafique $f(x) - 1$
f) Compare los resultados y establezca alguna conjetura.

28. Escriba algunas funciones $y = f(x)$ e investigue qué ocurre con $f(x \pm k)$ y $f(x) \pm k$ para $k \in \mathbb{N}$.

Ej. 1: $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $f(x+2) = \dfrac{1}{x+2}$;

$f(x) + 2 = \dfrac{1}{x} + 2$

Ej. 2: $f(x) = |x+3|$; $f(x-5) = |x-2|$;

$f(x) - 5 = |x+3| - 5$

Grafique y determine intersecciones con los ejes, y determine dominios y rangos.

Soluciones

1. a) R es función porque cada elemento de A tiene imagen única en B.
   b) R no es función porque $7 \in A$ no tiene imagen en B.
   c) S no es función porque $1 \in A$ no tiene imagen en B y además $7 \in A$ tiene más de una imagen.
   d) S es función porque cada elemento de A tiene imagen única en B.
   e) T es función porque cada elemento de A tiene imagen única en B.
   f) T no es función porque $5 \in A$ tiene más de una imagen en B.
   g) R no es función porque hay elementos de A que no tienen imagen en B y además $3 \in A$ tiene más de una imagen en B.

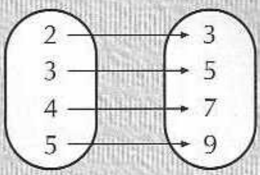
2. a) R es función porque cada elemento de A tiene imagen única en A.
   b) R es función porque cada elemento de A tiene imagen única en A.
   c) R no es función porque $0 \in A$ tiene más de una imagen en A y además hay elementos de A que no tienen imagen.
   d) R no es función porque 0 no tiene imagen.
   e) R es función porque cada elemento de A tiene una única imagen en A.
   f) R no es función porque $0 \in A$ tiene más de una imagen en A.
   g) R no es función porque hay elementos de A que no tienen imagen en A y además el $3 \in A$ tiene más de una imagen en A.

3. a) Es función.
   b) Es función.
   c) No es función, 6 no tiene imagen.
   d) No es función, 7 tiene más de una imagen, 6 y 8 no tienen imagen.
   e) Es función.
   f) Es función.

4. a) No es función, hay números naturales que no tienen imagen en $\mathbb{N}$, ejemplo:
   si $x = 1$ entonces $y = \frac{11}{3} \notin \mathbb{N}$.
   b) Es función.
   c) No es función, 1 no tiene imagen en $\mathbb{N}$.
   d) No es función, cada número natural tiene infinitas imágenes.
   e) Es función.
   f) Es función.
   g) No es función, los números naturales mayores que 6 no tienen imagen en $\mathbb{N}$.

5. **c**, y **g**,

6. a) Dom F $= \{2, 3, 4, 5\}$
   b) Rang F $= \{3, 5, 7, 9\}$
   c) $F(2) = 3$; $F(3) = 5$; $F(5) = 9$
   d)

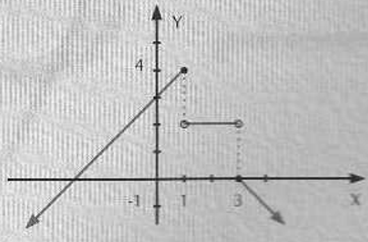


7. a) $f(1) = 6$, $f(5) = 10$, $f(10) = 15$, $f(50) = 55$
   b) $f(-3) = 18$, $f(0) = 6$, $f(5) = -14$ $f(9) = -30$
   c) $h\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{2}$, $h\left(\frac{1}{3}\right) = 0$, $h(6) = 17$
   $h(a + 1) = 3a + 2$
   d) $f(-3) = 20$, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{4}$, $f(0) = -1$
   $f(0{,}2) = -0{,}48$
   e) $f(-1) = 36$, $f(0) = 30$, $f(1) = 16$ $f(2) = 0$
   f) $g(4) = 13$, $g(1) = 2$, $g(-1) = 2$ $g(3) = 6$
   g) $f(a) = 4a$, $f(2a) = 8a$, $f(a + \epsilon) = 4a + 4\epsilon$
   $f(a - 3) = 4a - 12$

8. $f(1) = 3$, $f(3) = 5$, $f(4) = 6$, $f(5) = 3$, $f(10) = 8$

9. Rang $f = \left\{\frac{15}{2}, 4, \frac{3}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right\}$

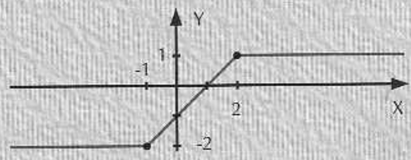
10. a)



Dom $g = \mathbb{R}$
Rang $g = \{y \in \mathbb{R} / y \leq 4\}$

b) $g(0) = 3$, $g(1) = 4$, $g(-1) = 2$
$g(2) = 2$, $g(2{,}5) = 2$, $g(5) = -2$

11. a)



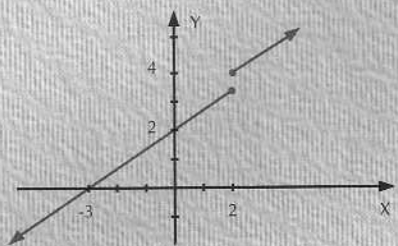
Dom f = $\mathbb{R}$

Rang f = $\{ y \in \mathbb{R} / -2 \le y \le 1\}$

b) $f\left(-\dfrac{7}{3}\right) = -2$, $f(-1) = -2$, $f(0) = -1$,

$f(1) = 0$, $f(2) = 1$, $f\left(\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{1}{3}$

12. a)



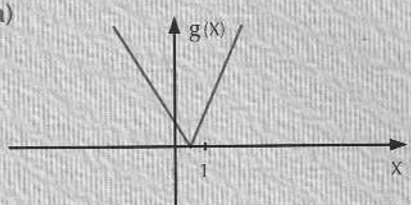
Dom g = $\mathbb{R}$

Rang g = $\{ y \in \mathbb{R} / y \le \dfrac{10}{3} \vee y \ge 4\}$

b) $g(-3) = 0$, $g(-1) = \dfrac{4}{3}$, $g(0) = 2$,

$g(2) = 4$, $g(3) = 5$, $g(10) = 12$

13. a)



Dom g = $\mathbb{R}$

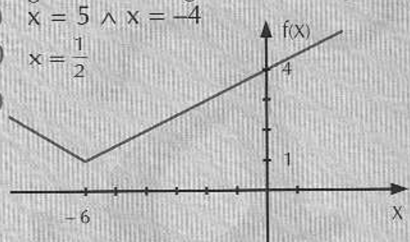
Rang g = $\{ y \in \mathbb{R} / y \ge 0\}$

b) $g(2) = 3$, $g(-2) = 5$, $g(5) = 9$

c) $x = 5 \wedge x = -4$

d) $x = \dfrac{1}{2}$

14. a)



Dom f = $\mathbb{R}$

Rang f = $\{ y \in \mathbb{R} / y \ge 1\}$

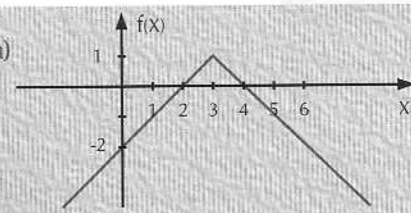
b) $f(2) = 5$, $f(-5) = \dfrac{3}{2}$, $f(-6) = 1$, $f(-7) = \dfrac{3}{2}$

$f(0) = 4$

c) $x = -6$

d) $\nexists\, x \in \mathbb{R}$

15. a)



Dom f = $\mathbb{R}$

Rang f = $\{ y \in \mathbb{R} / y \le 1\}$

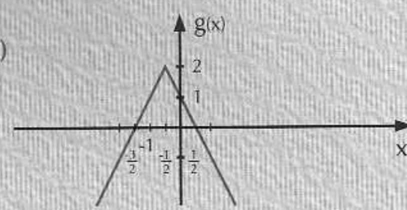
b) $f(3) = 1$, $f(2) = 0$, $f(4) = 0$,

$f(0) = -2$, $f(6) = -2$

c) $x = 4 \vee x = 2$

d) no existe x ya que $f(x) = 2 \notin$ Rang f.

16. a)



Dom g = $\mathbb{R}$

Rang g = $\{y \in \mathbb{R} / y \le 2\}$

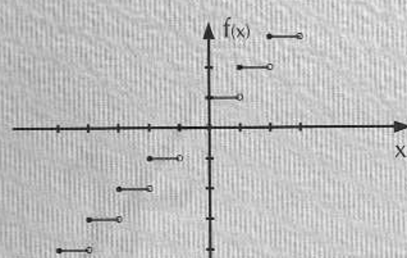
b) $g\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 2$, $g(0) = 1$, $g(-1) = 1$,

$g(1) = -1$, $g(-2) = -1$

c) $x = 0 \vee x = -1$

d) $x = \dfrac{1}{2} \vee x = -\dfrac{3}{2}$

17. a)



Dom f = $\mathbb{R}$

Rang f = $\mathbb{Z}$

b) $f(1) = 2$, $f(1,3) = 2$, $f(1,5) = 2$,

$f(0) = 1$, $f(0,2) = 1$, $f(-3) = -2$,

$f(-3,5) = -3$, $f(-3,8) = -3$

c) $x \in [1, 2)$

d) $x \in [-5, -4)$

18. a) f no es función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ porque f (–3) no existe.

b) definiendo f de $\mathbb{R} - \{-3\}$ en $\mathbb{R}$.

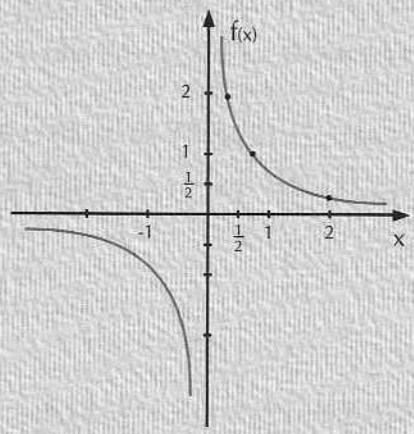
c) $f(3) = 0$, $f(-3) =$ no existe, $f(0) = -1$, $f(2) = -\frac{1}{5}$

19. a) f no es función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ porque f (0) no existe.

b) definiendo f de $\mathbb{R} - \{0\}$ en $\mathbb{R}$.

c) $f(0) =$ no existe, $f(1) = 1$, $f(2) = \frac{1}{2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$, $f(-1) = -1$, $f(-2) = -\frac{1}{2}$, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$

d)

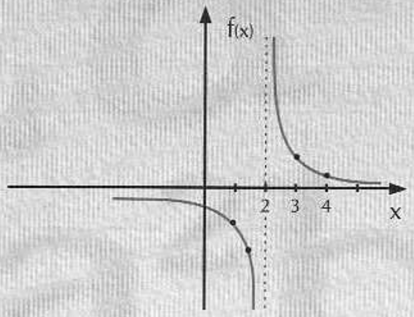


20. a) f no es función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ porque f (2) no existe.

b) definiendo f de $\mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$

c) $f(2) =$ no existe, $f(3) = 1$, $f(4) = \frac{1}{2}$, $f(1) = -1$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = -2$, $f(0) = -\frac{1}{2}$

d)



21. a) 7 b) 5 c) 9 d) $(f \circ g)(x) = 2x + 3$
$(g \circ f)(x) = 2x + 1$

22. a) 50 b) 4 c) 9 d) $4x^2 + 2$

23. a) Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$, Dom $g = \mathbb{R} - \{2\}$

b) $\frac{1}{5}$ c) no existe d) – 3 e) no existe

f) $\frac{x-2}{x+2}$ g) $\frac{1+2x}{1-2x}$

h) Dom $f \circ g = \mathbb{R} - \{-2\}$

Dom $g \circ f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

24. a) 1.131 b) 80 c) 63 d) 31

e) $(f \circ g)(x) = 2x^4 - 5x^2 + 6$;

$(g \circ f)(x) = 4x^4 - 4x^3 + 13x^2 - 6x + 8$

25. a) 2 b) 676 c) $x^6 + 1$ d) $x^6 + 2x^3 + 1$

26. a) US$ 15

b) Debe cancelar US$ 52, lo que representa mucho más del doble, porque el consumo cayó en el tramo entre 30 y 60 m^3, cuyo valor es de US$ 1 por m^3.

c) US$ 1,6

d) 60 m^3

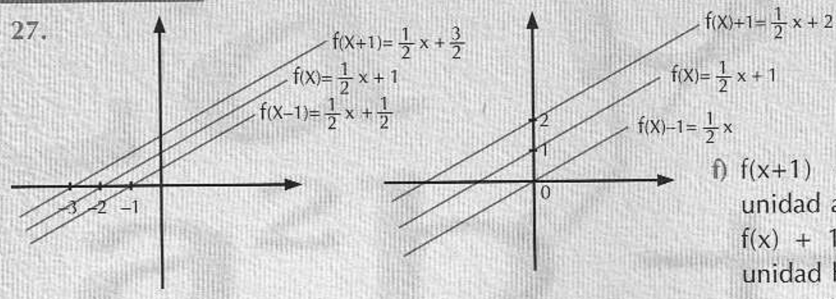
e) 63,75 m^3

f) $f(x) = \begin{cases} 0{,}6 & \text{si } 0 < x \leq 30 \\ 1 & \text{si } 30 < x \leq 60 \\ 1{,}6 & \text{si } 60 < x \leq 100 \\ 2{,}4 & \text{si } 100 < x\,; \end{cases}$

Dom $f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

Rang $f = \{0{,}6\ ,\ 1\ ,\ 1{,}6\ ,\ 2{,}4\}$

27.



f) f(x+1) está desplazada 1 unidad a la izquierda de f(x). f(x) + 1 está desplazada 1 unidad hacia arriba de f(x).

3.4.2 La función de primer grado (Ecuación de la recta)

$y = f(x) = a\,x + b, \;\; a \neq 0, \;\; a, b \in \mathbb{R}$

Dom f = $\mathbb{R}$ Rang f = $\mathbb{R}$

Su gráfico es una recta y depende de los valores que tomen a y b.

b se llama **coeficiente de posición** y (0, b) es el punto donde la recta intersecta al eje y.

a, coeficiente de x, es el valor de la pendiente de la recta.

Si en una recta (x_1, y_1) y (x_2, y_2), con $x_1 \neq x_2$ son puntos de ella, entonces.

Su pendiente es $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

Su ecuación es: $(y - y_1) = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

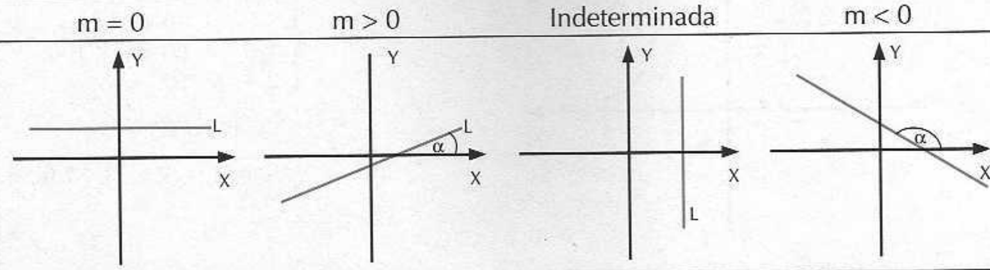
la cual se puede escribir en la forma: y = m x + k, donde m es la pendiente y k el coeficiente de posición.

Si los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son tales que $x_1 = x_2$, entonces la recta es paralela al eje y, su pendiente es indeterminada y su ecuación es $x = x_1$

Se llama ángulo de inclinación (α) de una recta al ángulo que la recta forma con la parte positiva del eje x.

Relación entre el ángulo de inclinación (α) y la pendiente (m) de una recta L

α	$\alpha = 0$	$0° < \alpha < 90°$	$\alpha = 90°$	$90° < \alpha < 180°$
m	$m = 0$	$m > 0$	Indeterminada	$m < 0$
GRÁFICO				



Relación entre las pendientes y la posición de dos rectas en el plano.

- Dos rectas L_1 y L_2 son paralelas si y sólo si sus pendientes son iguales.

$$(L_1 \parallel L_2) \Leftrightarrow (m_1 = m_2)$$

- Dos rectas L_1 y L_2 son perpendiculares si y sólo si el producto de sus pendientes es -1

$$(L_1 \perp L_2) \Leftrightarrow (m_1 \cdot m_2 = -1)$$

Ejercicios resueltos

1. Dada una ecuación de primer grado en dos variables, siempre es posible despejar una de las variables en función de la otra.

Así, dada la ecuación: $ax + by + c = 0 \qquad (b \neq 0)$
podemos escribir:

$$y = \frac{-ax - c}{b}$$

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

si hacemos $-\frac{a}{b} = m$ y $-\frac{c}{b} = k$
escribimos $y = mx + k$, que es una función de primer grado y representa una recta de pendiente m y coeficiente de posición k.

a se llama coeficiente de x.
b se llama coeficiente de y.
c se llama término libre.

Dada la ecuación $5x + 3y - 6 = 0$

Hallar:

a) el coeficiente de x.
b) el coeficiente de y.
c) el término libre.
d) la pendiente m de la recta que representa.
e) el coeficiente de posición k de la recta que representa.

Solución:

a) coeficiente de $x = 5$
b) coeficiente de $y = 3$
c) término libre $= -6$
d) debemos escribir la ecuación en forma de función de primer grado:

$$y = -\frac{5}{3}x + 2$$

luego $m = -\frac{5}{3}$

e) En la misma función del punto d) $k = 2$

2. Escribir la ecuación $2x - 1 = 0$ como una función de primer grado $y = f(x)$.

Solución:

No es posible escribir la ecuación $2x - 1 = 0$ como una función de primer grado $y = f(x)$ porque la variable y no aparece en la ecuación y esto significa que su coeficiente es 0.

Ejercicios resueltos

3. Dada la ecuación $5x - 3y + 8 = 0$ encontrar dos puntos que pertenezcan a la recta que representa y graficarla.

Solución:

Recordemos que un punto pertenece a una recta si y sólo si satisface su ecuación.

Dando valores a una de las variables podemos obtener el valor correspondiente a la otra, de modo que el par (x, y) sea un punto de la recta representada por la ecuación $5x - 3y + 8 = 0$.

Así, si $x = 2 \Rightarrow 5 \bullet 2 + 3y + 8 = 0$

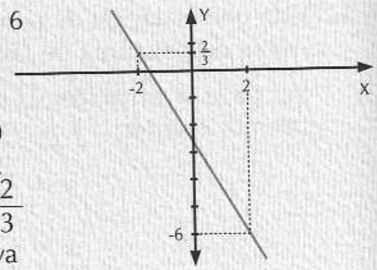
$$3y = -18$$
$$y = -6$$

$\therefore$ (2, –6) es punto de la recta cuya ecuación es $5x + 3y + 8 = 0$

Si $x = -2 \Rightarrow 5 \bullet (-2) + 3y + 8 = 0$

$$3y = 2$$
$$y = \frac{2}{3}$$

$\therefore$ $\left(-2, \frac{2}{3}\right)$ es punto de la recta cuya ecuación es $5x + 3y + 8 = 0$



Sabemos que dados dos puntos de una recta, ésta queda definida (ver gráfico).

4. Graficar las rectas representadas por las siguientes ecuaciones:

a) $x - 2y + 6 = 0$

b) $x - 1 = 2$

c) $1 - 2y = 5$

Solución:

a) Para graficar la recta cuya ecuación es $x - 2y + 6 = 0$ buscaremos dos puntos de ella.

Si $x = 2 \Rightarrow 2 - 2y + 6 = 0$

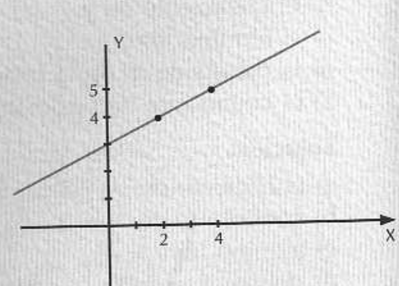
$$-2y = -8$$
$$y = 4$$

$\therefore$ (2, 4) es un punto de la recta

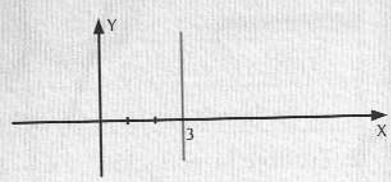
Si $x = 4 \Rightarrow 4 - 2y + 6 = 0$

$$-2y = -10$$
$$y = 5$$

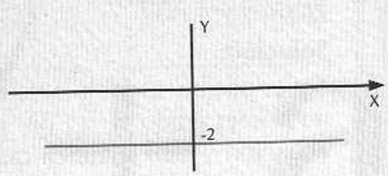
$\therefore$ (4, 5) es un punto de la recta (ver gráfico).



b) La ecuación $x - 1 = 2$ es equivalente a la ecuación $x = 3$; representa todos los puntos del plano cuya abscisa vale 3 (es paralela al eje Y).



c) La ecuación $1 - 2y = 5$ es equivalente a la ecuación $y = -2$; representa todos los puntos del plano cuya ordenada es –2 (es paralela al eje X).



5. Hallar los puntos en que la recta cuya ecuación es $4x - 6y + 8 = 0$ intersecta a los ejes coordenados. Graficarla.

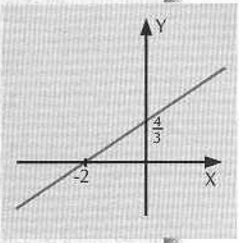
Solución:

Intersección al eje X: Como todos los puntos del eje x son de la forma (x, 0), debemos encontrar el punto que satisface la ecuación de la recta y tiene ordenada $y = 0$

Si $y = 0 \Rightarrow 4x + 8 = 0 \Rightarrow x = -2$

$\therefore$ La recta intersecta al eje X en $(-2, 0)$

Intersección al eje Y: Como todos los puntos del eje y son de la forma (0, y), debemos encontrar el punto que satisface la ecuación de la recta y tiene abscisa $x = 0$



Si $x = 0 \Rightarrow -6y + 8 = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{3}$

$\therefore$ La recta intersecta al eje Y en $\left(0, \frac{4}{3}\right)$

Con los dos puntos de intersección podemos trazar su gráfico.

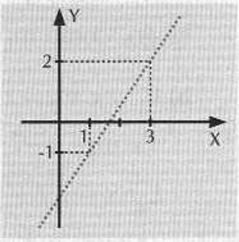
6. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (3, 2) y (1, –1). Graficarla.

Solución:

Si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son puntos de una recta, su ecuación es:

$y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ (*)

donde $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$ (pendiente).



Sea $(x_1, y_1) = (3, 2)$ y $(x_2, y_2) = (1, -1)$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-2}{1-3} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

Luego en (*) queda:

$$\begin{aligned} y - 2 &= \tfrac{3}{2}(x - 3) \quad / \cdot 2 \\ 2y - 4 &= 3x - 9 \\ 3x - 2y - 5 &= 0 \end{aligned}$$

$3x - 2y - 5 = 0$ es la ecuación pedida (ver gráfico).

7. Hallar la ecuación de una recta cuya pendiente es –3 y pasa por el punto (2, –5)

Solución:

$m = -3$ y $(x_1, y_1) = (2, -5)$

La ecuación pedida es:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y + 5 &= -3(x - 2) \\ y + 5 &= -3x + 6 \end{aligned}$$

$3x + y - 1 = 0$ es la ecuación buscada.

8. Determinar si los tres puntos (–3, 2), (–2, 0) y (1, –6) son colineales.

Solución:

Para que tres puntos sean colineales, la pendiente de la recta definida por dos de ellos debe ser igual a la pendiente de la recta definida por el tercer punto y cualquiera de los dos anteriores:

Pendiente m_1 entre (–3, 2) y (–2, 0)

$m_1 = \dfrac{0-2}{-2+3} = -2$

Pendiente m_2 entre (–2, 0) y (1, –6)

$m_2 = \dfrac{-6-0}{1+2} = -2$

Como $m_1 = m_2$, los tres puntos son colineales.

9. Determinar si las rectas determinadas por los siguientes pares de ecuaciones son paralelas, perpendiculares o sólo son secantes.

a) $L_1: 2x - 3y + 6 = 0$ $\quad L_2: 9y - 6x = 0$

b) $L_1: 2x + y - 1 = 0$ $\quad L_2: x - 2y + 3 = 0$

c) $L_1: 1 - 4x = y$ $\quad L_2: 2x + 5y - 3 = 0$

Solución:

Para responder hay que calcular y comparar las pendientes de las rectas.

a) $L_1: 2x - 3y + 6 = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + 2$

$\therefore\ m_{L1} = \frac{2}{3}$

$L_2: 9y - 6x = 0 \Rightarrow y = \frac{6}{9}x \Rightarrow y = \frac{2}{3}x$

$\therefore\ m_{L2} = \frac{2}{3}$

luego, como $m_{L1} = m_{L2}$, entonces $L_1 \,//\, L_2$

b) $L_1: 2x + y - 1 = 0 \Rightarrow y = -2x + 1$

$\therefore\ m_{L1} = -2$

$L_2: x - 2y + 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

$\therefore\ m_{L2} = \frac{1}{2}$

luego, como $m_{L1} \bullet m_{L2} = -2 \bullet \frac{1}{2} = -1$, entonces $L_1 \perp L_2$

c) $L_1: 1 - 4x = y \Rightarrow y = -4x + 1$

$\therefore\ m_{L1} = -4$

$L_2: 2x + 5y - 3 = 0 \Rightarrow y = -\frac{2}{5}x + \frac{3}{5}$

$\therefore\ m_{L2} = -\frac{2}{5}$

Como $m_{L1} \neq m_{L2}$, las rectas no son paralelas.

Como $m_{L1} \bullet m_{L2} \neq -1$, las rectas no son perpendiculares.

Luego podemos decir que son rectas secantes. Con ayuda de algún concepto de trigonometría podríamos calcular el ángulo formado por las rectas.

10. Encontrar la ecuación de la familia de rectas que pasan por el punto (5, 3). Dibujar 3 de ellas.

Solución:

Para definir una recta necesitamos conocer dos parámetros, los que pueden ser dos puntos de ella o un punto y su pendiente.

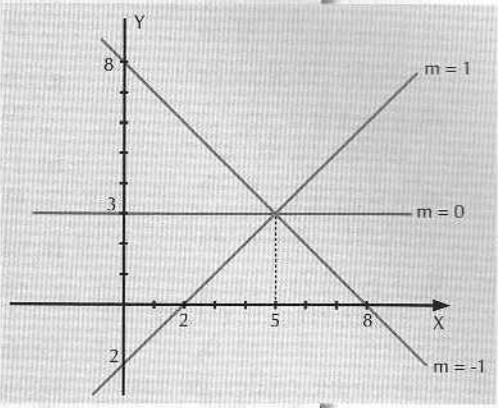
En este caso sólo tenemos un parámetro, el punto (5,3), por ello sólo podemos encontrar la ecuación de la familia de rectas (todas las rectas) que pasan por el punto (5,3) dándole a la pendiente un valor m.

Entonces la pendiente es m y $(x_1, y_1) = (5,3)$.
Así, la ecuación de la familia es:

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 3 = m(x - 5)$

$mx - y - 5m + 3 = 0$



Ahora, para dibujar 3 de ellas debemos asignar 3 valores distintos a su pendiente m.

si $m = 1 \Rightarrow x - y - 2 = 0$

si $m = 0 \Rightarrow -y + 3 = 0$

si $m = -1 \Rightarrow -x - y + 8 = 0$

Ejercicios

1. Determine coeficiente de x, coeficiente de y, y término libre en cada una de las siguientes ecuaciones.

   a) $4x + 6y + 1 = 0$

   b) $3x - y + 5 = 0$

   c) $2x = 5 + y$

   d) $6y - 2x = 3$

   e) $4x + y = 0$

   f) $6x = 2y$

   g) $4x - 1 = 0$

   h) $1 - 5x = 0$

   i) $1 = 6y$

   j) $2y - 3 = 0$

   k) $\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y - 1 = 0$

   l) $0,5x = 1 + 2,5y$

   m) $3x = 2y + x - 1$

   n) $ax = 2by + c$

   o) $ax - bx + aby - b = 0$

   p) $y = mx + k$

   q) $ax - by = 2a + b$

   r) $x = 1 - y + x - 3k$

   s) $2x - ky + y - 3 = 1$

   t) $x + 2y - 4 = y + k$

2. Exprese cada una de las ecuaciones del ejercicio anterior como una función de primer grado $y = f(x)$. Si no es posible, indique por qué.

3. Escriba dos soluciones de cada una de las ecuaciones siguientes:

   a) $4x - y + 2 = 0$

   b) $6x - 2 = y$

   c) $3x - 1 = 5$

   d) $6x - y = 0$

   e) $x - 2y + 9 = 0$

   f) $x + 1 = 0$

   g) $y = 2$

   h) $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y = 1$

   i) $9x - \frac{1}{2}y - 0,5 = 0$

   j) $12x - y + 1 = 0$

4. Determine cuáles de los pares de valores indica-

dos satisfacen la ecuación dada.

a) $6x - y + 3 = 0$
$(1, 1)$, $(0, 3)$, $(1, -3)$

b) $y + 2x - 5 = 0$
$\left(\frac{1}{2}, 4,\right)$, $(2, 1)$, $(3, -1)$

c) $6y = 12$
$(2, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 2)$

d) $4x - y = 0$
$(0, 0)$, $(1, 4)$, $(2, 7)$

e) $x = 2y - 1$
$(1, 1)$, $(3, 2)$, $(2, 3)$

f) $1 = x + 2y$
$(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$

5. Determine cuáles de las siguientes ecuaciones representan una recta que pasa por el origen (el punto $(0, 0)$).

a) $6x - y = 0$

b) $4x + 1 = y$

c) $x - 2y + 1 = 1$

d) $1 - x - 5y + 3 = 4$

e) $2x - 5y = x - y$

f) $1 - 2y = x + 2$

g) $6x - 2y = 5$

h) $1 + 2y = 1 - 3x$

i) $x - 2y + 4 = y + 1$

j) $x - y - 1 = 1$

6. Determine el valor de k en la ecuación para que la recta que representa pase por el punto dado.

a) $x - 2y + k = 0$
$(1, 1)$

b) $3x + 2y - k = 0$
$(2, 3)$

c) $x + ky - 5 = 1$
$(-3, -1)$

d) $kx - y = 2k$
$(-5, 1)$

e) $kx + 2ky + k = 0$
$(1, -1)$

f) $kx + 2ky + k = 0$
$(1, 1)$

g) $3x - k + 2y = 5$
$(0, 0)$

h) $1 - 2k + x - y = 0$
$(3, -1)$

i) $3kx + y - 1 = 0$
$(4, 1)$

7. Grafique cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $3x - y = 1$

b) $x + 2y - 5 = 0$

c) $-6x + 2y = 0$

d) $3x = 5$

e) $4y - 1 = 0$

f) $\dfrac{x + 2y - 1}{3} = 2$

g) $1 - \dfrac{1}{3}x = y$

h) $\dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{3}y - 1 = 0$

i) $0{,}5x + \dfrac{3}{4}y - 0{,}2 = 0$

j) $\dfrac{x + 2}{3} = \dfrac{y - 1}{2}$

k) $3x + y - 1 = 0$

l) $24x + 8y - 16 = 0$

m) $y + 1 = 3x - 2$

n) $4x + 2y - 5 = x + y$

o) $2x - 3 = 2y - 4$

p) $\dfrac{6x - 1 + 3y}{4} = 0$

q) $x + y = x - 3$

r) $2x + 3y = 3y - 6$

8. Determine la intersección con cada uno de los ejes coordenados de las rectas representadas por las ecuaciones siguientes:

a) $x + y = 5$

b) $6x - 2y + 3 = 0$

c) $x - 5y + 10 = 0$

d) $2x - y + 6 = 0$

e) $3x - 5 = 0$

f) $4y + 2 = 0$

g) $2x - 5y = 0$

h) $4y - x = y + 3x - 1$

i) $6x - 5 = 0$

j) $4y = 2$

k) $ax - by = ab$, $a, b \neq 0$

l) $4x - 3y + 1 - k = 0$

m) $1 - 2y = 4 - x$

n) $x - 1 = y - 2$

o) $x + 2y - 1 = 0$

p) $\dfrac{x + y}{2} = 1 + \dfrac{y}{2}$

q) $3x - 4 = 6y - 1$

r) $\dfrac{x}{3} - 1 = \dfrac{y}{2} + 2$

9. Sin hacer cálculos, indique cuál(es) de las siguientes ecuaciones corresponde(n) a rectas que son paralelas al eje X, paralelas al eje Y, pasan por el origen o intersectan a ambos ejes en puntos distintos.

a) $4x - y = 0$

b) $2x - y = 1 - y$

c) $x + 2y - 5 = 0$

d) $4x - 5y = 6$

e) $2x - 1 = 0$

f) $3y - 4 = 0$

g) $x + 2y = 1 + x$

h) $x + 1 = -3y + 1$

i) $x + y - 2 = 2$

j) $4 - 6x = y + 4$

k) $2x - 3y + 5 = 5$

l) $4x - 2y + 1 - k = 0$

m) $y + 2x = 10$

n) $3x - y = 1 + y$

o) $4y - 6 = x$

p) $x + 3 = 0$

q) $2(x - 1) = 3(x + y)$

r) $3(x + 2) = 2(y + 3)$

10. Determine la pendiente de la recta que pasa por los puntos dados.

a) (4, 1) , (2, 3)

b) (5, 1) , (–1, 4)

c) (–2, 5) , (2, 5)

d) (–3, 8) , (–3, 3)

e) (0, 0) , (1, 1)

f) (0, 0) , (–1, 1)

g) (3, 5) , (6, 8)

h) (–1,5 ; 2,5), (–3,5 ; –6,5)

i) $\left(\frac{3}{4}, \frac{4}{3}\right), \left(\frac{6}{3}, \frac{3}{2}\right)$

j) (6, 1) , (1, –1)

k) (–3, 5) , (5, –3)

l) (0, 5) , (3, 0)

11. Determine la pendiente y el coeficiente de posición de cada una de las rectas representadas por las ecuaciones siguientes:

a) $3x + y - 2 = 0$

b) $x + 5y - 5 = 0$

c) $x + y - 3 = 0$

d) $3x = y + 5$

e) $-x + 5y = 2$

f) $x + 2 = y - 3$

g) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - \frac{1}{6} = 0$

h) $0{,}3x - 0{,}5y = 0$

i) $2x - 3 = y - 3$

j) $5x = x - 4$

k) $x - 1 = 1 - y$

l) $y = y + 2x - 3$

m) $y - 1 = 0$

n) $3x - 2y + 1 = x + y - 1$

o) $\frac{x}{4} + \frac{2y}{3} - \frac{1}{2} = 0$

p) $y = 6x - x + 2$

12. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados. Graficarla.

a) (1, 1) , (3, 3)

b) (1, 5) , (3, –2)

c) (6, 6) , (6, –1)

d) (4, 3) , (3, 4)

e) (3, 9) , (0, 9)

f) (0, 0) , (–5, –3)

g) (–3, 1) , (5, –1)

h) (4, 3) , (4, 7)

i) (1, 12) , (–5, 12)

j) (7, 1) , (–7, –1)

k) (–3, –4) ,(–4, –3)

l) (0, 0), (1, 5)

13. Encuentre la ecuación de la recta dada su pendiente m y un punto de ella.

a) $m = 1$ (2, 3)

b) $m = \frac{3}{4}$ (1, –1)

c) $m = -3$ (2, 5)

d) $m = \frac{1}{2}$ (3, 1)

e) $m = 0$ (12, 5)

f) $m = -\frac{1}{2}$ (3, –1)

g) $m = 5$ (– 6, 0)

h) $m = 2$ (0, 3)

14. Encuentre la ecuación de la recta que corta al eje X en (5, 0) y al eje Y en (0, –3).

15. Encuentre la ecuación de la recta cuya pendiente es $\frac{3}{4}$ y pasa por el origen.

16. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto (3, –1) y que corte al eje X en un ángulo de 45°.

17. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto (4, 2) y forma un ángulo de 150° con el eje X.

18. Encuentre la ecuación de la recta cuya pendiente es igual a la pendiente de la recta cuya ecuación es $2x - 5y - 3 = 0$ y que pasa por el origen.

19. Encuentre la ecuación de la recta cuyo coeficiente de posición es –2 y forma un ángulo de 135° con el eje X.

20. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el origen y forma un ángulo de 30° con el eje X.

21. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el origen y forma un ángulo de 60° con el eje X.

22. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el origen y forma un ángulo de 120° con el eje X.

23. Grafique la recta dados un punto y su pendiente.

a) (3, –2) $m = 1$

b) (6, –4) $m = -2$

c) (–3, 1) $m = \frac{2}{3}$

d) (–2, –3) $m = \frac{4}{5}$

e) (1, 1) $m = -1$

f) (4, 0) $m = -\frac{1}{2}$

g) (0, 3) $m = 5$

h) (0, 0) $m = 0$

i) (1, 5) $m = 0$

j) (3, 4) $m = -\frac{3}{2}$

k) (4, –1) $m = \frac{1}{5}$

l) (6, 1) m = indefinida

24. Grafique la recta conocida su pendiente m y su coeficiente de posición k.

a) $m = 3$ $k = 1$

b) $m = 2$ $k = -3$

c) $m = -5$ $k = -\frac{1}{2}$

d) $m = -1$ $k = \frac{3}{4}$

e) $m = \frac{1}{2}$ $k = 6$

f) $m = \frac{4}{3}$ $k = -2$

g) $m = -\frac{3}{5}$ $k = 2$

h) $m = 0$ $k = 1$

i) $m = 5$ $k = 0$

j) $m = \frac{1}{2}$ $k = \frac{1}{2}$

k) $m = -\frac{3}{4}$ $k = -3$

l) $m = -1$ $k = -1$

25. Determine la pendiente, la ecuación y el coeficiente de posición de la recta que pasa por los puntos (3, 2) y (2, – 5). Grafique.

26. Dada la ecuación de una recta, determine su pendiente, su coeficiente de posición y grafíquela.

a) $2x - y + 1 = 0$

b) $4x - 3y - 2 = 0$

c) $x + 5 = 1$

d) $3x - y + 6 = 0$

e) $1 - x = y + 2$

f) $1 = 2 - y$

g) $x + 6 = y$

h) $3x - 1 = y - 1$

27. Determine si los siguientes tríos de puntos son colineales; justifique la respuesta.

a) (5,1) (3, 2) (– 5, 6)

b) (2,1) (3, 5) (6, 3)

c) (1, 6) (2, 5) (3, 4)

d) (– 1, 3) (0, 1) (2, 0)

e) (4, 0) (4, 1) (4, –3)

f) (– 7, 8) (–1, 4) (8, 10)

g) (– 1, 8) (– 7, 4) (2, – 10)

h) (0, 0) (1, 1) (1, 2)

28. Determine la ecuación y grafique la recta paralela al eje X que pase por el punto (3, 5).

29. Encuentre la ecuación de la recta que sea paralela al eje X y que pase por el punto (7, –3). Grafíquela.

30. Determine la ecuación de la recta que sea paralela al eje Y y que pase por el punto (–5, –8). Grafíquela.

31. Encuentre la ecuación de la recta que sea perpendicular al eje X y que pase por el punto (–1, 3).

32. Encuentre la ecuación de la recta que sea perpendicular al eje Y y que pase por el punto (6, 16).

33. Determine si las rectas L_1 y L_2 son o no paralelas. Justifique la respuesta.

a) $L_1 : 2x - 3y + 4 = 0$
$L_2 : -4x + 6y - 1 = 0$

b) $L_1 : 5x - y = 1$
$L_2 : 10x - 1 = 2y$

c) $L_1 : 2x + 5y - 1 = 0$
$L_2 : 2x - 5y + 3 = 0$

d) $L_1 : 1 - 3x = y$
$L_2 : 3y = x + 2$

e) $L_1 : 4x - y + 1 = 3$
$L_2 : y - 4x = 0$

f) $L_1 : 1 - 3y = x$
$L_2 : 4y - x = 5$

34. Determine si las rectas L_1 y L_2 son perpendiculares. Justifique la respuesta.

a) L_1: $2x - y + 3 = 0$
L_2: $x + 2y - 3 = 0$

b) L_1: $5x + 2y - 1 = 0$
L_2: $0{,}2x - 0{,}5y = 0$

c) L_1: $3x + y - 6 = 0$
L_2: $3x - y + 6 = 0$

d) L_1: $2x - 3y + 1 = 0$
L_2: $4x - 6y + 5 = 0$

e) L_1: $x + y = 0$
L_2: $x - y = 0$

f) L_1: $x + y + 5 = 0$
L_2: $x - y + 5 = 0$

35. Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto (2, –1) y es paralela a la recta cuya ecuación es:
$2x + 6y - 1 = 0$. Grafique.

36. Determine la ecuación de la recta que tiene coeficiente de posición –3 y es paralela a la recta $x + y - 1 = 0$. Grafique.

37. Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto (4, –2) y es perpendicular a la recta cuya ecuación es:
$2x - 3y + 1 = 0$.

38. Determine la ecuación de la recta que intersecta al eje X en (3, 0) y es perpendicular a la recta cuya ecuación es: $x + y = 3$.

39. Determine el valor de k en la ecuación $5x - (1 + k)y - 3 = 0$ para que represente una recta paralela a la recta cuya ecuación es:
$x - 5y + 8 = 0$.

40. Determine el valor de k en la ecuación $2kx - 3y + 1 = 0$ para que represente una recta paralela a la recta cuya ecuación es:
$-2x + 5y - 3 = 0$.

41. Encuentre el valor de k en la ecuación $(2 - k)x + 3y - 4 = 0$ para que represente una recta perpendicular a la recta cuya ecuación es: $-6x + y - 9 = 0$.

42. Encuentre el valor de k en la ecuación $x - 2ky - 3 = ky + k$ para que represente una recta perpendicular a la recta cuya ecuación es: $2y + 3 = 9x$.

43. Demuestre que la recta que pasa por los puntos (3, –1) y (4, 2) es paralela a la recta que une los puntos (–1, –4) y (2, 5).

44. Pruebe que una recta de pendiente $m = \frac{3}{4}$ es paralela a la recta que pasa por los puntos (–1, 4) y (3, 7).

45. Demuestre que la recta que une los puntos (2, 3) y (4, –1) es perpendicular a la recta que pasa por los puntos (5, 2) y (3, 1).

46. Demuestre que la recta cuyo coeficiente de posición es 2 y corta al eje X en (2, 0) es perpendicular a la recta de igual coeficiente de posición pero corta al eje X en (–2, 0).

47. Determine la ecuación de la familia de rectas que tiene pendiente –3. Grafique tres de ellas.

48. Determine la ecuación de la familia de rectas perpendiculares a la recta cuya ecuación es: $3x - 2y + 1 = 0$.

49. Determine la ecuación de la familia de rectas que pasa por el punto (3, –1). Grafique tres de ellas.

50. Determine la ecuación de la familia de rectas que tienen coeficiente de posición 3. Grafique tres de ellas.

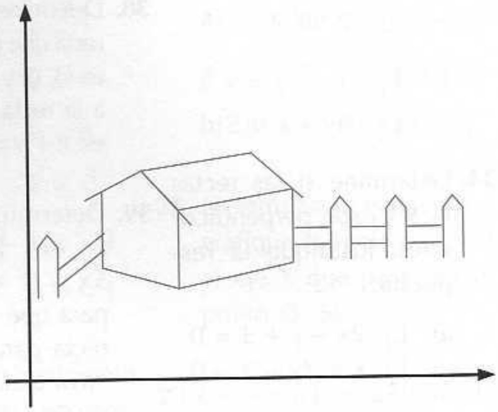
Ejercicios

51. En un diagrama cartesiano (sistema de ejes coordenados), grafique los siguientes segmentos de rectas en los intervalos indicados. Grafique además los puntos P y Q.

P (4,2 ; 4,8)
Q (5,8 ; 4,8)

$y = 1$	$3{,}5 \leq x \leq 4$
	$6 \leq x \leq 6{,}5$
$x = 4$	$1 \leq y \leq 3$
$x = 6$	$1 \leq y \leq 3$
$y = 3{,}6$	$4{,}5 \leq x \leq 5{,}5$
$y = 3$	$2 \leq x \leq 8$
$y = 6$	$4 \leq x \leq 6$
$y = \frac{3}{2}x$	$2 \leq x \leq 4$
$y = -\frac{3}{2}x + 15$	$6 \leq x \leq 8$
$y = 2x - 5$	$5{,}5 \leq x \leq 6$
$y = -2x + 15$	$4{,}0 \leq x \leq 4{,}5$
$x = 5$	$6 \leq y \leq 7$

52. En la figura siguiente fije la escala de valores en los ejes coordenados y determine las ecuaciones correspondientes a los segmentos que forman la figura.



53. Haga un diseño compuesto por segmentos de rectas y determine las ecuaciones correspondientes. Comparta el trabajo con sus compañeros y compañeras.

Soluciones

1\. a) 4, 6, 1　b) 3, –1, 5　c) 2, –1, –5
d) –2, 6, –3　e) 4, 1, 0　f) 6, –2, 0
g) 4, 0, –1　h) –5, 0, 1　i) 0, –6, 1
j) 0, 2, –3　k) $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, –1　l) 0,5 , –2,5 , –1
m) 2, –2, 1　n) a, –2b, – c　o) a – b, ab, – b
p) – m, 1, –k　q) a, –b, – 2a – b　r) 0, 1, 3k – 1
s) 2, 1 – k, – 4　t) 1, 1, – 4 – k

2\. a) $y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{6}$　b) $y = 3x + 5$　c) $y = 2x - 5$
d) $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$　e) $y = -4x$　f) $y = 3x$
g) No se puede porque el coeficiente de y es 0　h) No se puede porque el coeficiente de y es 0　i) $y = \frac{1}{6}$

j) $y = \frac{3}{2}$ k) $y = -\frac{4}{3}x + 4$ l) $y = 0,2x + 0,4$

m) $y = x + \frac{1}{2}$ n) $y = -\frac{a}{2b}x + \frac{c}{2b}$ o) $y = \frac{b-a}{ab}x + \frac{1}{a}$

p) $y = mx + k$ q) $y = \frac{a}{b}x + \frac{2a+b}{b}$ r) $y = 1 - 3k$

s) $y = \frac{2}{k-1}x + \frac{4}{1-k}$ t) $y = -x + 4 + k$

3. a) Por ejem: (0, 2), (1, 6) b) Por ejem: (1, 4), (2, 10) c) Por ejem: (2, a), (2, b)
d) Por ejem: (1, 6), (2, 12) e) Por ejem: (1, 5), (3, 6) f) Por ejem: (–1, 2), (–1, 3)
g) (a, 2), (k, 2) h) (2, 0), $\left(4, \frac{4}{3}\right)$ i) (1, –17), (–1, –19)
j) $\left(\frac{1}{4}, 4\right), \left(\frac{1}{3}, 5\right)$

4. a) (0, 3) b) $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$, (2, 1), (3, –1) c) (1, 2), (2, 2)
d) (0, 0), (1, 4) e) (1, 1), (3, 2) f) (–1, 1)

5. a, c, d, e, h

6. a) 1 b) 12 c) –9 d) $-\frac{1}{7}$ e) k puede tomar cualquier valor
f) Cualquiera que sea el valor de k, la recta no pasa por (1, 1)
g) –5 h) $\frac{5}{2}$ i) 0

8. a) (0, 5) (5, 0) b) $\left(0, \frac{3}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ c) (0, 2) (–10, 0)
d) (0, 6) (–3, 0) e) $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$ No corta al eje Y f) $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ No corta al eje X
g) (0, 0) h) $\left(0, -\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ i) $\left(\frac{5}{6}, 0\right)$ No corta al eje Y
j) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ No corta al eje X k) (0, –a) (b, 0) l) $\left(0, \frac{1-k}{3}\right)\left(\frac{k-1}{4}, 0\right)$
m) $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$ (3, 0) n) (0, 1) (–1, 0) o) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$(1, 0)
p) (2, 0) No corta el eje Y q) $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ (1, 0) r) (0, –6) (9, 0)

9. a) pasa por el origen b) paralela al eje Y c) corta a ambos en puntos distintos
d) corta a ambos ejes en puntos distintos e) paralela al eje Y
f) paralela al eje X g) paralela al eje X h) pasa por el origen
i) corta a ambos ejes j) pasa por el origen k) pasa por el origen.

l) Si k = 1 pasa por el origen. Si k ≠ 1 corta ambos ejes en puntos distintos
m) corta a ambos ejes en puntos distintos n) corta a ambos ejes en puntos distintos
o) corta a ambos ejes en puntos distintos p) paralela al eje Y
q) corta a ambos ejes r) pasa por el origen

10. a) –1 b) $-\frac{1}{2}$ c) 0 (recta // eje X) d) Indeterminada (recta // eje Y) e) 1
f) –1 g) 1 h) 4, 5 i) $\frac{2}{15}$ j) $\frac{2}{5}$ k) –1 l) $-\frac{5}{3}$

11. a) $m = -3 \quad k = 2$ b) $m = -\frac{1}{5} \quad k = 1$ c) $m = -1 \quad k = 3$

d) $m = 3 \quad k = -5$ e) $m = \frac{1}{5} \quad k = \frac{2}{5}$ f) $m = 1 \quad k = 5$

g) $m = -\frac{3}{2} \quad k = \frac{1}{2}$ h) $m = \frac{3}{5} \quad k = 0$ i) $m = 2 \quad k = 0$

j) m = Indeterminada
k = No existe.

k) $m = -1 \quad k = 2$

l) m = Indeterminada
k = No existe

m) $m = 0 \quad k = 1$ n) $m = \frac{2}{3} \quad k = \frac{2}{3}$ o) $m = -\frac{3}{8} \quad k = \frac{3}{4}$

p) $m = 5 \quad k = 2$

12. a) $x - y = 0$ b) $7x + 2y - 17 = 0$ c) $x - 6 = 0$ d) $x + y - 7 = 0$

e) $y - 9 = 0$ f) $3x - 5y = 0$ g) $x + 4y - 1 = 0$ h) $x - 4 = 0$

i) $y - 12 = 0$ j) $x - 7y = 0$ k) $y + x + 7 = 0$ l) $y - 5x = 0$

13. a) $x - y + 1 = 0$ b) $4y - 3x + 7 = 0$ c) $3x + y - 11 = 0$ d) $4x + 3y - 15 = 0$

e) $y - 5 = 0$ f) $x + 2y - 1 = 0$ g) $5x - y + 30 = 0$ h) $2x - y + 3 = 0$

14. $3x - 5y - 15 = 0$ **15.** $3x - 4y = 0$ **16.** $x - y - 4 = 0$

17. $x + \sqrt{3}\, y - 2\sqrt{3} - 4 = 0$ **18.** $2x - 5y = 0$ **19.** $x + y + 2 = 0$

20. $x - \sqrt{3}\, y = 0$ **21.** $\sqrt{3}\, x - y = 0$ **22.** $\sqrt{3}\, x + y = 0$

25. $m = 7 \quad 7x - y - 19 = 0 \quad k = -19$

26. a) $m = 2 \quad k = 1$ b) $m = \frac{4}{3} \quad k = -\frac{2}{3}$ c) m = Indeterminada, k = No existe d) $m = 3 \quad k = 6$

e) $m = -1 \quad k = -1$ f) $m = 0 \quad k = 1$ g) $m = 1 \quad k = 6$ h) $m = 3 \quad k = 0$

27. a) Sí, los tres satisfacen la ecuación $x + 2y - 7 = 0$
b) No son colineales
c) Sí, tomados de dos en dos producen la misma pendiente
d) No son colineales
e) Sí, los tres satisfacen la ecuación $x - 4 = 0$
f) No son colineales
g) No son colineales
h) No son colineales

28. $y - 5 = 0$ **29.** $y + 3 = 0$ **30.** $x + 5 = 0$ **31.** $x + 1 = 0$ **32.** $y - 16 = 0$

33. a) $L_1 \parallel L_2$ porque $m_1 = m_2 = \frac{2}{3}$ b) $L_1 \parallel L_2$ porque $m_1 = m_2 = 5$

c) $L_1 \nparallel L_2$ porque $m_1 = -\frac{2}{5}$ y $m_2 = \frac{2}{5}$ d) $L_1 \nparallel L_2$ porque $m_1 = -3$ y $m_2 = \frac{1}{3}$

e) $L_1 \parallel L_2$ porque $m_1 = m_2 = 4$ f) $L_1 \nparallel L_2$ porque $m_1 = -\frac{1}{3}$ y $m_2 = \frac{1}{4}$

34. a) $L_1 \perp L_2$ porque $m_1 \cdot m_2 = 2 \cdot -\frac{1}{2} = -1$ b) $L_1 \perp L_2$ porque $m_1 \cdot m_2 = \frac{5}{2} \cdot \frac{0{,}2}{0{,}5} = -1$

c) $L_1 \not\perp L_2$ porque $m_1 \cdot m_2 = -3 \cdot 3 = -9 \neq -1$

d) $L_1 \not\perp L_2$ porque $m_1 \cdot m_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{6} = \frac{8}{18} \neq -1$

e) $L_1 \perp L_2$ porque $m_1 \cdot m_2 = -1 \cdot 1 = -1$

f) $L_1 \perp L_2$ porque $m_1 \cdot m_2 = -1 \cdot 1 = -1$

35. $x + 3y + 1 = 0$ 36. $x + y + 3 = 0$ 37. $3x + 2y - 8 = 0$ 38. $y - x + 3 = 0$

39. $k = 24$ 40. $k = \frac{3}{5}$ 41. $k = \frac{3}{2}$ 42. $k = -\frac{3}{2}$

43. Se demuestra calculando las pendientes ($m_1 = m_2$).

44. Se demuestra calculando la pendiente de la recta que pasa por (–1, 4) y (3, 7).

45. Se demuestra calculando las pendientes y verificando que su producto es –1.

46. Ídem 45. 47. $y + 3x - k = 0$ 48. $2x + 3y - k = 0$ 49. $y - mx + 1 + 3m = 0$.

50. $y - mx - 3 = 0$.

3.4.3 Tipos de funciones Función inversa

- **Función inyectiva o uno a uno**

Una función $f : A \to B$ se dice **inyectiva** o **uno a uno** si y sólo si elementos distintos en A tienen imágenes distintas en B.

$$\left(f : A \to B \text{ es uno a uno} \right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b) \\ \text{o} \\ f(a) = f(b) \Rightarrow a = b \end{pmatrix}$$

- **Función epiyectiva o sobre**

Una función $f : A \to B$ se dice **epiyectiva o sobre** si y sólo si todo elemento de B es imagen de algún elemento de A.
$(f : A \to B \text{ es sobre}) \Leftrightarrow (\text{Rang } f = B)$.

- **Función biyectiva**

Una función $f : A \to B$ se dice **biyectiva** si y sólo si f es uno a uno y sobre.

- **Función inversa**

Toda función $f : A \to B$ posee una relación inversa $f^{-1} : B \to A$. Esta relación inversa $f^{-1} : B \to A$ es función si y sólo si f es función biyectiva.

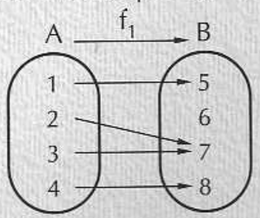
Observación: $(f \circ f^{-1})(x) = I(x)$
$(f^{-1} \circ f)(x) = I(x)$

La composición de una función con su inversa da la función idéntica.

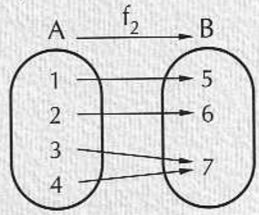
Ejercicios resueltos

1. Sean f_i las funciones definidas por los siguientes diagramas. Determinar si f_i es uno a uno, sobre o biyectiva.

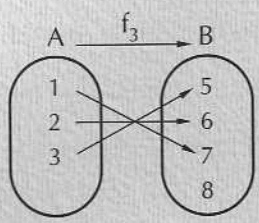
a)



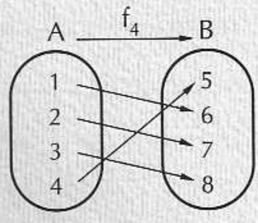
b



c)



d



Solución:

a) f_1 no es uno a uno porque 7 es imagen de dos elementos distintos, el 2 y el 3.
f_1 no es sobre porque $6 \in B$ no pertenece al Rang de f_1.
f_1 no es biyectiva porque no es uno a uno ni sobre.

b) f_2 no es uno a uno ya que $f_2(3) = 7$ y $f_2(4) = 7$ y $3 \neq 4$.
f_2 es sobre porque Rang $f_2 = B$.
f_2 no es biyectiva porque no es uno a uno.

c) f_3 es uno a uno porque imágenes distintas corresponden a pre-imágenes distintas.
f_3 no es sobre porque Rang $f_3 = \{5, 6, 7\} \neq B$, el 8 no es imagen de ningún elemento de A.
f_3 no es biyectiva porque no es sobre.

d) f_4 es uno a uno porque imágenes distintas corresponden a pre-imágenes distintas
f_4 es sobre porque
Rang $f_4 = \{5, 6, 7, 8\} = B$.
f_4 es biyectiva porque es uno a uno y sobre.

2. Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la función definida por $f(x) = 4x - 2$. Determinar si f es biyectiva, si no lo es, redefinirla para que lo sea.

Solución:

f es uno a uno: Sean $a, b \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} f(a) = f(b) \;\Rightarrow\; 4a - 2 &= 4b - 2 && /+2 \\ \Rightarrow\; 4a &= 4b && /:4 \\ \Rightarrow\; a &= b \end{aligned}$$

luego f es uno a uno.

f no es sobre ya que $f(x) = 4x - 2 \Rightarrow \quad 4x = f(x) + 2$

$$x = \frac{f(x) + 2}{4}$$

luego $1 \in \mathbb{Z}$ vo es imagen de ningún entero ya que 1 sería imagen de $x = \dfrac{1+2}{4} = \dfrac{3}{4} \notin \mathbb{Z}$

$\therefore$ f no es biyectiva porque no es sobre.

Para que f sea biyectiva debe definirse sobre su rango y con eso aseguramos que es sobre:

Rang $f = \{y \in \mathbb{Z} \,/\, \dfrac{y+2}{4} \in \mathbb{Z}\} = \{y \in \mathbb{Z} \,/\, y = \pm\, 2(2n-1),\ n \in \mathbb{N}\}$

$\therefore\ f : \mathbb{Z} \to \{\pm 2\ (2n-1),\ n \in \mathbb{N}\}$ definida por $f(x) = 4x - 2$ es sobre y como era uno a uno, ahora podemos decir que es biyectiva.

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida por :

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{x+2}{2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Determinar si f es biyectiva, si no lo es restringir su dominio y/o rango para que lo sea. Graficar f(x).

Solución:

f es uno a uno.

i) Sean $a, b < 2$

$f(a) = f(b) \Rightarrow a - 1 = b - 1 \Rightarrow a = b$

ii) Sean $a, b \geq 2$

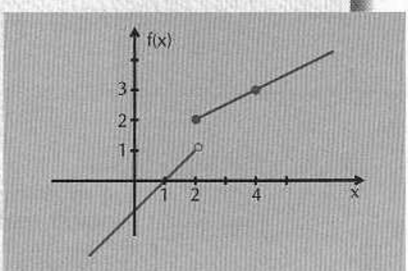
$f(a) = f(b) \Rightarrow \dfrac{a+2}{2} = \dfrac{b+2}{2} \Rightarrow a = b$

iii) $a < 2 \Rightarrow a - 1 < 2 - 1 \Rightarrow f(a) < 1$

$b \geq 2 \Rightarrow \dfrac{b+2}{2} \geq \dfrac{2+2}{2} \Rightarrow f(b) \geq 2$

$\therefore\ a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$

luego f es uno a uno.



f no es sobre porque como veíamos:

si $x < 2 \Rightarrow f(x) < 1$

si $x \geq 2 \Rightarrow f(x) \geq 2$

Luego $[1, 2) \not\subset$ Rang f

$\therefore$ f no es biyectiva.

Para que la función sea biyectiva debemos definirla de $\mathbb{R} \to \mathbb{R} - [1, 2)$.

4. Sea f una función real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 4 \\ \dfrac{24 - 3x}{2} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Determinar si f es biyectiva. Si no lo es restringir su dominio y/o su recorrido para que lo sea. Graficar f.

Solución:

f no es uno a uno.

i) Sean $a, b \leq 4$

$f(a) = f(b) \Rightarrow a + 1 = b + 1 \Rightarrow a = b$

ii) Sean $a, b > 4$

Ejercicios resueltos

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \frac{24-3a}{2} = \frac{24-3b}{2} \Rightarrow a = b$$

iii) $a \leq 4 \Rightarrow a + 1 \leq 5 \Rightarrow f(a) \leq 5$

$b > 4 \Rightarrow -3b < -12 \quad / + 24$

$24 - 3b < 12 \quad / : 2$

$\frac{24-3b}{2} < 6 \Rightarrow f(b) < 6$

$\therefore a \neq b \not\Rightarrow f(a) \neq f(b)$

en efecto, sea $f(a) = 4 \leq 5 \wedge f(b) = 4 < 6$

$f(a) = a + 1 = 4 \Rightarrow a = 3$

$f(b) = \frac{24-3b}{2} = 4 \Rightarrow 24 - 3b = 8 \Rightarrow -3b = -16 \Rightarrow b = \frac{16}{3}$

hemos probado que $f(a) = 4 \Rightarrow a = 3$

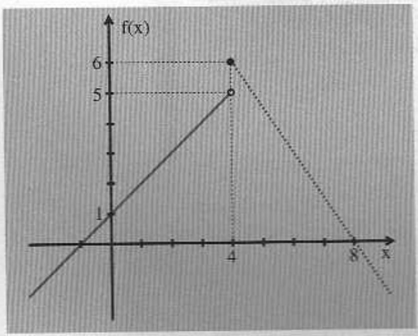
$f(b) = 4 \Rightarrow b = \frac{16}{3}$

así con $f(a) = f(b)$ tenemos $a \neq b$

luego f no es uno a uno.

f no es sobre, ya que si $x \leq 4 \to f(x) \leq 5$

si $x > 4 \to f(x) < 6$



$\therefore$ Rang f $= \{y \in \mathbb{R} / y < 6\} \neq \mathbb{R}$

para que f fuera biyectiva podríamos definirla de

$(-\infty, 4] \to (-\infty, 5]$ o de $(4, +\infty) \to (-\infty, 6)$

5. Sea f una función real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4-x}{2} & \text{si } x < 2 \\ 3 - x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Determinar si f es biyectiva. Si no lo es, redefinirla, de modo que lo sea. Hallar una fórmula para f^{-1}. Graficar f y f^{-1}.

Solución: f es uno a uno:

i) Sean $a, b < 2$

$f(a) = f(b) \Rightarrow \frac{4-a}{2} = \frac{4-b}{2} \Rightarrow a = b$

ii) Sean $a,b \geq 2$

$f(a) = f(b) \Rightarrow 3 - a = 3 - b \Rightarrow a = b$

iii) $a < 2 \Rightarrow -a > -2 \quad /+ 4$

$4 - a > 2 \quad /: 2$

$\frac{4-a}{2} > 1 \Rightarrow f(a) > 1$

$$b \geq 2 \Rightarrow -b \leq -2 \qquad /+3$$
$$3 - b \leq 1 \Rightarrow f(b) \leq 1$$

$\therefore\ a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$

luego f es uno a uno.

f es sobre ya que si $x < 2 \Rightarrow f(x) > 1$

y si $x \geq 2 \Rightarrow f(x) \geq 1$

Así todos los elementos de R son imagen de algún elemento de $\mathbb{R}$.

$\therefore$ f es biyectiva, lo que implica que f tiene función inversa f^{-1}.

Encontremos ahora una fórmula para la función f^{-1}.

Si $x < 2 \Rightarrow f(x) > 1$

llamemos $y = f(x)$

$$y = \frac{4-x}{2} \Rightarrow 2y = 4 - x \Rightarrow x = 4 - 2y$$

$$x = f^{-1}(y) = 4 - 2y \text{ si } y > 1$$

Si $x \geq 2 \Rightarrow f(x) \leq 1$

llamemos $y = f(x)$

$y = 3 - x \Rightarrow x = 3 - y$

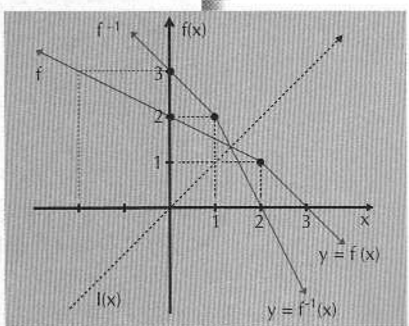
$x = f^{-1}(y) = 3 - y$ si $y \leq 1$

Entonces la fórmula para f es

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} 4 - 2y & \text{si } y > 1 \\ 3 - 2y & \text{si } y \leq 1 \end{cases}$$

que usando la variable x queda:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} 4 - 2x & \text{si } x > 1 \\ 3 - x & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$



Nótese que los gráficos de f y f^{-1} son simétricos respecto de la recta $x = y$.

6. Sea f una función real biyectiva definida por:

$$f(x) = \frac{5x+3}{2}$$

Hallar una fórmula para f^{-1}.

Solución:

Sabemos que $(f \circ f^{-1})(x) = I(x)$.

Entonces: $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x) = x$

$$\frac{5f^{-1}(x)+3}{2} = x$$

$$5f^{-1}(x) + 3 = 2x$$

$$5f^{-1}(x) = 2x - 3$$

$$f^{-1}(x) = \frac{2x-3}{5}$$

Ésta es la fórmula pedida.

Ejercicios resueltos

7. Sea f una relación real definida por $f(x) = \dfrac{x-1}{x+3}$

Hallar dominio y recorrido de f para que sea una función biyectiva y encontrar una fórmula que defina f^{-1}.

Solución:

Dom $f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq -3\}$ Si $x = -3$, $f(x)$ no existe, ya que $\dfrac{-4}{0}$ está indeterminado.

Para determinar el rango de f vamos a despejar x en función de f (x) para identificar posibles f (x) que indeterminan la expresión:

$$f(x) = \frac{x-1}{x+3}$$

$$x\,f(x) + 3\,f(x) = x - 1$$

$$x\,f(x) - x = -1 - 3\,f(x)$$

$$x\,(1 - f(x)) = 1 + 3f(x)$$

$$x = \frac{1+3\,f(x)}{1-f(x)}$$

$$\text{si } f(x) = y \rightarrow x = \frac{1+3y}{1-y}$$

Es decir, el 1 no es imagen, luego: Rang $f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq 1\}$

así $f : \mathbb{R} - \{-3\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$

Encontremos ahora una fórmula para f^{-1}.

$$(f \circ f^{-1})(x) = I(x) = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

$$\frac{f^{-1}(x) - 1}{f^{-1}(x) + 3} = x$$

$$f^{-1}(x) - 1 = x\,f^{-1}(x) + 3x$$

$$f^{-1}(x) - x\,f^{-1}(x) = 3x + 1$$

$$f^{-1}(x)\,(1 - x) = 1 + 3x$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1+3x}{1-x}$$

lo que nos da la misma expresión que encontramos para hallar el rango de f. Esto se debe a que f^{-1} está definida del Rang f al Dom f, luego:

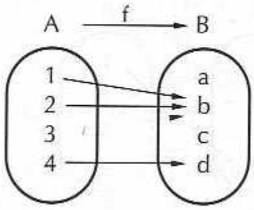
$f^{-1} : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{-3\}$

Ejercicios

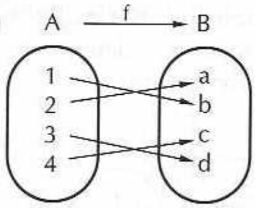
1. Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$

Determine cuáles de las funciones definidas en los siguientes diagramas son uno a uno, sobre, y/o biyectivas. Justifique las respuestas.

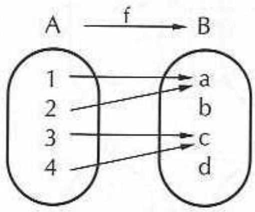
a)



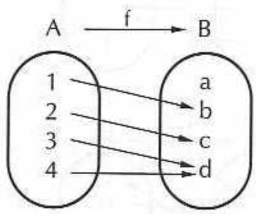
b)



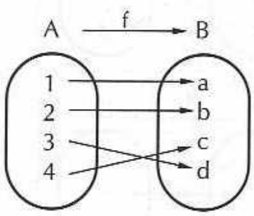
c)



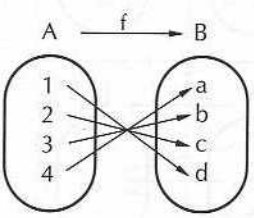
d)



e)

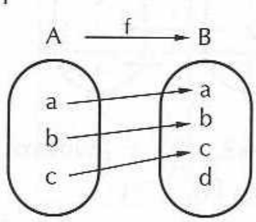


f)

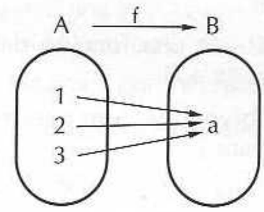


2. Dadas las funciones definidas en los siguientes diagramas, determine cuáles son biyectivas. Justifique las respuestas.

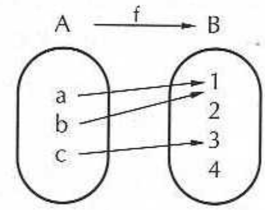
a)



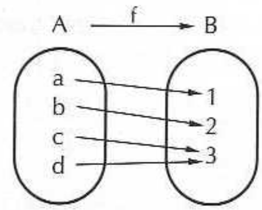
b)



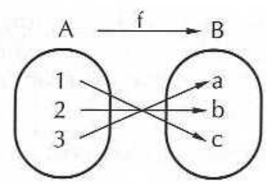
c)



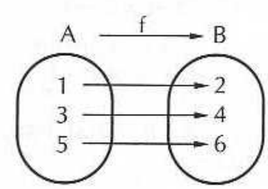
d)



e)



f)



3. Sean A = {1, 2, 3, 4} y B = {5, 6, 7} ¿Se puede definir una función biyectiva de A en B? Represéntelo mediante un diagrama.

4. Sean A = {a, e, i, o, u} y B = {1, 2, 3, 4, 5} ¿Se puede definir una función biyectiva de A en B? Represéntelo mediante un diagrama.

5. Sea $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ una función definida por $f(x) = 2x - 1$. Indique si f es uno a uno, sobre o biyectiva.

6. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida por $f(x) = \frac{5x-3}{2}$. Si f es biyectiva, encuentre una fórmula para f^{-1}.

Ejercicios

7. Sea g : ℝ→ℝ una función definida por $g(x) = 4x + 3$.

Si g es biyectiva, encuentre una fórmula para g^{-1}.

8. Sea
$A = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ -5 \le x \le -2\}$
$B = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ -2 < x < -2\}$
$C = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ \ 3 \le x < -5\}$

y sean las funciones:

$f_1 : A \to \mathbb{Z} \quad f_1(x) = x^2 - 1$

$f_2 : B \to \mathbb{Z} \quad f_2(x) = x^2 + 2$

$f_3 : C \to \mathbb{Z} \quad f_3(x) = 3^2 - x^2$

Determine cuáles de estas funciones son uno a uno (inyectivas).

9. Sea $A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ -3 \le x \le 3\}$

Se dan las funciones de A en A definidas por :
$f(x) = x^2 - 2$ y $g(x) = x^3 + 1$.

Determine cuáles de las funciones dadas son uno a uno y cuáles son sobre. Intente bosquejar un gráfico calculando valores.

10. Sea f : ℝ→ℝ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -2 \text{ si } x \ge -1 \\ -2x \text{ si } x < -1 \end{cases}$$

Grafique y determine si f es uno a uno y/o sobre.

11. Dadas las siguientes funciones, determine dominio y recorrido de cada una. En cada caso determine la relación inversa e indique si ésta es función.

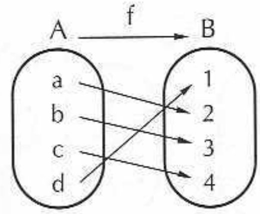
$f_1 = \{(1, 3)\ (2, 4)\ (3, 5)\ (4, 6)\}$

$f_2 = \{(1, 5)\ (2, 5)\ (3, 5)\ (4, 5)\ (5, 5)\}$

$f_3 = \{(a, 1)\ (b, 2)\ (c, 3)\ (d, 4)\ (e, 5)\}$

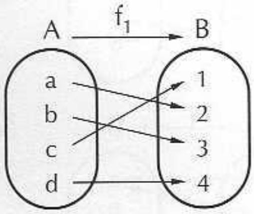
$f_4 = \{(b, 2)\ (a, 1)\ (r, 2)\ (c, 2)\ (o, 1)\}$

12. Dada la función $f : A \to B$ definida por el diagrama siguiente.
¿Es f^{-1} función?
Halle $f^{-1}(2)$, $f^{-1}(3)$ y $f^{-1}(4)$.
Haga un diagrama de f^{-1}.

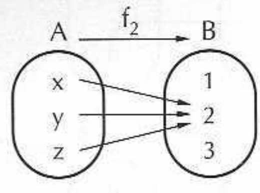


13. De las funciones definidas en los diagramas siguientes, determine cuáles poseen función inversa.

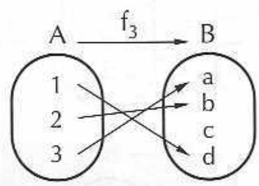
a)



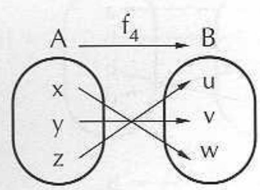
b)



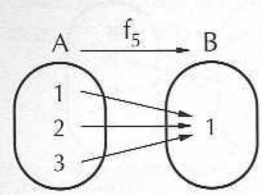
c)



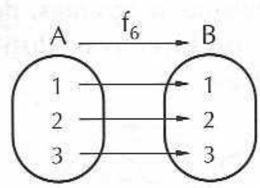
d)



e)



f)



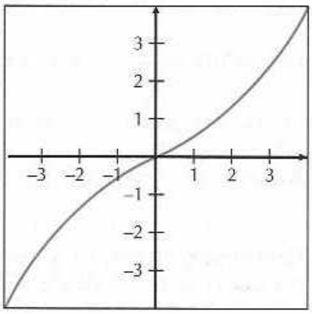
14. Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Z}_p$ = {números pares} definida por $f(n) = 2n$.

a) Determine si esta función tiene función inversa.

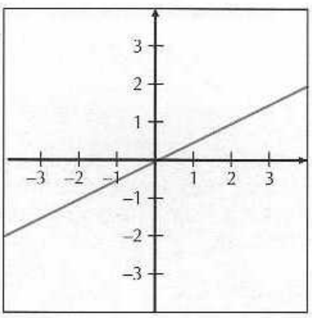
b) Si f se definiera de $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, ¿tendría función inversa?

15. Dadas las funciones reales definidas por los siguientes gráficos. Determine cuáles de ellas poseen función inversa.

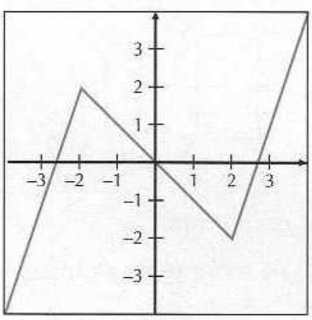
a)



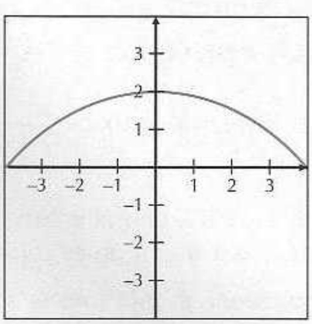
b)



c)



d)



16. Sea $A = \{x \in \mathbb{N} \,/\, 3 < x < 9\}$ y $f: A \to \mathbb{N}$ definida por $f(x) = x^2 - 1$.

a) Escriba f por extensión.

b) Escriba f^{-1} por extensión.

c) Escriba $f^{-1}(15)$ y $f^{-1}(63)$.

d) ¿Es f^{-1} una función?

17. Dada la función real $f(x) = 4x - 8$. Determine si f posee función inversa y encuentre una fórmula que la defina.

18. Dada la función real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{2} & \text{si } x \le 3 \\ x - 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

a) Grafique y determine Rang f.

b) Demuestre que f es uno a uno.

c) Demuestre que f no es sobre.

19. Dada la función real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si } x \le -1. \\ 3 & \text{si } x > -1. \end{cases}$$

a) Grafique y encuentre Rang f.

b) Determine si f es uno a uno.

c) Determine si f es sobre.

d) Encuentre, si es posible, la función f^{-1}.

20. Dada la función real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{9-2x}{3} & \text{si } x < 3. \\ 4 - x & \text{si } x \ge 3. \end{cases}$$

a) Grafique.

b) Demuestre que f es biyectiva.

c) Encuentre la fórmula que define f^{-1}.

21. Dada la función real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } x \le -3. \\ \dfrac{2x-4}{5} & \text{si } x > -3. \end{cases}$$

a) Grafique.

b) Demuestre que f es biyectiva.

Ejercicios

c) Encuentre la fórmula que define f^{-1}.

22. Dada la función real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < -1. \\ \dfrac{2-x}{3} & \text{si } x \geq -1. \end{cases}$$

a) Grafique y determine Rang f.

b) Demuestre que f es uno a uno.

c) Demuestre que f no es sobre.

23. Dada la relación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{x-1}{x+2}$$

a) Determine dominio y rango para que f sea una función biyectiva.

b) Encuentre una fórmula para f^{-1}

24. Dada la relación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$

a) Determine dominio y recorrido de f para que sea función.

b) Encuentre una fórmula para f^{-1}.

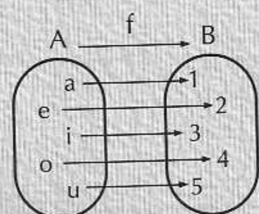
25. Dada la relación $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \dfrac{1-2x}{x}$

a) Determine dominio y recorrido de g para que sea función.

b) Encuentre una fórmula para g^{-1}.

Soluciones

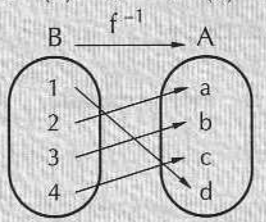
1. a) f no es uno a uno, b es imagen de 1, 2 y 3.
   f no es sobre, a, c no son imagen.
   b) f es uno a uno, cada elemento de B es imagen de un solo elemento de A.
   f es sobre, Rang f = B, f es biyectiva.
   c) f no es uno a uno.
   $f(1) = a \wedge f(2) = a \wedge 1 \neq 2$.
   f no es sobre, b y d no son imagen.
   d) f no es uno a uno.
   $f(3) = f(4) = d \wedge 3 \neq 4$.
   f no es sobre, a no es imagen.
   e) f es uno a uno, $f(a) \neq f(b) \Rightarrow a \neq b$.
   f es sobre, Rang f = B.
   f es biyectiva.
   f) f es uno a uno, f es sobre, f es biyectiva.
2. a) f es uno a uno, f no es sobre.
   b) f no es uno a uno, f es sobre.
   c) f no es uno a uno, f no es sobre.
   d) f no es uno a uno, f es sobre.
   e) f es uno a uno y sobre, f es biyectiva.
   f) f es uno a uno y sobre, f es biyectiva.
3. No es posible definir una función biyectiva de A en B porque para ello se necesita que ambos conjuntos tengan la misma cardinalidad (cantidad de elementos).
4. Es posible. Ej.:



5. f es uno a uno.
   f no es sobre (4 no es imagen de ningún elemento de $\mathbb{Z}$).
   f no es biyectiva.
6. f es biyectiva $f^{-1}(x) = \dfrac{2x+3}{5}$
7. g es biyectiva $g^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{4}$
8. f_1 y f_3
9. f no es uno a uno ni sobre.
   g es uno a uno y no es sobre.
10. f no es uno a uno, f no es sobre.

11. Dom $f_1 = \{1, 2, 3, 4\}$
Rang $f_1 = \{3, 4, 5, 6\}$
f_1 es biyectiva.
$f_1^{-1} = \{(3, 1)\ (4, 2)\ (5, 3)\ (6, 4)\}$
es función.
Dom $f_2 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
Rang $f_2 = \{5\}$ f_2 no es biyectiva.
$f_2^{-1} = \{(5, 1)\ (5, 2)\ (5, 3)\ (5, 4)\ (5, 5)\}$
no es función.
Dom $f_3 = \{a, b, c, d, e\}$
Rang $f_3 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ f_3 es biyectiva.
$f_3^{-1} = \{(1, a)\ (2, b)\ (3, c)\ (4, d)\ (5, e)\}$
es función.
Dom $f_4 = \{b, a, r, c, o\}$
Rang $f_4 = \{1, 2\}$
f_4 no es biyectiva.
$f_4^{-1} = \{(2, b)\ (1, a)\ (2, r)\ (2, c)\ (1, 0)\}$
no es función.

12. f^{-1} es función porque f es biyectiva.
$f^{-1}(2) = a \quad f^{-1}(3) = b \quad f^{-1}(4) = c$



13. f_1, f_4, f_6

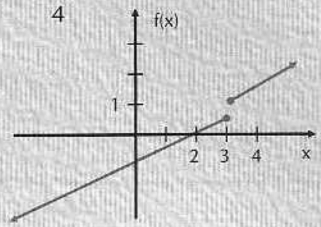
14. **a)** f tiene inversa.
b) f no tendría inversa porque no sería sobre.

15. **a)** tiene inversa.
b) tiene inversa.
c) no tiene inversa.
d) no tiene inversa.

16. **a)** $f = \{(4, 15), (5, 24), (6, 35), (7, 48), (8, 63)\}$
b) $f^{-1} = \{(15, 4), (24, 5), (35, 6), (48, 7), (63, 8)\}$
c) $f^{-1}(15) = 4;\ f^{-1}(63) = 8$
d) f^{-1} no es función de $N \rightarrow A$ pero sí es función de $\{15, 24, 35, 48, 63\}$ en A.

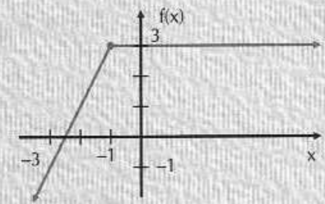
17. f posee inversa porque es biyectiva.
$f^{-1}(x) = \dfrac{x+8}{4}$

18. a)



Rang $f = \{f(x) \in \mathbb{R} \,/\, f(x) \le \frac{1}{2} \vee x > 1\}$

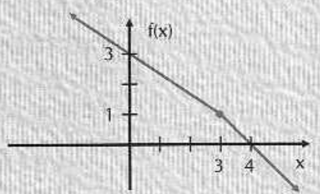
19. a)



Rang $f = \{f(x) \in \mathbb{R} \,/\, f(x) \le 3\}$

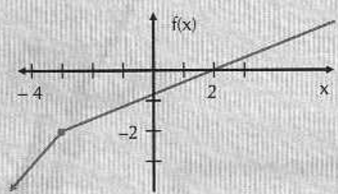
b) f no es uno a uno.
c) f no es sobre.
d) no hay función inversa porque f no es biyectiva.

20. a)



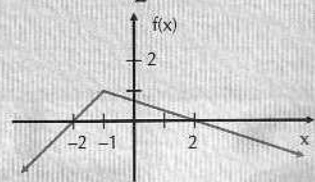
c)
$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{9-3x}{2} & \text{si } x > 1 \\ 4 - x & \text{si } x \le 1 \end{cases}$$

21. a)



c)
$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-4}{2} & \text{si } x \le 2 \\ \dfrac{5x+4}{2} & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

22. a)



Rang $f = \{f(x) \in \mathbb{R} \,/\, f(x) \le 1\}$

23. a) Dom f = $\mathbb{R} - \{-2\}$ Rang f = $\mathbb{R} - \{1\}$

b) $f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{1-x}$

24. a) Dom f = $\mathbb{R} - \{3\}$ Rang f = $\mathbb{R} - \{2\}$

b) $f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x-2}$

25. a) Dom g = R – {0} Rang g = R – {-2}

b) $g^{-1}(x) = \frac{1}{x+2}$

3.4.4 Funciones de primer grado simultáneas. Sistema de ecuaciones de primer grado

Una función y = f (x) de primer grado representa una recta. Cualquier ecuación de primer grado en dos variables $ax + by + c = 0$ donde $b \neq 0$ se puede escribir como una función y = f (x). Si b = 0 estamos frente a una ecuación de primer grado de la forma $ax + c = 0$ con $a \neq 0$, que representa una recta paralela al eje Y.

Rectas secantes son aquellas representadas por ecuaciones que tienen una solución común. Se cortan en un punto.
Rectas paralelas son aquellas representadas por ecuaciones que no tienen ninguna solución común. No se cortan. Sus ecuaciones constituyen un sistema **inconsistente**.
Rectas coincidentes son aquellas representadas por ecuaciones que tienen todos sus puntos en común, es decir, infinitas soluciones comunes. Sus ecuaciones forman un sistema **indeterminado.**

Definición:

Sean L_1 y L_2 dos rectas en el plano representadas por las ecuaciones $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ y $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$.

Las ecuaciones $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ y $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ se llaman **linealmente dependientes** (L.D.) si y sólo si

$a_1 x + b_1 y + c_1 = k(a_2 x + b_2 y + c_2)$ con $k \neq 0$, $k \in \mathbb{R}$

En caso contrario las ecuaciones se denominan **linealmente independientes** (L.I.).

RECTAS	ECUACIONES	SISTEMA 2 x 2	SOLUCIONES
secantes	L.I.Simultáneas	determinado	única
coincidentes	L.D. equivalentes	indeterminado	infinitas
paralelas	L.I. incompatibles	inconsistente	no tiene

Para resolver geométricamente un sistema de ecuaciones se grafican ambas rectas y luego se leen las coordenadas del punto de intersección (si tiene solución única).

Para resolver algebraicamente un sistema hay varios métodos, entre ellos: eliminación por **reducción,** eliminación por **sustitución** y eliminación por **igualación** (ver problemas resueltos 5, 6 y 7).

Dos sistemas se llaman **equivalentes** si tienen la misma solución.

Una función de primer grado en dos variables $z = f(x, y)$ representa geométricamente un plano. Así, una ecuación de la forma $ax + by + cz + d = 0$ con $c \neq 0$, puede ser escrita en forma de función $z = f(x, y)$; luego, toda ecuación $ax + by + cz + d = 0$ representa un plano.

Tres ecuaciones con tres variables forman un sistema 3 **x** 3 y sus soluciones serán:

i) **Solución única** si las tres ecuaciones son L.I. y los planos tienen un punto en común.

ii) **Infinitas soluciones** si las ecuaciones que lo forman son L.D. y los planos tienen infinitos puntos en común.

a) los tres planos coinciden.

b) los tres planos se intersectan formando una recta.

iii) **Ninguna solución** si las ecuaciones son L.I. y los tres planos son paralelos, es decir, no tienen ningún punto en común.

Para resolver este tipo de sistemas se elimina una incógnita combinando adecuadamente dos ecuaciones distintas dos veces y con ello se obtiene un sistema 2 x 2 . Conociendo el valor de dos variables, en cualquiera de las tres ecuaciones se puede encontrar el valor de la variable eliminada.

Hay otro método, llamado método de eliminación de Gauss.

Ejercicios resueltos

1. Determinar si las ecuaciones siguientes son L.I. o L.D.

a) $L_1: \ 5x + 2y - 3 = 0$

$L_2: \ 6x + 3y - 4 = 0$

Las ecuaciones son L.I., ya que $\frac{5}{6} \neq \frac{2}{3} \neq \frac{-3}{-4}$

Las rectas L_1 y L_2 se intersectan en un punto, puesto que sus pendientes son distintas. $m_{L1} = \frac{-5}{2}$ $\quad m_{L2} = -2$

b) $L_1: \ 4x - 3y + 2 = 0$

$L_2: \ -8x + 6y - 5 = 0$

Las ecuaciones son L.I. porque $\frac{4}{-8} = \frac{-3}{6} \neq \frac{2}{-5}$

Las rectas L_1 y L_2 no se intersectan, ya que representan rectas paralelas; sus pendientes son iguales.

$m_{L1} = \frac{4}{3}$ $\qquad$ $m_{L2} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

c) $L_1 : 4x + 6y - 8 = 0$

$L_2 : 6x + 9y - 12 = 0$

Las ecuaciones son L.D., ya que

$\frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12}$ $\quad$ y $\quad$ $6x + 9y - 12 = \frac{3}{2}(4x + 6y - 8)$

Las rectas L_1 y L_2 son coincidentes.

2. Determinar el o los valores de k en los siguientes pares de ecuaciones para que sean linealmente independientes.

a) $L_1 : 5x + 2y - 1 = 0$

$L_2 : kx - 2y - 1 = 0$

Para que las ecuaciones sean L.I.

$\frac{5}{k} \neq \frac{2}{-2}$ o $\frac{2}{-2} \neq \frac{1}{1}$

Como la segunda desigualdad es verdadera, las ecuaciones serán L. I. para cualquier valor real de k.

b) $L_1 : x + 2y - 6 = 0$

$L_2 : -3x - 6y + k = 0$

Para que las ecuaciones sean L. I.,

$\frac{1}{-3} \neq \frac{2}{-6}$ o $\frac{2}{6} \neq \frac{-6}{k}$

Como la primera desigualdad es falsa, debemos asegurarnos de que la segunda sea verdadera; luego k debe ser distinto de 18.

3. Determinar el o los valores de k para que el sistema dado sea determinado. (Tenga solución única)

a) $\left.\begin{array}{l} 2x - ky + 1 = 0 \\ 3x + 2y - 3 = 0 \end{array}\right|$

Para que el sistema tenga solución única $\frac{2}{3} \neq \frac{-k}{2}$

$\therefore k \neq -\frac{4}{3}$

b) $\left.\begin{array}{l} 4x + ky = 2 \\ kx + 4y = 3 \end{array}\right|$

Para que el sistema tenga solución única $\frac{4}{k} \neq \frac{k}{4}$

$\therefore k^2 \neq 16 \Rightarrow k \neq \pm 4$

4. Determinar si los pares de números reales dados son soluciones del sistema dado:

a) $\left.\begin{array}{r} 3x - 6y + 1 = 0 \\ x - y = 3 \end{array}\right|$ $\quad (2, -1)$, $(0, \frac{1}{6})$

$(2, -1)$ no es solución porque $3 \cdot 2 - 6 \cdot (-1) + 1 \neq 0$ no satisface la primera ecuación, aunque sí satisface la segunda.
$(0, \frac{1}{6})$ no es solución porque no satisface la segunda ecuación, aunque sí satisface la primera.

b) $\left.\begin{array}{r} 2x - 4y + 1 = 0 \\ -4x + 8y = 2 \end{array}\right|$ $\quad (1, \frac{3}{4})$, $(3, \frac{7}{4})$, $(9, 9)$

$(1, \frac{3}{4})$ es solución porque satisface ambas ecuaciones.
$(3, \frac{7}{4})$ es solución porque satisface ambas ecuaciones.
$(9, 9)$ no es solución, ya que no satisface ninguna de las ecuaciones.

5. Resolver usando el método de **eliminación por reducción** el sistema.

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 5y + 4 = 0 \\ 2x + 6y - 1 = 0 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} (E_1) \\ (E_2) \end{array}$$

Este método consiste en multiplicar ambas ecuaciones por factores tales que una de las incógnitas quede con coeficientes iguales y de signo contrario, y luego sumar miembro a miembro.

Multipliquemos: $E_1 \cdot (-2)$ y $E_2 \cdot (3)$

$$\left.\begin{array}{r} -6x + 10y - 8 = 0 \\ 6x + 18y - 3 = 0 \end{array}\right|$$

Sumamos miembro a miembro $28y - 11 = 0$

$$y = \frac{11}{28}$$

Multipliquemos ahora $E_1 \cdot 6$ y $E_2 \cdot 5$

$$\left.\begin{array}{r} 18x - 30y + 24 = 0 \\ 10x + 30y - 5 = 0 \end{array}\right|$$

Sumamos miembro a miembro $28x + 19 = 0$

$$x = \frac{-19}{28}$$

Luego la solución del sistema es:

$$\left(\frac{-19}{28}, \frac{11}{28}\right)$$

Comprobamos si el par $\left(\frac{-19}{28}, \frac{11}{28}\right)$ satisface ambas ecuaciones:

E_1:
$$3x - 5y + 4 = 0$$
$$3\left(\frac{-19}{28}\right) - 5\left(\frac{11}{28}\right) + 4 = 0$$
$$-\frac{57}{28} - \frac{55}{28} + 4 = 0$$
$$-\frac{57}{28} - \frac{55}{28} + \frac{112}{28} = 0$$
$$-\frac{112}{28} + \frac{112}{28} = 0$$
$$0 \equiv 0$$

E_2:
$$2x + 6y - 1 = 0$$
$$2\left(\frac{-19}{28}\right) + 6\left(\frac{11}{28}\right) - 1 = 0$$
$$-\frac{38}{28} + \frac{66}{28} - 1 = 0$$
$$\frac{28}{28} - 1 = 0$$
$$1 - 1 = 0$$
$$0 \equiv 0$$

6. Resolver usando el método de **eliminación por sustitución** el sistema:

$$\begin{array}{r|l} 5x - 3y + 2 = 0 & (E_1) \\ x - 4y + 5 = 0 & (E_2) \end{array}$$

Este método consiste en despejar de una de las ecuaciones una de las incógnitas en función de la otra y sustituir su valor en la **otra** ecuación, obteniendo así una ecuación con una sola incógnita.

Despejemos en E_2 el valor de x e introduzcamos su valor en E_1.

$$x - 4y + 5 = 0 \Rightarrow x = 4y - 5 \quad (E_3)$$

Sustituyendo x en E_1 $5(4y - 5) - 3y + 2 = 0$

resolviendo:
$$20y - 25 - 3y + 2 = 0$$
$$17y = 23$$
$$y = \frac{23}{17}$$

Reemplazando y en E_3 obtenemos el valor de x:

$$x = 4\left(\frac{23}{17}\right) - 5$$
$$x = \frac{92}{17} - \frac{85}{17}$$
$$x = \frac{7}{17}$$

Luego, la solución del sistema es $\left(\frac{7}{17}, \frac{23}{17}\right)$

Comprobemos si el par $\left(\frac{7}{17}, \frac{23}{17}\right)$ satisface ambas ecuaciones:

E_1:
$$5x - 3y + 2 = 0$$
$$5\left(\frac{7}{17}\right) - 3\left(\frac{23}{17}\right) + 2 = 0$$
$$\frac{35}{17} - \frac{69}{17} + \frac{34}{17} = 0$$
$$-\frac{34}{17} + \frac{34}{17} = 0$$
$$0 \equiv 0$$

E_2:
$$x - 4y + 5 = 0$$
$$\frac{7}{17} - 4\left(\frac{23}{17}\right) + 5 = 0$$
$$\frac{7}{17} - \frac{92}{17} + \frac{85}{17} = 0$$
$$-\frac{85}{17} + \frac{85}{17} = 0$$
$$0 \equiv 0$$

7. Resolver por el método de **eliminación por igualación** el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y - 1 = 0 \\ 5x - 3y + 4 = 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} (E_1) \\ (E_2) \end{array}$$

Este método consiste en despejar la misma incógnita de las dos ecuaciones e igualar los valores así obtenidos, consiguiendo con ello una ecuación con una sola incógnita.

Despejemos x en E_1 y E_2 obteniendo las ecuaciones E_3 y E_4.

$E_1 \rightarrow \quad x = -2y + 1 \qquad (E_3)$

$E_2 \rightarrow \quad x = \dfrac{3y-4}{5} \qquad (E_4)$

Igualando E_3 y E_4

$$\begin{aligned} -2y + 1 &= \frac{3y-4}{5} \quad /\cdot 5 \\ -10y + 5 &= 3y - 4 \\ -13y &= -9 \\ y &= \frac{9}{13} \end{aligned}$$

Reemplazando en E_3 (o E_4)

$$\begin{aligned} x &= -2\left(\frac{9}{13}\right) + 1 \\ x &= -\frac{18}{13} + \frac{13}{13} \\ x &= -\frac{5}{13} \end{aligned}$$

Luego la solución es $\left(-\dfrac{5}{13}, \dfrac{9}{13}\right)$

Comprobemos que el par $\left(-\dfrac{5}{13}, \dfrac{9}{13}\right)$ satisface ambas ecuaciones:

E_1:

$$\begin{aligned} x + 2y - 1 &= 0 \\ -\frac{5}{13} + 2\left(\frac{9}{13}\right) - 1 &= 0 \\ -\frac{5}{13} + \frac{18}{13} - \frac{13}{13} &= 0 \\ \frac{13}{13} - \frac{13}{13} &= 0 \\ 0 &\equiv 0 \end{aligned}$$

E_2:

$$\begin{aligned} 5x - 3y + 4 &= 0 \\ 5\left(\frac{-5}{13}\right) - 3\left(\frac{9}{13}\right) + 4 &= 0 \\ \frac{-25}{13} - \frac{27}{13} + \frac{52}{13} &= 0 \\ -\frac{52}{13} + \frac{52}{13} &= 0 \\ 0 &\equiv 0 \end{aligned}$$

8. Resolver el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 4x : (y-2) = 3 : 4 \\ (x+2) : (y+3) = 4 : 8 \end{array}\right| \begin{array}{l} (E_1) \\ (E_2) \end{array}$$

Transformando cada una de las ecuaciones formamos un sistema equivalente:

E_1:

$$\begin{aligned} \frac{4x}{y-2} &= \frac{3}{4} \\ 16x &= 3y - 6 \\ 16x - 3y + 6 &= 0 \end{aligned}$$

E_2:

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{y+3} &= \frac{4}{8} \\ 8x + 16 &= 4y + 12 \\ 8x - 4y + 4 &= 0 \quad /: 4 \\ 2x - y + 1 &= 0 \quad (*) \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{r} 16x - 3y + 6 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{array}\right| \quad / \cdot (-3)$$

$$\left.\begin{array}{r} 16x - 3y + 6 = 0 \\ -6x + 3y - 3 = 0 \end{array}\right| \quad \text{sumando}$$

$$10x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-3}{10}$$

Reemplazando x en (*)

$$2 \cdot \left(\frac{-3}{10}\right) - y + 1 = 0$$

$$\frac{-6}{10} - y + 1 = 0$$

$$-y = \frac{6}{10} - 1$$

$$y = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Luego, la solución es $\left(\frac{-3}{10}, \frac{2}{5}\right)$

Verifiquémoslo:

E_1: $4x : (y - 2) = 3 : 4$

$$4\left(\frac{-3}{10}\right) : \left(\frac{2}{5} - 2\right) = 3 : 4$$

$$\frac{-12}{10} : \frac{-8}{5} = 3 : 4$$

$$\frac{+\cancel{12}^{3}}{\cancel{10}_{2}} \cdot \frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{8}} = 3 : 4$$

$$\frac{3}{4} \equiv \frac{3}{4}$$

E_2: $(x + 2) : (y + 3) = 4 : 8$

$$\left(\frac{-3}{10} + 2\right) : \left(\frac{2}{5} + 3\right) = 4 : 8$$

$$\frac{17}{10} : \frac{17}{5} = 4 : 8$$

$$\frac{\cancel{17}}{\cancel{10}_{2}} \cdot \frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{17}} = 4 : 8$$

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$$

$$\frac{1}{2} \equiv \frac{1}{2}$$

9. Resolver el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} ax - (1 + b)y + ab = 0 \\ (1 - a)x + by - ab = 0 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} (E_1) \\ (E_2) \end{array}$$

Despejemos y en ambas ecuaciones:

E_1: $(1 + b)y = ax + ab$

$$y = \frac{ax + ab}{1 + b} \qquad (E_3)$$

E_2: $by = ab - (1 - a)x$

$$y = \frac{ab - (1 - a)x}{b} \qquad (E_4)$$

Igualando E_3 con E_4:

$$\frac{ax + ab}{1 + b} = \frac{ab - (1 - a)x}{b}$$

Multiplicando cruzado

$\cancel{abx} + \cancel{ab^2} = ab - x + ax + \cancel{ab^2} - bx + \cancel{abx}$

$x(1 - a + b) = ab$

$$x = \frac{ab}{1-a+b}$$

En (E_3)

$$y = \frac{a\left(\dfrac{ab}{1-a+b}\right)+ab}{1+b}$$

$$y = \frac{\cancel{a^2b}+ab-\cancel{a^2b}+ab^2}{1-a+b+b-ab+b^2} = \frac{ab(1+b)}{1+b-a(1+b)+b(1+b)}$$

$$y = \frac{ab}{1-a+b}$$

Así la solución es: $\left(\dfrac{ab}{1-a+b}, \dfrac{ab}{1-a+b}\right)$

Verifiquémoslo:

E_1: $\quad ax - (1+b)y + ab = 0$

$$a\left(\frac{ab}{1-a+b}\right) - (1+b)\left(\frac{ab}{1-a+b}\right) + ab = 0$$

$$\frac{a^2b}{1-a+b} - \frac{ab+ab^2}{1-a+b} + \frac{ab-a^2b+ab^2}{1-a+b} = 0$$

$$0 = 0$$

E_2: $\quad (1-a)x + by - ab = 0$

$$(1-a)\left(\frac{ab}{1-a+b}\right) + b\left(\frac{ab}{1-a+b}\right) - ab = 0$$

$$\frac{ab-a^2b}{1-a+b} + \frac{ab^2}{1-a+b} - \frac{ab-a^2b+ab^2}{1-a+b} = 0$$

$$0 \equiv 0$$

10. Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{array}{rl|l} x + 3y - 3z = & -16 & (E_1) \\ -3x + 2y - 2z = & 4 & (E_2) \\ 12x - 25y - 2z = & -2 & (E_3) \end{array}$$

Con E_1 y E_2 vamos a eliminar x

$$\begin{array}{ll|l} 3E_1: & 3x + 9y - 9z = -48 & \\ E_2: & -3x + 2y - 2z = 4 & \text{sumando} \\ \hline & 11y - 11z = -44 & /:11 \\ & y - z = -4 & (E_4) \end{array}$$

Con E_1 y E_3 vamos a eliminar x

$$\begin{array}{ll|l} -12E_1: & -12x - 36y + 36z = 192 & \\ E_3: & 12x - 25y - 2z = -2 & \text{sumando} \\ \hline & -61y + 34z = 190 & (E_3) \end{array}$$

Ejercicios resueltos

Combinamos E_4 con E_5 para calcular el valor de $y \wedge z$.

$$\left.\begin{aligned} y - z &= -4 \\ -61y + 34z &= 190 \end{aligned}\right| \qquad \begin{aligned} &(E_4) \\ &(E_5) \end{aligned}$$

$$34E_4: \quad \left.\begin{aligned} 34y - 34z &= -136 \\ -61y + 34z &= 190 \end{aligned}\right|$$

$$-27y = 54$$
$$y = -2$$

En E_4 si $y = -2$, $-2 - z = -4$
$$z = 2$$

En E_1 si $y = -2$, $z = 2$, $x + 3(-2) - 3 \cdot 2 = -16$
$$x = -16 + 6 + 6$$
$$x = -4$$

Luego la solución es $(-4, -2, 2)$

Verifiquemos:

E_1:
$$\begin{aligned} x + 3y - 3z &= -16 \\ -4 + 3(-2) - 3 \cdot 2 &= -16 \\ -16 &\equiv -16 \end{aligned}$$

E_2:
$$\begin{aligned} -3x + 2y - 2z &= 4 \\ -3(-4) + 2(-2) - 2 \cdot 2 &= 4 \\ 12 - 4 - 4 &= 4 \\ 4 &\equiv 4 \end{aligned}$$

E_3:
$$\begin{aligned} 12x - 25y - 2z &= -2 \\ 12(-4) - 25 \cdot (-2) - 2 \cdot 2 &= -2 \\ -48 + 50 - 4 &= -2 \\ 2 - 4 &= -2 \\ -2 &\equiv -2 \end{aligned}$$

11. Resolver el mismo sistema del problema 10 pero usando el método de eliminación de Gauss.

$$\left.\begin{aligned} x + 3y - 3z &= -16 \\ -3x + 2y - 2z &= 4 \\ 12x - 25y - 2z &= -2 \end{aligned}\right| \begin{aligned} &E_1 \\ &E_2 \\ &E_3 \end{aligned}$$

Llamaremos operaciones por fila a los siguientes cambios que podemos hacer con las ecuaciones sin alterar la solución del sistema.

- Intercambiar dos ecuaciones.
- Multiplicar una ecuación por un factor distinto de cero.
- Cambiar una ecuación por ella misma sumada con otra que previamente ha sido multiplicada por algún factor distinto de cero.

El método se trata de ir ordenando el sistema de modo que los coeficientes bajo la primera incógnita de la primera ecuación sean cero, luego los coeficientes bajo la primera incógnita de la segunda ecuación sean cero y así sucesivamente.
Este método es válido para resolver sistemas de n ecuaciones de primer grado con n incógnitas y es de fácil implementación computacional.

Los explicaremos aplicándolo.

E_1 la dejamos igual, ya que el coeficiente de x es 1.

$E_2 \to E_2 + 3\ E_1$
$E_3 \to E_3 + (-12)\ E_1$

$$\left.\begin{array}{r} x + 3y - 3z = -16 \\ 11y - 11z = -44 \\ -61y + 34z = 190 \end{array}\right|$$

$E_1 \to E_1$
$E_2 \to \frac{1}{11}\ E_2$
$E_3 \to E_3$

$$\left.\begin{array}{r} x + 3y - 3z = -16 \\ y - z = -4 \\ -61y + 34z = 190 \end{array}\right|$$

$E_1 \to E_1$
$E_2 \to E_2$
$E_3 \to E_3 + (61)\ E_2$

$$\left.\begin{array}{r} x + 3y - 3z = -16 \\ y - z = -4 \\ -27z = -54 \end{array}\right|$$

En E_3: $z = 2$
En E_2: $y - 2 = -4 \Rightarrow y = -2$
En E_1: $x + 3(-2) - 3 \bullet 2 = -16 \Rightarrow x = -4$

Luego, la solución es $(-4, -2, 2)$.

12. Resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y - z = 3 \\ x - y + 2z = 0 \\ 2x - 3y + 5z = 7 \end{array}\right| \quad \begin{array}{c} (E_1) \\ (E_2) \\ (E_3) \end{array}$$

Aplicando el método de eliminación de Gauss.

$E_1 \to E_1$
$E_2 \to E_2 + (-1)\ E_1$
$E_3 \to E_3 + (-2)\ E_1$

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y - z = 3 \\ -3y + 3z = -3 \\ -7y + 7z = 1 \end{array}\right|$$

$E_1 \to E_1$

$E_2 \to \left(-\frac{1}{3}\right) E_2$

$E_3 \to \left(-\frac{1}{7}\right) E_3$

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - z &= 3 \\ y - z &= 1 \\ y - z &= -\frac{1}{7} \end{aligned}\right|$$

$E_1 \to E_1$

$E_2 \to E_2$

$E_3 \to E_3 + (-1)\, E_2$

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - z &= 3 \\ y - z &= 1 \\ 0 &= -\frac{8}{7} \end{aligned}\right|$$

Vemos que en la última ecuación se nos produce una contradicción, lo que quiere decir que el sistema no tiene solución. No hay ningún punto común a los tres planos.

13. Resolver el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - z &= 3 \\ x - y + 2z &= 0 \\ 2x - 3y + 5z &= -1 \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} &(E_1) \\ &(E_2) \\ &(E_3) \end{aligned}$$

Aplicando el método de eliminación de Gauss.

$E_1 \to E_1$

$E_2 \to E_2 + (-1)\, E_1$

$E_3 \to E_3 + (-2)\, E_1$

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - z &= 3 \\ -3y + 3z &= -3 \\ -7y + 7z &= -7 \end{aligned}\right|$$

$E_1 \to E_1$

$E_2 \to \left(-\frac{1}{3}\right) E_2$

$E_3 \to \left(-\frac{1}{7}\right) E_3$

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - z &= 3 \\ y - z &= 1 \\ y - z &= 1 \end{aligned}\right|$$

$E_1 \to E_1$

$E_2 \to E_2$

$E_3 \to E_3 + (-1)\, E_2$

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - z &= 3 \\ y - z &= 1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}\right|$$

Ya veíamos en el paso anterior que había dos ecuaciones equivalentes, lo que significa que el sistema tiene una variable libre y por lo tanto tiene infinitas soluciones.

Si $z = 1$ (variable libre), en E_2 : $y = 2$ en E_1 : $x = 0$. Luego (0, 2, 1) es una solución. Dando otros valores a z se pueden encontrar otras soluciones.

Si $z = a,\ y = 1 + a\ \ x = 1 - a$

Así la solución general es $(1 - a,\ 1 + a,\ a)$

14. Resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y + z - 3u = -7 \\ x + 2y - z + u = 8 \\ 3x + y - 2z - u = 6 \\ -x + y - 4z - 2u = -3 \end{array}\right| \begin{array}{l} (E_1) \\ (E_2) \\ (E_3) \\ (E_4) \end{array}$$

Reordenando

$$\left.\begin{array}{rcr} x + 2y - z + u & = & 8 \\ -x + y - 4z - 2u & = & -3 \\ 2x - y + z - 3u & = & -7 \\ 3x + y - 2z - u & = & 6 \end{array}\right|$$

$E_2 \to E_2 + E_1$
$E_3 \to E_3 + (-2)\, E_1$
$E_4 \to E_4 + (-3)\, E_1$

$$\left.\begin{array}{rcr} x + 2y - z + u & = & 8 \\ 3y - 5z - u & = & 5 \\ -5y + 3z - 5u & = & -23 \\ -5y + z - 4u & = & -18 \end{array}\right|$$

$E_2 \to \frac{1}{3} E_2$

$$\left.\begin{array}{rcr} x + 2y - z + u & = & 8 \\ y - \frac{5}{3} z - \frac{1}{3} u & = & \frac{5}{3} \\ -5y + 3z - 5u & = & -23 \\ -5y + z - 4u & = & -18 \end{array}\right|$$

$E_3 \to E_3 + 5\, E_2$

$E_4 \to E_4 + 5\, E_2$

$$\left.\begin{array}{rcr} x + 2y - z + u & = & 8 \\ y - \frac{5}{3} z - \frac{1}{3} u & = & \frac{5}{3} \\ -\frac{16}{3} z - \frac{20}{3} u & = & \frac{44}{3} \\ -\frac{22}{3} z - \frac{17}{3} u & = & -\frac{29}{3} \end{array}\right|$$

Ejercicios resueltos

$E_3 \to -\frac{3}{2} E_3$

$E_4 \to -3 E_4$

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - z + u &= 8 \\ y - \tfrac{5}{3} z - \tfrac{1}{3} u &= \tfrac{5}{3} \\ 8z + 10u &= 22 \\ 22z + 17u &= 29 \end{aligned}\right|$$

$E_3 \to \frac{1}{8} E_3$

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - z + u &= 8 \\ y - \tfrac{5}{3} z - \tfrac{1}{3} u &= \tfrac{5}{3} \\ z + \tfrac{5}{4} u &= \tfrac{11}{4} \\ 22z + 17u &= 29 \end{aligned}\right|$$

$E_4 \to \quad E_4 + (-22) E_3$

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - z + u &= 8 \\ y - \tfrac{5}{3} z - \tfrac{1}{3} u &= \tfrac{5}{3} \\ z + \tfrac{5}{4} u &= \tfrac{11}{4} \\ -\tfrac{21}{2}u &= \tfrac{-63}{2} \end{aligned}\right|$$

$E_4 : u = 3$

$E_3 : z = \frac{11}{4} - \frac{5}{4} u \Rightarrow z = -1$

$E_2 : y = \frac{5}{3} + \frac{5}{3} z + \frac{1}{3} u \Rightarrow y = 1$

$E_1 : x = 8 - 2y + z - u \Rightarrow x = 2$

Luego la solución es (2, 1; – 1, 3)

15. Determinar el valor de k para que el sistema tenga:

i) solución única

ii) ninguna solución

iii) infinitas soluciones

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - z &= -6 \\ 4x - y + z &= 9 \\ x - ky + 2z &= 5 \end{aligned}\right|$$

$E_2 \to E_2 + (-4) E_1$

$E_3 \to E_3 + (-1) E_1$

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - z &= -6 \\ -9y + 5z &= 33 \\ -(k + 2) y + 3z &= 11 \end{aligned}\right|$$

$E_2 \to \frac{-1}{9} E_2$

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - z &= -6 \\ y - \tfrac{5}{9} z &= -\tfrac{33}{9} \\ -(k + 2) y + 3z &= 11 \end{aligned}\right|$$

$E_3 \to E_3 + (k+2)\ E_2$

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - z &= -6 \\ y - \frac{5}{9} z &= -\frac{33}{9} \\ (17 - 5k)\, z &= 33 - 33k \end{aligned}\right|$$

Si $k = \frac{17}{5}$ $\quad E_3$: $0 = -\frac{396}{5}$ y el sistema no tiene solución.

Si k $\frac{17}{5}$ el sistema tiene solución única.

No existe k para el cual el sistema tenga infinitas soluciones, ya que 17–5k y 33–33k no pueden ser ambas cero.

Ejercicios

1. Determine si los siguientes pares de ecuaciones son L. I. o L. D.

a) $\left.\begin{aligned} 2x + y + 3 &= 0 \\ 5x + y - 9 &= 0 \end{aligned}\right|$

b) $\left.\begin{aligned} 4x + y - 7 &= 0 \\ 6x + 5y + 7 &= 0 \end{aligned}\right|$

c) $\left.\begin{aligned} -x + y - 12 &= 0 \\ 5x + 3y + 20 &= 0 \end{aligned}\right|$

d) $\left.\begin{aligned} -2x + y + 1 &= 0 \\ 2x - y + 3 &= 0 \end{aligned}\right|$

e) $\left.\begin{aligned} 2x + 3y - 1 &= 0 \\ 4x + 6y - 2 &= 0 \end{aligned}\right|$

f) $\left.\begin{aligned} 2x + 3y - 1 &= 0 \\ 2x - y &= 0 \end{aligned}\right|$

g) $\left.\begin{aligned} 2x + 3y - 1 &= 0 \\ 4x + 6y + 7 &= 0 \end{aligned}\right|$

h) $\left.\begin{aligned} 4x + 4y - 8 &= 0 \\ 6x + y - 22 &= 0 \end{aligned}\right|$

i) $\left.\begin{aligned} -2y - 3 &= 0 \\ -y - 1 &= 0 \end{aligned}\right|$

j) $\left.\begin{aligned} -3y - 3 &= 0 \\ 3y + 3 &= 0 \end{aligned}\right|$

2. Determine el valor de k para que las ecuaciones dadas sean L. I.

a) $2x + 3y - k = 0 \qquad x + y - 1 = 0$

b) $x + y - 3 = 0 \qquad kx = 3 - y$

c) $1 - 2x = y \qquad x + 2y = k$

d) $x + ky - 2 = 0 \qquad x - y = 2$

3. Determine el valor de k en el sistema para que tenga solución única.

a) $\left.\begin{aligned} x + ky &= 2 \\ 2x + y &= 4 \end{aligned}\right|$

b) $\left.\begin{aligned} 8x + 4y - 6 &= 0 \\ 12x + ky &= 9 \end{aligned}\right|$

c) $\left.\begin{aligned} kx - y &= 2 \\ x - ky &= 3 \end{aligned}\right|$

4. En los casos del ejercicio N° 1 en que las ecuaciones sean L. I., determine si forman un sistema de ecuaciones simultáneas o incompatibles (determinado o inconsistente, respectivamente).

Ejercicios

5. Determine, sin resolver, si los siguientes sistemas son determinados, indeterminados o inconsistentes.

a) $\begin{cases} -2x + 2y + 5 = 0 \\ -x + y + 7 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x + y - 17 = 0 \\ 4x - 8 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -3x + 3y - 1 = 0 \\ -x + y + 2 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + y + 3 = 0 \\ 9x + 3y + 9 = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 5x - 3y = 0 \\ 25x - 15y = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} -2x + y - 3 = 0 \\ -5x + 4y - 15 = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 4x + y - 10 = 0 \\ 5x + y - 11 = 0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 7x - 5y - 4 = 0 \\ -14x + 10y + 8 = 0 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ -2x + 4y + 1 = 0 \end{cases}$

j) $\begin{cases} y + 2 = 0 \\ -5x + 4y - 7 = 0 \end{cases}$

6. Determine si los pares de números reales dados son solución del sistema dado.

a) $\begin{cases} 3x + y - 4 = 0 \\ 6x + 2y - 8 = 0 \end{cases}$

$(5, -11)$ $(1, 1)$ $(2, -2)$

b) $\begin{cases} -x + y - 4 = 0 \\ -4x + y - 25 = 0 \end{cases}$

$(1, 5)$ $(-7, -3)$ $(1, 29)$

c) $\begin{cases} 2x + 7y - 1 = 0 \\ -2x + 7y - 13 = 0 \end{cases}$

$(-24, -5)$, $(-3, 1)$ $(-38, -9)$

d) $\begin{cases} 3x - 5y - 25 = 0 \\ -6x + 10y + 50 = 0 \end{cases}$

$(-30, -23)$, $(20, 7)$ $(15, 9)$

e) $\begin{cases} 4x + y + 23 = 0 \\ 5x + 7y + 23 = 0 \end{cases}$

$(-13, 6)$, $(-6, 1)$, $(8, -9)$

f) $\begin{cases} -x + 6y + 32 = 0 \\ -3x + 6y + 36 = 0 \end{cases}$

$(2, -5)$, $(50, 19)$, $(26, 7)$

7. Determine gráficamente la solución de cada uno de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 5x = 4y - 36 \\ 9x = y - 40 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 8x + 11y - 4 = 0 \\ 3x - 2y + 23 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 12y - 31 = 0 \\ 4x = -3y - 11 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -x = -y - 2 \\ 4x - y - 17 = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x = -5y + 8 \\ 4x = -8y + 8 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 4x + 4y + 12 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} -9x - 8y + 5 = 0 \\ -6x - 7y - 5 = 0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 11y + 11 = 0 \\ -4x + 6y - 10 = 0 \end{cases}$

i) $\begin{cases} -2x - 8y - 16 = 0 \\ -x = 7y + 17 \end{cases}$

j) $\begin{cases} -5x = 7y + 35 \\ -8x - 2y - 10 = 0 \end{cases}$

k) $\begin{cases} 3x + 8y - 6 = 0 \\ 2x = -6y + 6 \end{cases}$

l) $\begin{cases} 5x = -y - 21 \\ 7x - 2y + 43 = 0 \end{cases}$

m) $\begin{cases} x = -14y + 21 \\ 4x = -12y - 4 \end{cases}$

n) $\begin{cases} -4x = -3y - 8 \\ -3x = 7y + 31 \end{cases}$

o) $\begin{cases} -2y + 6 = 0 \\ 7x + 2y - 41 = 0 \end{cases}$

p) $\begin{cases} -4x = -6y + 2 \\ -7x = -11y + 2 \end{cases}$

q) $\begin{cases} 7x + 12y + 32 = 0 \\ x + 13y - 18 = 0 \end{cases}$

r) $\begin{cases} x = -8y + 12 \\ 7x + 5y + 18 = 0 \end{cases}$

s) $\begin{cases} 0 = y + 4 \\ -6x - 11y - 26 = 0 \end{cases}$

t) $\begin{cases} x + 6y - 9 = 0 \\ -x = -7y + 17 \end{cases}$

8. Resuelva usando el método de eliminación por reducción los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x + 5y + 21 = 0 \\ -2x + 3y - 3 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x + 3y + 17 = 0 \\ 4x + y + 15 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 5y + 9 = 0 \\ 4x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -x + 3y - 13 = 0 \\ -4x + 2y - 22 = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} -x + 2y - 1 = 0 \\ 2x + 5y - 25 = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} -3x + 6y - 39 = 0 \\ 6x + 6y - 12 = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3x + 8y - 6 = 0 \\ -2x + 2y - 18 = 0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 3x + 3y + 30 = 0 \\ 5x + y + 34 = 0 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 2x + 5y + 19 = 0 \\ 5x + 2y - 5 = 0 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x + 5y + 6 = 0 \\ -5x + 4y - 1 = 0 \end{cases}$

k) $\begin{cases} 4x + 4y - 24 = 0 \\ 5x + 3y - 24 = 0 \end{cases}$

l) $\begin{cases} 4x + 7y - 26 = 0 \\ 2x + 5y - 16 = 0 \end{cases}$

Ejercicios

9. Resuelva con el método de eliminación por sustitución cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{array}{r} 4x + 3y - 3 = 0 \\ 2x + 7y - 7 = 0 \end{array}$

b) $\begin{array}{r} x + 4y + 4 = 0 \\ -4x + 6y + 28 = 0 \end{array}$

c) $\begin{array}{r} 4x + y - 30 = 0 \\ 2x - y - 12 = 0 \end{array}$

d) $\begin{array}{r} x + y - 10 = 0 \\ -x + 2y - 8 = 0 \end{array}$

e) $\begin{array}{r} 2x + 5y + 37 = 0 \\ x + 2y + 16 = 0 \end{array}$

f) $\begin{array}{r} -x + 2y + 3 = 0 \\ 4x + 5y + 14 = 0 \end{array}$

g) $\begin{array}{r} -2x + 4y + 12 = 0 \\ -3x + 8y + 20 = 0 \end{array}$

h) $\begin{array}{r} x + 2y + 1 = 0 \\ -6x + 2y - 48 = 0 \end{array}$

i) $\begin{array}{r} -3x + 5y - 22 = 0 \\ -5x + 8y - 36 = 0 \end{array}$

j) $\begin{array}{r} x + 2y + 1 = 0 \\ 4x + y + 4 = 0 \end{array}$

k) $\begin{array}{r} -x + 3y - 7 = 0 \\ -3x + y - 5 = 0 \end{array}$

l) $\begin{array}{r} -x + 6y + 2 = 0 \\ -2x + 3y - 5 = 0 \end{array}$

10. Resuelva por el método de eliminación por igualación cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{array}{r} -x + 2y + 1 = 0 \\ x + 2y + 15 = 0 \end{array}$

b) $\begin{array}{r} x + 5y - 6 = 0 \\ 5x + 6y - 11 = 0 \end{array}$

c) $\begin{array}{r} x + 8y - 39 = 0 \\ 5x + y = 0 \end{array}$

d) $\begin{array}{r} -2x + 2y - 6 = 0 \\ 6x + 3y - 18 = 0 \end{array}$

e) $\begin{array}{r} x + y - 3 = 0 \\ -4x - y - 6 = 0 \end{array}$

f) $\begin{array}{r} -2x - y - 3 = 0 \\ -6x + 5y + 15 = 0 \end{array}$

g) $\begin{array}{r} x + 2y = 0 \\ -4x + 7y = 0 \end{array}$

h) $\begin{array}{r} x + 5y - 3 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{array}$

i) $\begin{array}{r} x + 2y + 3 = 0 \\ -x + y - 3 = 0 \end{array}$

j) $\begin{array}{r} 4x + 7y + 15 = 0 \\ 3x + 8y + 25 = 0 \end{array}$

k) $\begin{array}{r} -x + 3y - 15 = 0 \\ -2x + y - 15 = 0 \end{array}$

l) $\begin{array}{r} 6x + 4y - 28 = 0 \\ -x + 2y - 6 = 0 \end{array}$

11. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones usando el método que estime más conveniente:

a) $\begin{cases} 3x - y - 12 = 0 \\ x + 4y - 5 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -5x + 7y + 8 = 0 \\ 6x + 2y + 32 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ 3x + 5y = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -x + 4y + 2 = 0 \\ -2x + 6y + 4 = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + 2y + 12 = 0 \\ -x + 3y + 13 = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} y - 6 = 0 \\ -x + 6y - 36 = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + 5y - 3 = 0 \\ -3x + 4y + 9 = 0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 7y + 7 = 0 \\ 6x + 5y - 25 = 0 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x + 3y - 16 = 0 \\ -6x + 5y - 42 = 0 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 2y + 2 = 0 \\ -4x + 2y + 2 = 0 \end{cases}$

k) $\begin{cases} y = 0 \\ -5x + y - 2 = 0 \end{cases}$

l) $\begin{cases} 4x + 6y - 4 = 0 \\ -5x + 4y + 28 = 0 \end{cases}$

m) $\begin{cases} -3x + 4y - 38 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$

12. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 4x + 5y + 9 = 0 \\ 20x + 6y - 12 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 20y - 5 = 0 \\ -4x + 12y - 15 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 32y + 8 = 0 \\ 10x + 4y - 9 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -20x + 6y - 8 = 0 \\ -8x + 21y + 3 = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} -12x + 20y - 7 = 0 \\ 4x + 8y + 6 = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 12x + 10y + 2 = 0 \\ 3x + 4y + 2 = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 4x + 5y + 11 = 0 \\ -4x + 3y + 13 = 0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} -x + 4y + 1 = 0 \\ x + 8y - 10 = 0 \end{cases}$

i) $\begin{cases} -3x + 9y - 2 = 0 \\ -15x + 21y + 6 = 0 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 8x + 2y - 16 = 0 \\ 10x + 3y - 22 = 0 \end{cases}$

k) $\begin{cases} -3x + 5y + 14 = 0 \\ -4x + 2y + 14 = 0 \end{cases}$

l) $\begin{cases} -4x + 3y - 6 = 0 \\ -16x + 21y - 33 = 0 \end{cases}$

Ejercicios

13. Resuelva los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{r} px + y = 1 \\ x - qy = 0 \end{array}\right|$

b) $\left.\begin{array}{r} px - y = 0 \\ pqx - 1 = 0 \end{array}\right|$

c) $\left.\begin{array}{r} ax - b = 0 \\ ax - by = 1 \end{array}\right|$

d) $\left.\begin{array}{r} ax + by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{array}\right|$

14. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\left.\begin{array}{r} 6x + \dfrac{8y}{6} - 4 = \dfrac{-x-6y}{6} + 2 \\ x - 5(-3y - 4) = -6 \end{array}\right|$

b) $\left.\begin{array}{r} -6x + \dfrac{7y}{4} - 4 = \dfrac{x + 8y}{4} + 8 \\ -(-4x - 2) - 7(-5y - 7) = -4 \end{array}\right|$

c) $\left.\begin{array}{r} 7x = 6 \\ -4(-5x + 1) - 2(y - 8) = -2 \end{array}\right|$

d) $\left.\begin{array}{r} 8x : (-7) = -3y : (-1) \\ 4(-8x - 4) - 8(2 - y) = -7 \end{array}\right|$

e) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{-x + 7y}{5x - 4y} = \dfrac{8}{-7} \\ 8(-8x - 7) + 3(6 - 9y) = -5 \end{array}\right|$

f) $\left.\begin{array}{r} 5x + 7(6y - 8) = 9 \\ (-x - 4y) : (7x - 3y) = 3 : 6 \end{array}\right|$

g) $\left.\begin{array}{r} -6x - \dfrac{4y}{8} + 3 = \dfrac{5x + 2y}{8} + 3 \\ 8x = 6y - 3 \end{array}\right|$

h) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{7x + 8y}{6} = \dfrac{-7x - 7y}{6} \\ 3y - 1 = 0 \end{array}\right|$

i) $\left.\begin{array}{r} 5x - 4(7y + 5) = -2 \\ -7x - 4(-y - 2) = 3 \end{array}\right|$

j) $\left.\begin{array}{r} 6(-3x - 7) - 5(4y + 8) = 9 \\ (-6x + 2y) : (-9x + 2y) = -5 : 2 \end{array}\right|$

k) $\left.\begin{array}{r} -6(5 - x) - 8(4y + 2) = 2 \\ (8x + 6) + 2(5y - 4) = 3 \end{array}\right|$

l) $\left.\begin{array}{r} -\dfrac{6x - 5y}{2} = \dfrac{6x + 4y}{3} \\ 6x + 8(3 - 8y) = 0 \end{array}\right|$

15. Un cuarto de la suma de dos números es 152 y un tercio de su diferencia es 66. ¿Cuáles son los números?

16. Si el doble de un número se suma con el triple de otro se obtiene 45. Si al triple del primero se le resta el segundo se obtiene 29. Determine los números.

17. La suma de las cifras de un número de dos cifras es 7. Si se invierten las cifras, el nuevo número es igual a dos veces el número anterior, más dos unidades. Calcule el número.

18. Si un número de dos cifras se divide por la suma de sus cifras, el cociente es 7 y el resto es cero. Si a la cifra de las decenas se resta la cifra de las unidades, se obtiene 4. ¿Cuál es el número?

19. Dos números están en la razón 5 : 5. Si el primero se aumenta en 12 y el segundo se disminuye en 3, quedan en la razón de 9 : 4. ¿Cuáles son los números?

20. La suma de dos números es 208 y

su diferencia es 122. ¿Cuáles son los números?

21. Sergio tiene \$ 1.950 en monedas de \$ 100 y de \$ 50. En total tiene 24 monedas. Determine cuántas son de \$ 100 y cuántas de \$ 50.

22. La suma de las cifras de un número de 2 cifras es 4. Si se invirtieran las cifras, el nuevo número sería igual al doble del número anterior, más 5 unidades. ¿Cuál es el número?

23. Si un número de dos cifras se divide por la suma de sus dígitos, el cociente es cinco y el resto es cero. Si a la cifra de las decenas se le resta la cifra de las unidades se obtiene –1. ¿Cuál es el número?

24. La edad de Eliana es $\frac{1}{5}$ de la edad de Miguel y hace 5 años, la edad de Eliana era $\frac{1}{10}$ de la edad de Miguel. Determine sus edades actuales.

25. Un cuarto de la suma de dos números es 81 y un tercio de su diferencia es 54. ¿Cuáles son los números?

26. Si el doble de un entero se suma con el triple de otro se obtiene 26. Si al triple del primero se le resta el segundo se obtiene 28. Determine los números.

27. Si una de dos llaves de agua queda abierta durante 40 min. y la otra durante 17 min., entregan ambas 1.163 litros de agua. Si la primera queda abierta durante 21 min. y la otra durante 41 min., entregan 1.220 litros de agua. ¿Cuántos litros de agua por minuto entrega cada llave?

28. Hace 5 años la edad de Manuel era 9 veces la edad de Marcos. En 5 años más la edad de Manuel será 4 veces la edad de Marcos. ¿Cuál es la edad actual de cada uno?

29. El doble de la edad de Ángela sobrepasa en 14 años la edad de Sergio. Y un quinto de la edad de Sergio es 13 años menos que la edad de Ángela. Calcule ambas edades.

30. Dos números están en la razón 10 : 5. Si se resta 20 al primero y se suma 20 al segundo, la razón de ellos se invierte. ¿Cuáles son los números?

31. La suma de dos números es 169 y su diferencia es 132. ¿Cuáles son los números?

32. $\frac{4}{5}$ de la suma de dos números es igual a 32 y $\frac{10}{9}$ de su diferencia es 10. Encuentre los números.

33. Andrés le pagó a Carlos \$ 1.550 en monedas de \$ 100 y de \$ 50. En total le dio 21 monedas. ¿Cuántas eran de \$ 100 y cuántas de \$ 50?

34. Si un número de dos cifras se divide por la suma de sus cifras el cociente es cinco y el resto es trece. Si a la cifra de las decenas se resta la cifra de las unidades se obtiene 1. ¿Cuál es el número?

35. La edad de Adolfo es 15 años menos que el doble de la edad de Teresa. Y la séptima parte de la edad de Adolfo es 20 años menos que la edad de Teresa. Calcule ambas edades.

36. Dos números están en la razón de 6:4. Si se resta 6 del primero y se suma 6 al segundo, quedan en la razón 2 : 3.
¿Cuáles son los números?

37. La suma de la cifra de las decenas y la cifra de las unidades de un número de

Ejercicios

dos cifras es 4. Si al número se le resta 18, las cifras se invierten. ¿Cuál es el número?

38. Hace 4 años la edad de Ximena era 8 veces la edad de Matías. En cuatro años más la edad de Ximena será 4 veces la de Matías. ¿Cuál es la edad de cada uno?

39. Resuelva los siguientes sistemas:

a)
$$\begin{aligned} -5x-3y-5&=0\\ -8x+8y&=-4z\\ -2x-y+2z+2&=0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 9x+14y+25z+22&=0\\ -6x+2y&=5z-19\\ -7x+4y-3z+26&=0 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 10x-4y+12z-28&=0\\ -22x+31y&=-z-29\\ 4x+3y-6z+15&=0 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 2x+2y+11z+23&=0\\ y+z&=0\\ -3x+4y+7z+15&=0 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} 5x+25y+26z+49&=0\\ -18x+20y-51z+1&=0\\ 15x-9y+7z+50&=0 \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} 3x+9y&=9z-48\\ -6x+4y-4z-8&=0\\ 12x-25y-2z+2&=0 \end{aligned}$$

g)
$$\begin{aligned} x-y-4&=0\\ -3x+3y&=-4z-4\\ -14x-y+6z-31&=0 \end{aligned}$$

h)
$$\begin{aligned} -15x-8y-11z-9&=0\\ -5x-3y+27z+29&=0\\ x+y+5z+3&=0 \end{aligned}$$

i)
$$\begin{aligned} 8z+32&=0\\ -x-52y+30z+17&=0\\ 2x+13y+7z+52&=0 \end{aligned}$$

j)
$$\begin{aligned} -21x-14y-13z-73&=0\\ -14x-21y-6z-115&=0\\ 4x-4y-12&=0 \end{aligned}$$

k)
$$\begin{aligned} -10x+18y-40z-84&=0\\ -3x+30y&=-22z-92\\ 5x+6y&=-17z-66 \end{aligned}$$

l)
$$\begin{aligned} -4x+20y&=-20z-12\\ 3x+9z-27&=0\\ -7x+26y-2z+77&=0 \end{aligned}$$

m)
$$\begin{aligned} 3y-z+5&=0\\ 16x-20y+12z+52&=0\\ 13x-46y-14z-142&=0 \end{aligned}$$

n)
$$\begin{aligned} x-2y-z&=0\\ 19x-29y-12z+35&=0\\ -18x+24y+15z-15&=0 \end{aligned}$$

ñ)
$$\begin{aligned} 7x+5y+10z+21&=0\\ -4x+6y+20z+82&=0\\ -4x-5y-24z-83&=0 \end{aligned}$$

o)
$$\begin{aligned} 2x+z-3u&=8\\ x-2y+z+u&=-4\\ -x+y-3u&=4\\ y-4z+u&=-2 \end{aligned}$$

p)
$$\begin{aligned} x-2y+5z-u&=-6\\ x+y-z+u&=6\\ x+2y-z-u&=2\\ 2x+y+u&=7 \end{aligned}$$

q)
$$\begin{aligned} 5x-3y+z-2u&=11\\ x-5y+3z-u&=10\\ 2x+y-z+3u&=-3\\ 3x-2y+2z+u&=6 \end{aligned}$$

r) $\left.\begin{array}{r} x+2y-z+u=-3 \\ 2x-y+2z-u=8 \\ -x+3y-2z+u=-7 \\ 3x-4y+3z-2u=13 \end{array}\right|$

40. Resuelva los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{l} -\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{z}=2 \\ -\frac{3}{x}-\frac{3}{y}-\frac{3}{z}=-3 \\ \frac{2}{x}-\frac{1}{y}-\frac{3}{z}=3 \end{array}\right|$

b) $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{x}+\frac{2}{z}=-1 \\ \frac{1}{x}+\frac{3}{y}+\frac{3}{z}=0 \\ \frac{3}{y}+\frac{3}{z}=2 \end{array}\right|$

c) $\left.\begin{array}{l} \frac{3}{x}-\frac{1}{y}+\frac{3}{z}=-4 \\ -\frac{2}{x}+\frac{2}{z}=-1 \\ \frac{2}{x}+\frac{1}{y}-\frac{3}{z}=-2 \end{array}\right|$

d) $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{2}{z}=2 \\ -\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=-1 \\ -\frac{4}{x}-\frac{4}{z}=-1 \end{array}\right|$

e) $\left.\begin{array}{l} \frac{2}{x}-\frac{1}{y}-\frac{3}{z}=-1 \\ \frac{3}{x}-\frac{2}{y}-\frac{4}{z}=2 \\ -\frac{1}{x}-\frac{2}{y}-\frac{4}{z}=3 \end{array}\right|$

f) $\left.\begin{array}{l} -\frac{1}{x}-\frac{4}{y}-\frac{3}{z}=1 \\ \frac{2}{x}-\frac{4}{y}-\frac{4}{z}=0 \\ -\frac{1}{x}+\frac{3}{y}-\frac{2}{z}=-1 \end{array}\right|$

g) $\left.\begin{array}{l} \frac{3}{x}+\frac{1}{y}-\frac{2}{z}=-2 \\ -\frac{2}{x}+\frac{3}{z}=3 \\ -\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{2}{z}=1 \end{array}\right|$

h) $\left.\begin{array}{l} -\frac{2}{x}-\frac{4}{y}=-4 \\ \frac{3}{x}-\frac{4}{y}-\frac{4}{z}=-1 \\ -\frac{3}{x}+\frac{3}{y}-\frac{2}{z}=-4 \end{array}\right|$

i) $\left.\begin{array}{l} -\frac{1}{x}-\frac{2}{y}-\frac{4}{z}=2 \\ -\frac{4}{x}+\frac{3}{z}=-2 \\ -\frac{4}{x}-\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=-1 \end{array}\right|$

j) $\left.\begin{array}{l} \frac{2}{y}-\frac{1}{z}=-1 \\ -\frac{1}{x}-\frac{3}{z}=0 \\ -\frac{3}{x}-\frac{2}{y}-\frac{2}{z}=-4 \end{array}\right|$

k) $\left.\begin{array}{l} \frac{3}{x}-\frac{3}{y}=0 \\ \frac{3}{x}-\frac{1}{y}+\frac{2}{z}=-1 \\ \frac{1}{x}-\frac{3}{y}-\frac{3}{z}=2 \end{array}\right|$

l) $\left.\begin{array}{l} \frac{2}{y}+\frac{2}{z}=2 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{2}{z}=-4 \\ \frac{2}{x}+\frac{2}{y}-\frac{1}{z}=3 \end{array}\right|$

m) $\left.\begin{array}{l} \frac{3}{x}-\frac{1}{y}-\frac{2}{z}=-4 \\ -\frac{1}{x}-\frac{3}{y}+\frac{1}{z}=-2 \\ -\frac{2}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=-3 \end{array}\right|$

n) $$\left.\begin{aligned} \frac{3}{x} - \frac{1}{y} - \frac{3}{z} &= -3 \\ -\frac{2}{x} - \frac{3}{y} + \frac{1}{z} &= 2 \\ -\frac{4}{x} - \frac{1}{z} &= -1 \end{aligned}\right|$$

o) $$\left.\begin{aligned} \frac{3}{y} - \frac{4}{z} &= -1 \\ -\frac{3}{y} + \frac{1}{z} &= 0 \\ \frac{2}{x} - \frac{1}{y} - \frac{4}{z} &= -4 \end{aligned}\right|$$

41. Encuentre los valores de k en el sistema siguiente para que éste tenga:

i) Solución única.
ii) Infinitas soluciones.
iii) Ninguna solución.

a) $$\left.\begin{aligned} x + 2y - z &= 1 \\ x + y + z &= 0 \\ x + ky - 2z &= 2 \end{aligned}\right|$$

b) $$\left.\begin{aligned} x - 2y + z &= 3 \\ kx - y + 2z &= 3 \\ 2x - y - 2z &= 1 \end{aligned}\right|$$

c) $$\left.\begin{aligned} 2x - 3y + kz &= 5 \\ x - 2y + 4z &= 2 \\ -x + ky - 9z &= 1 \end{aligned}\right|$$

42. Resuelva el sistema.

$$\left.\begin{aligned} x - y &= 2 \\ 2x - z &= 1 \\ y + z &= 3 \end{aligned}\right|$$

43. Resuelva el sistema.

$$\left.\begin{aligned} x - 2y + 1 &= 0 \\ x + 2y - 1 &= 2 \\ 2x - 4y + 2 &= 0 \end{aligned}\right|$$

44. Resuelva el sistema.

a) $$\left.\begin{aligned} x - y + 5z &= 3 \\ -3x + 3y - 15z &= 8 \\ 2x - y + z &= 2 \end{aligned}\right|$$

b) $$\left.\begin{aligned} 2x - y - \frac{1}{2}z &= 2 \\ x + y - 2z &= 3 \\ x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}z &= 5 \end{aligned}\right|$$

45. La suma de las tres cifras de un número es 16. Al sumarle 9 se intercambia la cifra de las unidades con la de las decenas y al sumarle 99 se intercambia la cifra de las unidades con la de las centenas. Encuentre este número.

46. Andrés, Arturo y Carlos juntan \$ 50.000. Si Andrés tiene la mitad del dinero de Arturo y tres veces el de Carlos, determine el dinero que posee cada uno.

47. Encuentre la medida de los ángulos interiores de un triángulo si el doble del primero menos el segundo es 81° y el triple del segundo, menos el tercero es 9º.

48. Entre Matías y Javier reúnen \$ 9.000 menos que lo que tiene Daniel. Si Javier le diera \$ 2.000 a Matías, tendrían lo mismo y si Daniel tuviera \$ 6.000 más, tendría el triple de lo que tiene Matías. Encuentre el capital de cada uno.

49. Determine la medida de los ángulos interiores de un triángulo si la suma del primero con el segundo, menos el tercero es 72° y el doble del primero menos la suma del segundo con el tercero es 168º.

50. Encuentre tres números sabiendo que su suma es 8. Si a la suma del doble del primero más el segundo se le resta el tercero da 3 y la suma de los dos primeros menos el triple del tercero es 4.

51. La suma de las edades de tres amigas es 80 años. Si la edad de Regina es el doble de la edad de Gloria más tres años y la edad de Susana es el doble de la edad de Gloria menos tres años, encuentre las edades de las tres.

52. Determine tres números tales que al sumar el primero con el doble del segundo se obtiene 4. El doble del tercero incrementado en 38, más el triple del primero es 4 y la suma de ellos es 22.

53. Determine tres números enteros tales que al sumar el primero con el tercero se obtiene 1. El doble del tercero más el triple del primero es -36 y la suma de los tres es 26.

54. Encuentre la medida de tres ángulos sabiendo que están en la razón $3:6:4$ y los dos primeros son suplementarios.

55. Tres compradores pagaron las siguientes facturas por compra de ropa en una tienda: el primero canceló \$ 60.700 por la compra de 5 camisas, 3 chalecos y dos pares de calcetines. El segundo canceló \$ 17.700 y compró una camisa, un chaleco y un par de calcetines. El tercero adquirió 2 camisas, 1 chaleco y dos pares de calcetines y pagó \$ 22.700.
Determine el valor de cada prenda.

Soluciones

1. a) L. I. b) L. I. c) L. I d) L. I. e) L. D. f) L. I. g) L. I. h) L. I.
i) L. I. j) L. D.
2. a) $\forall\, k \in \mathbb{R}$ b) $k \neq 1$ c) $\forall\, k \in \mathbb{R}$ d) $k \neq -1$
3. a) $k \neq \frac{1}{2}$ b) $k \neq 6$ c) $k \neq -1, 1$
4. Determinado: a, b, c, f, h; inconsistente: d, g, i.
5. a) Inconsistente b) Determinado c) Inconsistente d) Indeterminado
e) Indeterminado f) Determinado g) Determinado h) Indeterminado
i) Inconsistente j) Determinado
6. a) $(5, -11)$ Sí; $(1, 1)$ Sí; $(2, -2)$ Sí
b) $(1, 5)$ No; $(-7 -3)$ Sí; $(1, 29)$ No
c) $(-24, -5)$ No; $(-3, 1)$ Sí; $(-38, -9)$ No
d) $(-30, -23)$ Sí; $(20, 7)$ Sí; $(15, 9)$ No
e) $(-13, 6)$ No; $(-6, 1)$ Sí; $(8, -9)$ No
f) $(2, -5)$ Sí; $(50, 19)$ No; $(26, 7)$ No
7. a) $(-4, 4)$ b) $(-5, 4)$ c) $(-5, 3)$ d) $(5, 3)$ e) $(-6, 4)$ f) $(-7, 4)$
g) $(5, -5)$ h) $(-4, -1)$ i) $(4, -3)$ j) $(0, -5)$ k) $(-6, 3)$ l) $(-5, 4)$
m) $(-7, 2)$ n) $(-1, -4)$ o) $(5, 3)$ p) $(-5, -3)$ q) $(-8, 2)$ r) $(-4, 2)$
s) $(3, -4)$ t) $(-3, 2)$
8. a) $(-6, -3)$ b) $(-4, 1)$ c) $(2, -3)$ d) $(-4, 3)$ e) $(5, 3)$ f) $(-3, 5)$
g) $(-6, 3)$ h) $(-6, -4)$ i) $(3, -5)$ j) $(-1, -1)$ k) $(3, 3)$ l) $(3, 2)$
9. a) $(0, 1)$ b) $(4, -2)$ c) $(7, 2)$ d) $(4, 6)$ e) $(-6, -5)$ f) $(-1, -2)$
g) $(4, -1)$ h) $(-7, 3)$ i) $(-4, 2)$ j) $(-1, 0)$ k) $(-1, 2)$ l) $(-4, -1)$
10. a) $(-7, -4)$ b) $(1, 1)$ c) $(-1, 5)$ d) $(1, 4)$ e) $(-3, 6)$ f) $(0, -3)$

g) (0, 0) h) $\left(-\frac{2}{11}, \frac{7}{11}\right)$ i) (–3, 0) j) (5, –5) k) (– 6, 3) l) (2, 4)

11. a) $\left(\frac{53}{13}, \frac{3}{13}\right)$ b) (– 4, – 4) c) (–5, 3) d) (2, 0) e) (–2, –5) f) (0, 6)
g) (3, 0) h) (5, –1) i) (–2, 6) j) (0, –1) k) $\left(-\frac{2}{5}, 0\right)$ l) (4, –2)
m) (–6, 5)

12. a) $\left(\frac{6}{4}, -3\right)$ b) $\left(-3, \frac{1}{4}\right)$ c) $\left(1, -\frac{1}{4}\right)$ d) $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$ e) $\left(-1, -\frac{1}{4}\right)$ f) $\left(\frac{2}{3}, -1\right)$
g) (1, –3) h) $\left(4, \frac{3}{4}\right)$ i) $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ j) (1, 4) k) (3, –1) l) $\left(-\frac{3}{4}, 1\right)$

13. a) $\left(\frac{q}{1+pq}, \frac{1}{1+pq}\right)$ b) $\left(\frac{1}{pq}, \frac{1}{q}\right)$ c) $\left(\frac{b}{a}, \frac{b-1}{b}\right)$ d) $\left(\frac{a}{a^2-b^2}, \frac{-b}{a^2-b^2}\right)$

14. a) $\left(\frac{904}{541}, -\frac{998}{541}\right)$ b) $\left(\frac{-1.625}{871}, \frac{-1.183}{871}\right)$ c) $\left(\frac{6}{7}, \frac{109}{7}\right)$ d) $\left(\frac{-525}{736}, \frac{25}{92}\right)$
e) $\left(\frac{-561}{197}, \frac{1.089}{197}\right)$ f) $\left(\frac{-325}{353}, \frac{585}{353}\right)$ g) $\left(\frac{-3}{61}, \frac{53}{122}\right)$ h) $\left(\frac{-5}{14}, \frac{1}{3}\right)$
i) $\left(\frac{17}{44}, \frac{-101}{176}\right)$ j) $\left(\frac{-637}{696}, \frac{-1.729}{464}\right)$ k) $\left(\frac{160}{79}, \frac{-177}{158}\right)$ l) $\left(\frac{28}{313}, \frac{120}{313}\right)$

15. 403 y 205 **16.** 12 y 7 **17.** 25 **18.** 84
19. Ambos números son iguales a 15. **20.** 165 y 43
21. Tiene 15 monedas de \$ 100 y 9 de \$ 50 **22.** 13 **23.** 45
24. Eliana tiene 9 años, Miguel tiene 45 años. **25.** 243 y 81 **26.** 10 y 2
27. 21 y 19 **28.** Manuel tiene 59 años, Marcos tiene 11 años.
29. Ángela tiene 17 años, Sergio tiene 20 años. **30.** 40 y 20
31. 150,5 y 18,5 **32.** 24,5 y 15,5 **33.** 10 de \$ 100 y 11 de \$ 50
34. 98 **35.** Teresa tiene 25 años, Adolfo tiene 35 años.
36. 18 y 12 **37.** 31 **38.** Ximena tiene 52 años, Matías tiene 10 años.

39. a) (–1, 0, –2) b) (1, – 4, 1) c) (0, –1, 2) d) (2, 3, –3) e) (–5, –2, 1)
f) (– 4, –2, 2) g) (–1, –5, 2) h) (–2, 4, –1) i) (1, –2, –4) j) (–2, –5, 3)
k) (–4, –2, –2) l) (3, –2, 2) m) (–4, –3, –4) n) (–5, 0, –5) ñ) (2, 1, – 4)
o) (2, 3, 1, –1) p) (1, 2, 0, 3) q) (1, –1, 1, –1) r) (1, 0, 2, –2)

40. a) $\left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{18}, -\frac{1}{11}\right)$ b) $\left(-\frac{1}{2}, 6, 2\right)$ c) $\left(-\frac{5}{6}, -\frac{10}{47}, \frac{-10}{17}\right)$ d) $\left(\frac{22}{17}, \frac{11}{2}, -\frac{44}{23}\right)$
e) $\left(-4, \frac{-8}{41}, \frac{8}{15}\right)$ f) $\left(-\frac{29}{8}, \frac{-29}{9}, \frac{29}{5}\right)$ g) $\left(-\frac{2}{9}, \frac{2}{15}, -\frac{1}{2}\right)$ h) $\left(\frac{14}{17}, \frac{28}{11}, \frac{56}{43}\right)$
i) $\left(\frac{19}{5}, -2, -\frac{19}{6}\right)$ j) $\left(\frac{2}{5}, \frac{-12}{11}, \frac{-6}{5}\right)$ k) (2, 2, –1) l) $\left(\frac{1}{6}, \frac{-3}{8}, \frac{3}{11}\right)$
m) $\left(\frac{23}{19}, \frac{23}{29}, \frac{23}{60}\right)$ n) $\left(-51, \frac{-17}{5}, \frac{51}{55}\right)$ o) $\left(\frac{-18}{23}, 9, 3\right)$

41. a) i) $\forall\, k \neq \frac{5}{2}$ b) i) $k \neq -\frac{2}{5}$ sol. única c) i) Si $k \neq 3$ o $k \neq 7$ sol. única
ii) no existe k ii) no existe ii) no existe k
iii) $k = \frac{5}{2}$ iii) $k = -\frac{2}{5}$ iii) $k = 3$ o $k = 7$ no tiene sol.

42. (2, 0, 3)

43. El sistema tiene infinitas soluciones porque las ecuaciones 1 y 3 representan el mismo plano. Una solución es $(0, \frac{1}{2}, 1)$

44. a) El sistema no tiene solución porque las ecuaciones 1 y 2 representan planos paralelos.

b) El sistema no tiene solución porque las ecuaciones 1 y 3 representan planos paralelos.

45. 556 46. Andrés: \$ 15.000, Arturo: \$ 30.000 y Carlos: \$ 5.000

47. 57°, 33° y 90° 48. Matías \$ 19.000, Javier \$ 23.000 y Daniel \$ 51.000

49. 116°, 10° y 54° 50. −3, 10 y 1

51. Gloria 16 años, Regina 35 años, Susana 29 años.

52. −56, 30 y 48 53. −38, 25 y 39 54. 60°, 120° y 80°

55. Camisa \$ 4.200, Chaleco \$ 12.700 y Calcetín \$ 800

3.4.5 Inecuaciones con dos variables. Sistemas y problemas de programación lineal.

Una inecuación de la forma

$f(x, y) > 0$, $f(x, y) < 0$, $f(x, y) \geq 0$, $f(x, y) \leq 0$

es una relación que geométricamente representa un semiplano determinado por la recta, cuya ecuación es $f(x, y) = 0$.

Para determinar el semiplano solución se aplica el siguiente teorema:

Teorema:

Sea P un punto de uno de los semiplanos en que la recta representada por la ecuación $f(x, y) = 0$ divide al plano.

Si $f(x, y) > 0$ en P, entonces $f(x, y) > 0$ para todos los puntos que pertenecen al mismo semiplano de P.

En forma análoga se aplica para

$f(x, y) < 0$, $f(x, y) \geq 0$ o $f(x, y) \leq 0$

Si consideramos más de una relación de las formas señaladas estamos frente a un **sistema de inecuaciones de primer grado** y su solución será la intersección de los semiplanos, solución de las distintas inecuaciones que lo formen.

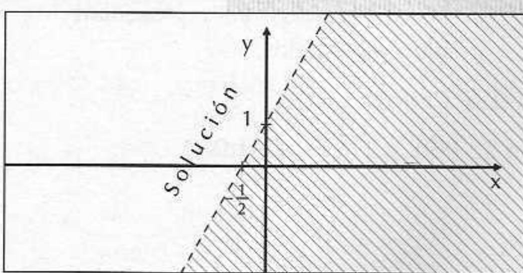
Una interesante aplicación de los sistemas de inecuaciones de primer grado son los problemas de **optimización o de programación lineal.** (Ver problemas 5 y 6, páginas 214 y 215.)

Ejercicios resueltos

1. Graficar el conjunto solución de la inecuación $2x - y + 1 < 0$

Solución:

Consideramos la ecuación $2x - y + 1 = 0$ y trazamos la recta que determina.



Consideremos el punto $P = (1, 1)$ en la inecuación dada:

$$2x - y + 1 < 0$$
$$2 \cdot 1 - 1 + 1 < 0$$
$$2 < 0 \quad F$$

Luego es solución el semiplano contrario al que pertenece P.

NOTA: Achuramos el semiplano que **no** es solución. Los puntos sobre la recta $2x - y + 1 = 0$, **no** son solución. Se usa dibujar esa recta discontinua.

2. Graficar el conjunto solución del siguiente sistema de inecuaciones.

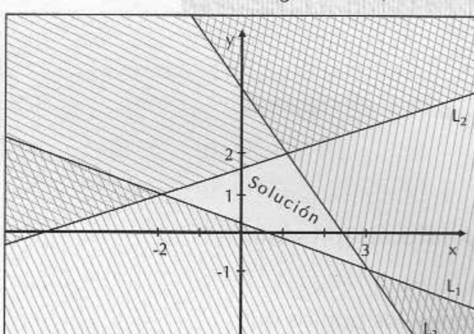
$$\left.\begin{array}{l} 2x + 5y - 1 \geq 0 \\ x - 3y + 5 \geq 0 \\ 3x + 2y - 7 \leq 0 \end{array}\right|$$

Consideremos las rectas

$L_1: 2x + 5y - 1 = 0$

$L_2: x - 3y + 5 = 0$

$L_3: 3x + 2y - 7 = 0$



Las graficamos y de la misma forma que elegimos el semiplano solución en el ejercicio anterior lo hacemos acá. Luego señalamos la intersección de los tres semiplanos.

3. Determinar el polígono que se forma al graficar las inecuaciones dadas y encontrar sus vértices.

$5x - 4y - 28 \leq 0$

$2x + 3y - 25 \leq 0$

$2x - 3y + 5 \geq 0$

$5x + 2y - 16 \geq 0$

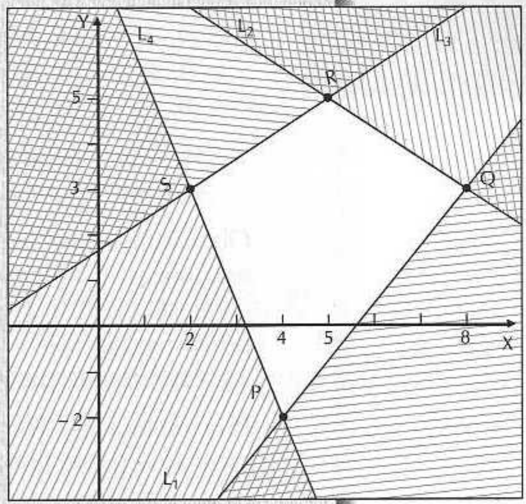
Solución:

Consideremos las rectas

$L_1: 5x - 4y - 28 = 0$ $\qquad L_3: 2x - 3y + 5 = 0$

$L_2: 2x + 3y - 25 = 0$ $\qquad L_4: 5x + 2y - 16 = 0$

Graficando las rectas y eligiendo el semiplano solución como en el problema 1 nos encontramos con el cuadrilátero P Q R S.



Resolviendo el sistema

$$\left.\begin{array}{l} L_1:\ 5x - 4y - 28 = 0 \\ L_2:\ 2x + 3y - 25 = 0 \end{array}\right|$$

Encontramos el punto Q = (8, 3)

Resolviendo el sistema

$$\left.\begin{array}{l} L_2:\ 2x + 3y - 25 = 0 \\ L_3:\ 2x - 3y + \ \ 5 = 0 \end{array}\right|$$

Encontramos el punto R = (5, 5)

Resolviendo el sistema

$$\left.\begin{array}{l} L_3:\ 2x - 3y + 5 \ \ = 0 \\ L_4:\ 5x + 2y - 16 = 0 \end{array}\right|$$

Encontramos el punto S = (2, 3)

Resolviendo el sistema

$$\left.\begin{array}{l} L_4:\ 5x + 2y - 16 = 0 \\ L_1:\ 5x - 4y - 28 = 0 \end{array}\right|$$

Encontramos el punto P = (4, –2)

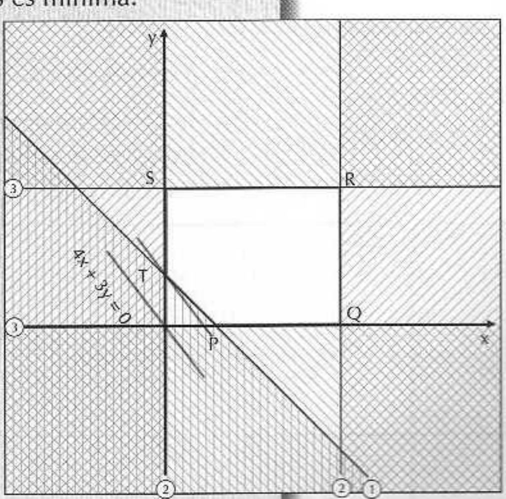
4. Se tiene una región del plano definida por las inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} 1 - x - y \leq 0 \\ 0 \ \leq \ x \leq 4 \\ 0 \ \leq \ y \leq 3 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

Determinar para qué punto (x, y) de la región dada, la función F(x, y) = 4x + 3y es máxima y para qué valores es mínima.

Solución:

Si graficamos la región obtenemos:



1 $\quad 1 - x - y \leq 0$

2 $\quad 0 \leq x \leq 4$

3 $\quad 0 \leq y \leq 3$

Todos los puntos de la región P Q R S T cumplen con las tres condiciones planteadas en el sistema de inecuaciones. Si evaluamos la función F(x, y) = 4x + 3y en los puntos P, Q, R, S, T y cualquier otro de la región F, es máxima para R y mínima para T.

En efecto: F(x, y) = 4x + 3y

P = (1, 0) F (1, 0) = 4
Q = (4, 0) F (4, 0) = 16
R = (4, 3) F (4, 3) = 4 • 4 + 3 • 3 = 25
S = (0, 3) F (0, 3) = 9
T = (0, 1) F (0, 1) = 3

$\therefore$ 4x + 3y es máxima si x = 4 e y = 3
4x + 3y es mínima si x = 0 e y = 1

Observamos que la recta 4x + 3y = 0 pasa por el origen. Para maximizar la función F(x, y) = 4x + 3y debemos hallar la recta paralela a 4x + 3y = 0 que intersecta al eje y en el mayor valor posible y que pase por la región dada. Ésta es la recta paralela a 4x + 3y = 0 que pasa por R.

Para minimizar F(x, y) = 4x + 3y debemos hallar la paralela a 4x + 3y = 0 que intersecte al eje y en el menor valor posible y ésta es la recta paralela a 4x + 3y = 0 que pasa por T.

5. En una fábrica se producen refrigeradores de dos tipos: corrientes y de lujo. Se trabaja en dos secciones, una de montaje, la cual dispone de un máximo de 120 horas de trabajo al día, y una de acabado, que dispone de 180 horas de trabajo diario. Para producir un refrigerador corriente se necesitan 3 horas de montaje y 3 de acabado. Para producir uno de lujo debe disponerse de 3 horas de montaje, pero 6 horas de acabado. La ganancia al producir un refrigerador corriente es de \$ 30.000 y al producir uno de lujo es de \$ 40.000. ¿Cuántos refrigeradores de cada tipo deben producirse diariamente para obtener ganancia máxima?

Solución:
La función que debemos maximizar es la función que expresa la ganancia.

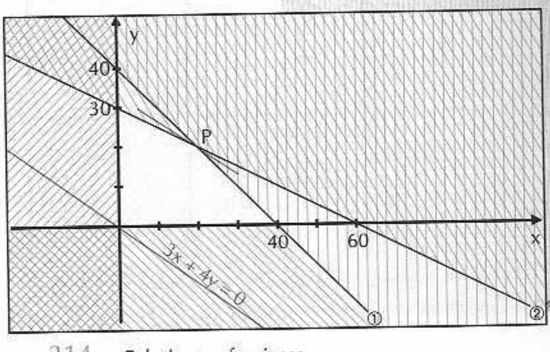
Supongamos que se producen x refrigeradores corrientes e y refrigeradores de lujo diariamente.

Luego, la ganancia será: 30.000x + 40.000y

F (x, y) = 30.000x + 40.000y

Veamos ahora qué restricciones debemos observar:

horas de montaje	$3x + 3y \leq 120$	(1)
horas de acabado	$3x + 6y \leq 180$	(2)
naturalmente	$x \geq 0,\ y \geq 0$	(3)



Graficando las restricciones (ver gráfico).

La recta F (x, y) = 30.000x + 40.000y = 0 que se puede escribir 3x + 4y = 0 nos da la dirección de maximización. Así vemos que en P la función F (x, y) es máxima.

Para hallar P debemos resolver el sistema.

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 3y = 120 \\ 3x + 6y = 180 \end{array}\right|$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 40 \\ x + 2y = 60 \end{array}\right|$$

$y = 20 \quad \wedge \quad x = 20$

Luego para que la ganancia sea máxima deben fabricarse 20 refrigeradores corrientes y 20 refrigeradores de lujo.

Si evaluamos la función, observamos que la ganancia es de \$ 1.400.000

F (x, y) = 30.000 • 20 + 40.000 • 20 = 1.400.000.

Se puede comprobar fácilmente que usando cualquier otro punto de la región, definida por las sustracciones, el valor de la función ganancia resultaría inferior a \$ 1.400.000.

6. En una plantación se ha detectado una enfermedad y para combatirla se necesita una mezcla que contenga como mínimo 15 partes de una sustancia A y 20 partes de otra sustancia B. En el mercado sólo se encuentran dos productos que pueden ser usados mezclados. Uno tipo "x", que contiene 1 parte de A y 5 partes de B y que cuesta \$ 1.000 el litro. Otro tipo "y", que contiene 5 partes de A y 2 partes de B y su valor es de \$ 3.000 el litro. ¿Qué çantidad se debe mezclar de cada uno para satisfacer las necesidades con un costo mínimo?

Solución:

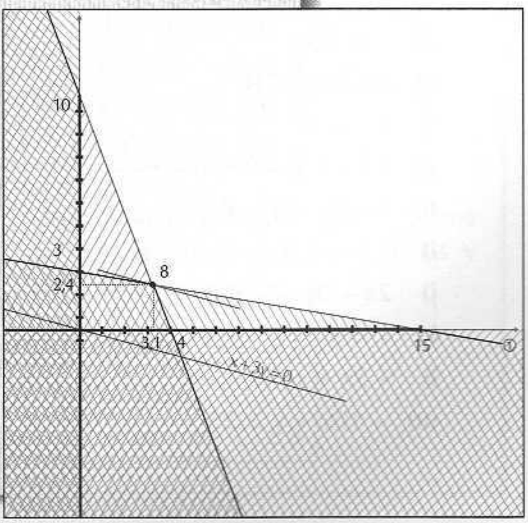
Sea x la cantidad de producto "x"
Sea y la cantidad de producto "y"

La función que queremos minimizar es la función que expresa el costo de la mezcla.

F (x, y) = 1.000x + 3.000 y.

Las restricciones que nos impone el problema son:

1. Debe haber a lo menos 15 partes de sustancia A en la mezcla.
   $x + 5y \geq 15$
2. Debe haber a lo menos 20 partes de sustancia B en la mezcla.
   $5x + 2y \geq 20$
3. Naturalmente $x \geq 0$ e $y \geq 0$
   Graficando las restricciones.



Ejercicios resueltos

La función $F(x, y) = 1.000x + 3.000y$ debe ser mínima.
Vemos que la ecuación $1.000x + 3.000y = 0$ o $x + 3y = 0$ nos da la dirección de minimización y la función se hace mínima en el punto P.
Para hallar las coordenadas de P debemos resolver el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + 5y &= 15 \\ 5x + 2y &= 20 \end{aligned}\right|$$

cuya solución es $x = \dfrac{70}{23} \approx 3{,}1$

$y = \dfrac{55}{23} \approx 2{,}4$

Luego para que el costo de la mezcla sea mínimo se debe adquirir 3,1 litros del producto tipo "x" y 2,4 litros del producto tipo "y".

Su costo es $F(3{,}1\ ;\ 2{,}4) = 1.000 \cdot 3{,}1 + 3.000 \cdot 2{,}4$

$= 3.100 + 7.200 = 10.300$

Si se evalúa la función costo en cualquier otro punto de la región definida por las restricciones, se verá que el costo es mayor que \$ 10.300.

Ejercicios

1. Trace la gráfica del conjunto solución de las siguientes inecuaciones con dos variables.

a) $2x + y - 10 < 0$

b) $x > 3{,}1$

c) $4x + 3y + 21 < 0$

d) $x < 1{,}3$

e) $2x - 3y > 18$

f) $x < 4{,}3$

g) $-7x + y - 9 < 0$

h) $x - 2y - 4 > 0$

i) $x > -1{,}9$

j) $2x - 8y > -8$

k) $x < 3$

l) $-3x + 6y \leq -24$

m) $-10x + y \geq 25$

n) $x - 3y < 9$

o) $x - y - 2 > 0$

2. Grafique la solución de cada uno de los siguientes sistemas de inecuaciones.

a) $$\left.\begin{aligned} 4x + 7y &< -5 \\ 2x - 9y + 1 &< 0 \\ x &> -2{,}7 \end{aligned}\right|$$

b) $$\left.\begin{aligned} 8x + 13y - 9 &> 0 \\ 9x - 5y + 16 &< 0 \\ x &< 2{,}5 \end{aligned}\right|$$

c) $$\left.\begin{aligned} 5x + 10y &< -15 \\ 3x - 6y - 9 &< 0 \\ x &< 3 \end{aligned}\right|$$

d)
$$\begin{cases} 6x + 5y - 7 > 0 \\ 9x - 4y > -2 \\ x > -2{,}9 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} 6x + 11y - 14 < 0 \\ 5x - 7y + 6 > 0 \\ x < 3{,}1 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} 3x + 5y + 1 > 0 \\ 5x - 12y - 23 > 0 \\ y + 3 > 0 \end{cases}$$

g)
$$\begin{cases} 6x + 6y + 12 > 0 \\ 9x - 8y - 4 > 0 \\ x - 3{,}3 < 0 \end{cases}$$

h)
$$\begin{cases} 10x + 11y - 5 \geq 0 \\ 9x - 8y - 4 < 0 \\ y \leq 2 \end{cases}$$

i)
$$\begin{cases} 2x + 3y - 2 > 0 \\ 4x - 3y + 8 > 0 \\ 2x + y - 2 < 0 \end{cases}$$

j)
$$\begin{cases} 6x + 8y < 0 \\ 9x - 11y - 8 < 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases}$$

3. Escriba a lo menos dos puntos que sean solución de cada uno de los siguientes sistemas de inecuaciones:

a)
$$\begin{cases} 6x + 10y < -6 \\ 5x - 11y > 13 \\ x + 3{,}1 > 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 6x + 6y + 18 > 0 \\ 5x - 3y > -4 \\ x < 4 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x + y < 0 \\ 7x - 10y > -15 \\ y + 2 > 0 \end{cases}$$

4. Determine cuál o cuáles de los puntos dados pertenecen al conjunto solución del sistema dado:

a)
$$\begin{cases} 10x + 10y + 20 > 0 \\ 3x - 13y + 5 < 0 \\ x + 4{,}1 > 0 \end{cases}$$

(1, 0), (0, 1), (1, –1), (–1, –1)
(–1, 1) (3, –3)

b)
$$\begin{cases} 4x + 13y + 11 < 0 \\ 7x - 9y + 3 > 0 \end{cases}$$

(0, 0), (2, 2), (1, –3), (–1, 5),
(–1, –1), (3, 0)

c)
$$\begin{cases} 7x + 4y > 6 \\ 9x - 9y + 27 < 0 \end{cases}$$

(0, 0), (2, 1), (3, 7), (3, –7), (0, 5),
(–3, –1)

5. Determine el polígono que se forma al graficar las inecuaciones dadas y encuentre sus vértices.

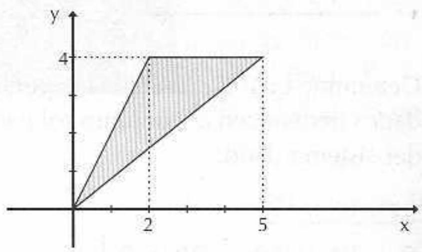
$$\begin{cases} 2x - y - 3 \leq 0 \\ x + 2y - 4 \leq 0 \\ x - 2y + 4 \geq 0 \\ x + 5y + 4 \geq 0 \end{cases}$$

6. Determine el polígono que se forma al graficar las inecuaciones dadas y determine sus vértices.

$$\begin{cases} 5x - 6y - 26 \leq 0 \\ 3x + 2y - 10 \leq 0 \\ 2x - y - 2 \geq 0 \end{cases}$$

Ejercicios

7. Considere la región del plano definida en el siguiente gráfico:



   a) Determine el sistema de inecuaciones que definen la región.

   b) Maximice la función
   $F(x, y) = 4x - 2y$

8. Maximice la función $F(x, y) = 3x + 2y$ sujeta a las siguientes condiciones.

   $5y - 7x \leq 10$
   $7x - 3y \leq 15$
   $3y - 2x \leq 10$
   $x \;\; 0, \;\; y \geq 0$

9. Maximice y minimice la función $F(x, y) = 4x + 5y$ en la región definida por:

   $12x + 3y \leq 120$
   $3x + 2y \leq 90$
   $x + 2y \leq 50$
   $x \geq 0, \;\; y \geq 0.$

10. Maximice la función $F(x, y) = 2x + 3y$ en la región definida por las restricciones siguientes:

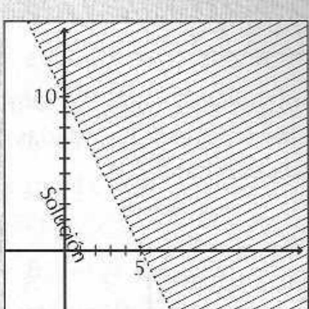
   $-6x + 5y - 10 \leq 0$
   $7x - 3y - 15 \leq 0$
   $2x - 3y + 10 \geq 0$
   $x \geq 0, \;\; y \geq 0$

11. Un artesano fabrica dos tipos de anillos. Para los del tipo A requiere 1 gr. de oro y 1,5 gr. de plata y los vende a \$ 4.000 cada uno. Para los del tipo B necesita 1,5 gr. de oro y 1 gr. de plata y los vende a \$ 5.000 cada uno. Si dispone de 750 gr. de oro y 750 gr. de plata, ¿cuántos anillos de cada tipo deberá fabricar para obtener el máximo de dinero por su venta?

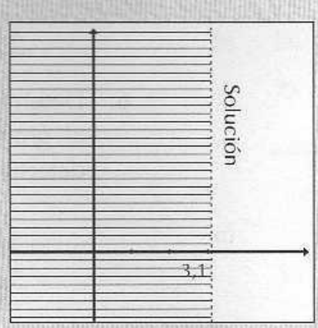
12. Se desea contratar movilización para trasladar a 400 personas y se dispone de las siguientes alternativas. Hay 8 buses con capacidad para 40 personas y cada uno cuesta \$ 12.000, y 10 buses con capacidad para 50 personas, con un valor de \$ 16.000 cada uno. Si se dispone sólo de 9 conductores para esa oportunidad, ¿cuántos buses de cada tipo convendría arrendar para que el viaje resulte lo más económico posible?

Soluciones

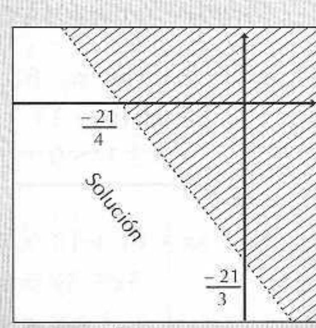
1. a)

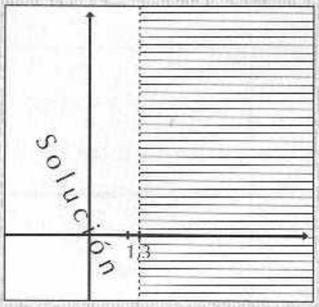


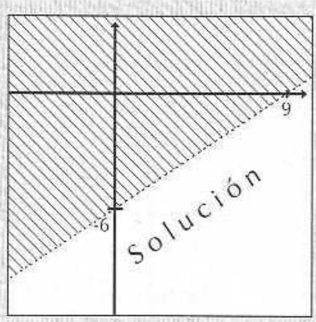
b)

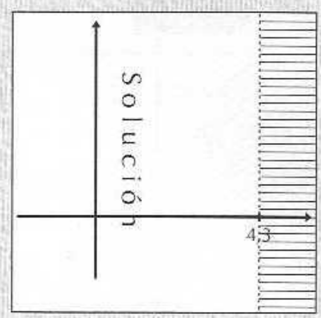


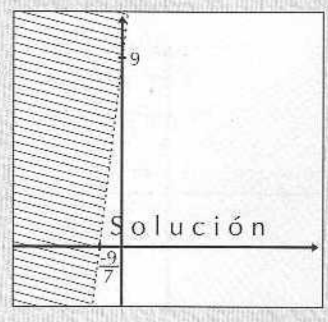
c)

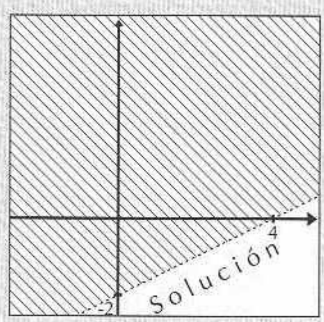


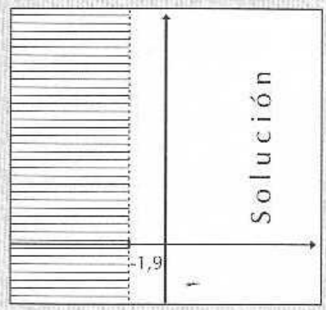
d) 

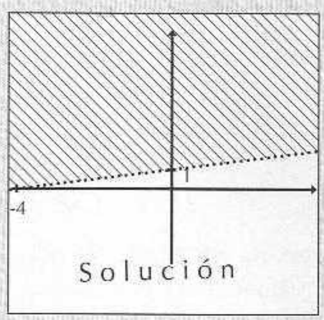
e) 

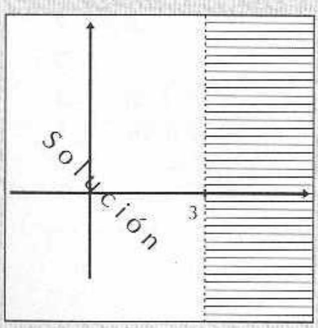
f) 

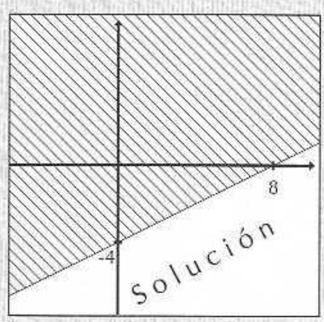
g) 

h) 

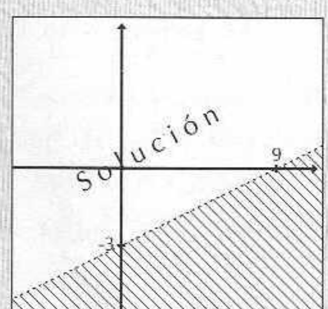
i) 

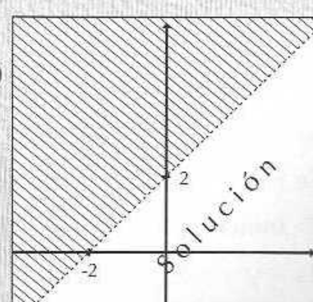
j) 

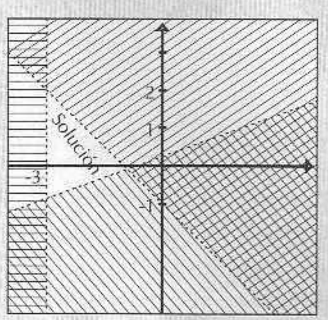
k) 

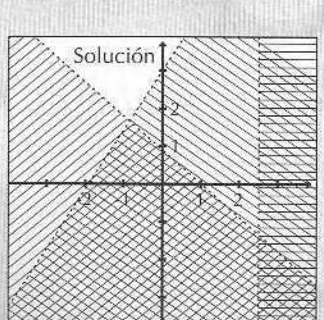
l) 

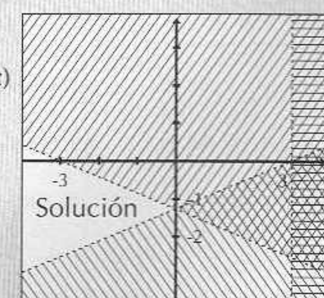
m) 

n) 

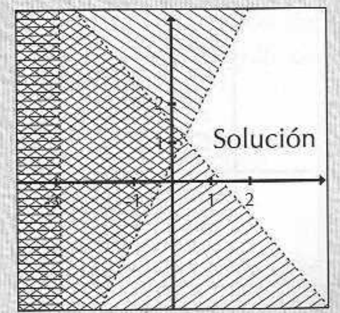
o) 

2. a) 

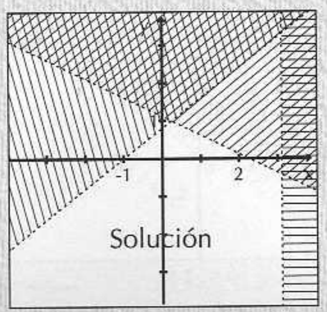
b) 

c) 

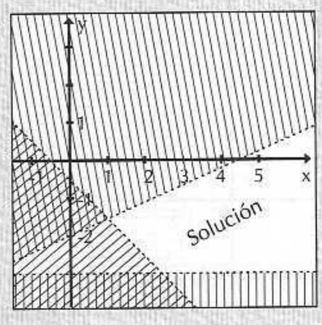
d)



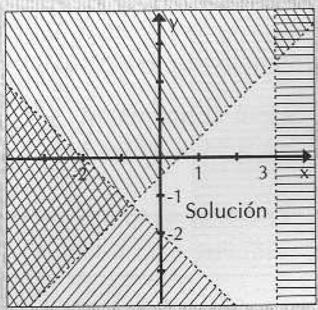
e)



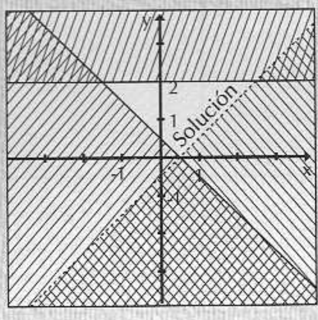
f)



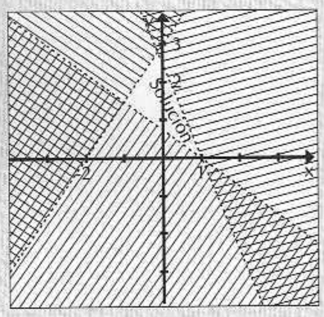
g)



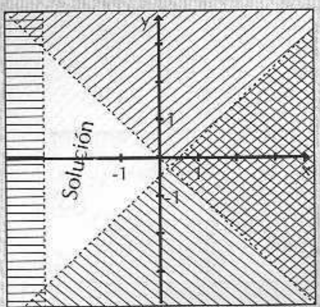
h)



i)



j)



3. a) Entre otros: (1, – 2) (0, – 5)   b) Entre otros: (0, 0) (3, 1)

   c) Entre otros: $\left(1, -\frac{3}{2}\right)$ (– 2, – 1)

4. a) Sólo (0, 1) (– 1, + 1)   b) (1, – 3), (– 1, – 1)   c) (3, 7) , (0, 5).

5. Se forma un cuadrilátero cuyos vértices son (1, – 1), (2, 1), (0, 2), (– 4, 0).

6. Se forma un triángulo cuyos vértices son: (– 2, – 6), (4, – 1) y (2, 2).

7. $\left.\begin{array}{r} 2x - y \geq 0 \\ 4x - 5y \leq 0 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{array}\right|$ F (x, y) = 4x – 2y es máxima para (5, 4) y vale 12.

8. F (x, y) = 3x + 2y y lo máximo para $x = 5,\ y = \frac{20}{3}$

9. F (x, y) = 4x + 5y es máxima para x = 4,3 y = 22,8 y es mínima para x = 0, y = 0.

10. F (x, y) = 2x + 3y es máxima para $x = 5,\ y = \frac{20}{3}$

11. 300 de cada tipo.

12. Hay que contratar 5 buses de capacidad 40 y 4 buses de capacidad 50.

Prueba de selección múltiple

1. Dadas las siguientes expresiones del lenguaje, son proposiciones.

I) Cuéntame un cuento
II) Gagarin voló a la Luna
III) La Tierra está en la vía láctea.

A. Sólo I
B. Sólo II
C. Sólo III
D. Sólo I y II
E. Sólo II y III

2. La función proposicional "x no es múltiplo de 3" es falsa si x vale:

A. 1
B. 2
C. 3
D. 4
E. 5

3. Sea A= {1, 2, 3, 4} y B= {1, 2, 3}.

De las siguientes proposiciones son verdaderas:

p: $(\forall n \in A)\ (\exists m \in B)\ (m + n) \in A$

q: $(\forall n \in A)\ (\forall m \in B)\ (n - m + 1) \in A$

r: $(\forall n \in A)\ (\exists m \in B)\ (n - m + 1) \in A$

A. Sólo p
B. Sólo q
C. Sólo r
D. Sólo p y r
E. p, q y r

4. Sean $p = n + m$ es par y $q = m - n$ es par, dos funciones proposicionales en el conjunto de los números enteros. De las proposiciones siguientes son verdaderas:

I) $p \Rightarrow q$
II) $q \Rightarrow p$
III) $\sim p \Rightarrow q$

A. Sólo I
B. Sólo II
C. Sólo I y II
D. Sólo I y III
E. Sólo II y III

5. Sea p (x) : x es solución de la ecuación $x^2 - 1 = 0$. Sea E = {–1, 0, 1}. De las proposiciones siguientes son falsas:

I) $(\forall x \in E),\ p(x)$
II) $(\exists x \in E),\ p(x)$
III) $(\exists x \in E),\ \sim p(x)$

A. Sólo I
B. Sólo II
C. Sólo III
D. Sólo I y II
E. Sólo II y III

6. Sean

p(x) : x es menor que 3
q(x) : x es mayor que 1.
De las proposiciones siguientes son verdaderas:

I) $(\exists x \in \mathbb{N}),\ p(x) \wedge q(x)$
II) $(\forall x \in \mathbb{N}),\ p(x) \vee q(x)$
III) $(\exists x \in \mathbb{N}),\ \sim p(x) \wedge \sim q(x)$

A. Sólo I
B. Sólo II
C. Sólo III
D. Sólo I y II
E. Sólo I, II y III

7. Dado el conjunto A = {1, 2, 3}, entonces:

A. $1 \notin A$
B. $2 \subset A$
C. $\{3\} \in A$
D. $\varnothing \in A$
E. $\{1\} \subset A$

8. Sea
$A = \{x \in \mathbb{N} / x > 1 \wedge x \leq 4\}$.
Determinar cuál de las siguientes proposiciones es falsa:

A. $1 \notin A$
B. $2 \in A$
C. $4 \notin A$
D. $5 \notin A$
E. $3 \in A$

9. Sean
A = {factores de 12}
B = {factores de 18}

Determinar cuál de las siguientes proposiciones es verdadera:

A. $4 \in A \wedge 4 \notin B$
B. $2 \in A \wedge 2 \notin B$
C. $9 \in A \wedge 9 \notin B$
D. $6 \in A \wedge 6 \notin B$
E. $9 \in A \wedge 9 \in B$

10. A = {1, 2, 3}
La cardinalidad del conjunto potencia de A es:

A. 2
B. 3
C. 4
D. 8
E. 16

11. El conjunto

$F = \{n\,(n+1) - 1 / n \in \mathbb{N},\ n < 6\}$, escrito por extensión es:

A. {1, 5, 11, 19, 29, 41}
B. {1, 5, 11, 19, 29}
C. {0, 1, 5, 11, 19}
D. {0, 1, 5, 11, 19, 29}
E. {–1, 1, 5, 11, 19}

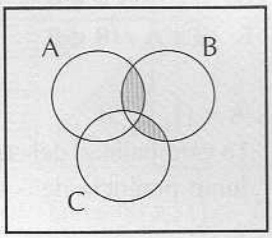
Prueba de selección múltiple

12. Si A = {7, 13, 19, 25, 31}. ¿Cuál de los siguientes conjuntos es distinto de A?

A. $\{7n - (n - 1) / n \in \mathbb{N}, n \leq 5\}$
B. $\{6n + 1 / n \in \mathbb{N}, n \leq 5\}$
C. $\{8n - (2n - 1) / n \in \mathbb{N}, n \leq 5\}$
D. $\{5n + (n + 1) / n \in \mathbb{N}, n \leq 5\}$
E. $\{4n + (2n - 1) / n \in \mathbb{N}, n \leq 5\}$

13. ¿Cuál de las siguientes proposiciones representa la parte coloreada del diagrama?

I) $(A \cap B) - (B \cap C)$
II) $[B \cap (A \cup C)] - (A \cap C)$
III) $[(B \cap C) \cup (A \cap B)] - (A \cap C)$



A. Sólo I
B. Sólo II
C. Sólo III
D. Sólo I y II
E. Sólo II y III

14. La expresión $(A \cap B) - (B \cap C)$ es equivalente a:

A. $A' \cap B \cap C$
B. $A \cap B' \cap C$
C. $A \cap B \cap C'$
D. $A \cup (B \cap C)$
E. $(A \cup B) \cap C$

15. Si $\#A = 4$ y $\#B = 7$ y $\#A \cap B = 3$, entonces $\#A \cup B$ es:

A. 4
B. 7
C. 8
D. 9
E. 11

16. Sea
$A = \{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x \leq 2\}$
$B = \{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x \leq 5\}$
$C = \{x \in \mathbb{R} / 1 < x \leq 7\}$

El conjunto $(A \cap B) - C$ es:

A. $\{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x < 1\}$
B. $\{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x \leq 1\}$
C. $\{x \in \mathbb{R} / 1 < x \leq 2\}$
D. $\{x \in \mathbb{R} / 1 \leq x < 2\}$
E. $\{x \in \mathbb{R} / 0 < x < 1\}$

17. Si $A \subset B$ y $\#B = 12$ y $\#A = 6$, entonces $\#A \cap B$ es:

A. 6
B. 12
C. 18
D. 24
E. No se puede determinar

18. Se ha consultado a 28 personas por el consumo de 3 productos A, B y C, obteniéndose el siguiente resultado:

3 consumen A, B y C
7 consumen A y C
6 consumen B y C
5 consumen A y B
5 consumen sólo A
7 consumen sólo B

¿Cuántas personas consumen el producto C?

A. 4
B. 8
C. 10
D. 14
E. 16

19. Sean A = {1, 2, 3}
B = {5, 6, 7}
De las siguientes relaciones, ¿cuáles son de A en B?

I {(1, 5) (2, 7) (1, 7)}
II {(5, 1) (6, 1)}
III {(3, 5) (3, 6) (3, 7)}

A. Sólo I
B. Sólo II
C. Sólo III
D. Sólo I y II
E. Sólo I y III

20. Sean A = {2, 4, 6} y B = {1, 3, 5, 7}.
La relación $R : A \rightarrow B$ se define por:
$R = \{(x, y) / y = x - 1\}$.
Entonces R=

A. {(3, 2) (5, 4) (7, 6)}
B. {(2, 1) (4, 5) (6, 7)}
C. {(2, 1) (4, 3) (6, 5)}
D. {(2, 3) (4, 5) (6, 7)}
E. {(1, 2) (3, 4) (5, 6)}

21. Sea R la relación en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por $R = \{(x, y) / x \geq 2y\}$
Son pares de esta relación:

I) (5, 3)
II) (5, 1)
III) (5, 2)

A. Sólo I
B. Sólo I y II
C. Sólo I y III
D. Sólo II y III
E. I, II y III

22. En la relación $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $R = \{(x, y) / 2x + y \leq 10\}$, el dominio y el recorrido son respectivamente:

A. $\{1, 2, 3, 4\}$
$\{2, 4, 6, 8\}$

B. $\{1, 2, 3, 4\}$
$\{1, 2, 3, 4, 5\}$

C. $\{1, 2, 3, 4\}$
$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

D. $\{2, 4, 6, 8\}$
$\{1, 2, 3, 4\}$

E. $\{1, 2, 3, 4, 8, 6, 7, 8\}$
$\{1, 2, 3, 4\}$

23. Si $R = \{(3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1)\}$ entonces R^{-1} es

A. $\{(3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1)\}$

B. $\{(3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2)\}$

C. $\{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)\}$

D. $\{(2, 3), (2, 4), (2,5), (2, 6)\}$

E. $\{(3,3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

24. Si $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ / x es el doble de y$\}$, entonces R^{-1} es:

A. $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ / x es el doble de y$\}$

B. $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ / x es la mitad de y$\}$

C. $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ / y es la mitad de x$\}$

D. $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ / y es x más 2$\}$

E. $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ / y es x menos 2$\}$

25. De las siguientes relaciones en $\mathbb{N}$, cuál de ellas es refleja.

A. $x R y \Leftrightarrow x \cdot y \leq 0$

B. $x R y \Leftrightarrow x \cdot y = x^2$

C. $x R y \Leftrightarrow x - y = 2$

D. $x R y \Leftrightarrow x + y$ es impar

E. $x R y \Leftrightarrow x + y = 12$

26. De las siguientes relaciones en $\mathbb{N}$, determine cuál de ellas es de equivalencia

A. $x S y \Leftrightarrow x + y$ es par
B. $x S y \Leftrightarrow y = 2x$
C. $x S y \Leftrightarrow x > y$
D. $x S y \Leftrightarrow x < y$
E. $x S y \Leftrightarrow 2x < y$

27. Sea $A = \{2, 5, 6, 9\}$ y $R = \{(9, 2), (9, 9), (6, 6), (2, 9), (2, 2), (5, 5)\}$ una relación de equivalencia en A. Entonces la clase del 9 es:

A. $\{2\}$
B. $\{9\}$
C. $\{2, 9\}$
D. $\{5, 6\}$
E. $\{2, 5\}$

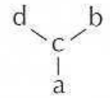
28. De las siguientes relaciones en $\mathbb{N}$, determine cuál de ellas es una relación de orden.

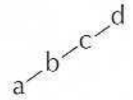
A. $x R y \Leftrightarrow x$ divide a y
B. $x R y \Leftrightarrow x + y = 2$
C. $x R y \Leftrightarrow x + y$ es par
D. $x R y \Leftrightarrow x = 2y$
E. $x R y \Leftrightarrow x$ es menor que y

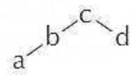
29. Sea $A = \{a, b, c, d\}$ y S la relación de orden en A definida por:

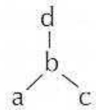
$S = \{(a, a) (c, c) (b, b) (a, c) (c, b) (a, b) (d, d) (c, d) (a, d)\}$

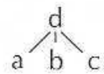
El diagrama de orden definido por S es:

A. 

B. 

C. 

D. 

E. 

30. La relación R en $A = \{1, 2, 3\}$ definida por $R = \{(3,2) (2,3) (3,3)\}$ es:

A. Refleja y transitiva.
B. Refleja y simétrica.
C. Simétrica y transitiva.
D. Refleja y antisimétrica.
E. Transitiva y antisimétrica.

31. De las relaciones siguientes en $A = \{1, 2, 3\}$, cuáles de ellas son funciones:

$f_1 = \{(1,1) (2,2) (3,3)\}$
$f_2 = \{(1,1) (2,1) (3,1)\}$
$f_3 = \{(1,2) (2,3) (3,1)\}$

A. Sólo f_1
B. Sólo f_1 y f_2
C. Sólo f_2 y f_3
D. Sólo f_1 y f_3
E. f_1, f_2 y f_3

Prueba de selección múltiple

32. En la función de $A = \{1, 2, 3\}$ en $B = \{4, 5, 6,\}$ definida por $f = \{(1,4)\ (2,4)\ (3,4)\}$, el dominio y el rango son:

A. $\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}$
B. $\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}$
C. $\{1, 2, 3\}, \{5, 6\}$
D. $\{1, 2, 3\}, \{4, 6\}$
E. $\{1, 2, 3\}, \{4\}$

33. Dada la función real $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, la imagen de 1 es:

A. 2
B. 1
C. 0
D. –1
E. –2

34. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \\ x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

¿Cuál de las siguientes proposiciones es falsa?

A. $2 \in \text{Dom } f$
B. $2 \in \text{Rang } f$
C. $f(2) = 3$
D. $f(1) = 0$
E. $f(3) = 4$

35. Dadas las funciones reales $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 2x + 3$. La fórmula que define $(g \circ f)(x)$ es:

A. $2x^2 - 1$
B. $2x^2 + 3$
C. $2x^2 + 1$
D. $x^2 + 3x + 2$
E. $4x^2 + 12x + 8$

36. Si $f(x) = x^2 - 4x + 4$ define una función real; 1 es imagen de:

A. Sólo 1
B. Sólo 3
C. 1 y 3
D. Sólo 0
E. –1 y –3

37. Si

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq -1 \\ -x + 1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ -1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

define una función real; su rango es:

A. $(-\infty, -1]$
B. $[-1, 0]$
C. $[-1, 2]$
D. $[0, 2] \cup \{-1\}$
E. $[2, +\infty)$

38. La recta que pasa por los puntos (1, 2) y (-3, 1) tiene por ecuación:

A. $x - 4y + 9 = 0$
B. $x + 4y - 9 = 0$
C. $x + 4y + 7 = 0$
D. $x - 4y - 7 = 0$
E. $x - 4y + 7 = 0$

39. La recta cuya ecuación es $2y - x + 1 = 0$ intersecta al eje x Y al eje y En los puntos:

A. –1 y –1
B. –1 y 1
C. $-\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{2}$
D. 1 y $-\frac{1}{2}$
E. $-\frac{1}{2}$ y 1

40. La recta cuya pendiente es –2 y que pasa por el punto (1, 1) tiene por ecuación:

A. $2x + y - 3 = 0$
B. $2x - y + 3 = 0$
C. $2x - y - 3 = 0$
D. $2x + y - 4 = 0$
E. $2x + y + 4 = 0$

41. De los tríos de puntos siguientes son colineales:

I (3, 2) (1, 0) (–1, –2)
II (6, 1) (3, 2) (3, 4)
III (3, 1) (4, 3) (5, 7)

A. Sólo I
B. Sólo II
C. Sólo III
D. Sólo I y II
E. Sólo II y III

42. De las ecuaciones siguientes, la que representa una recta paralela a la recta $x - 2y + 3 = 0$ es:

A. $2y + x + 3 = 0$
B. $2y - x - 6 = 0$
C. $2y + x + 6 = 0$
D. $y + 2x - 3 = 0$
E. $y + 2x + 6 = 0$

43. Una recta perpendicular a la recta de ecuación $3x - y + 1 = 0$ es la representada por:

A. $3x + y + 3 = 0$
B. $3y - x - 2 = 0$
C. $3y - x + 2 = 0$
D. $3y + x + 2 = 0$
E. $3x + y - 1 = 0$

44. En $kx - x + y + 3 = 0$ el valor de k para que la ecuación represente a una recta que pasa por el punto (1, –3) es:

A. 0
B. 1
C. 2
D. – 1
E. – 2

45. La pendiente de la recta que pasa por los puntos (3, 5) y (– 2, 1) es:

A. 4
B. 5
C. $\frac{4}{5}$
D. $\frac{5}{4}$
E. $-\frac{4}{5}$

46. De las siguientes rectas, pasan por el origen:

I) $x + 2y - 1 = 1$
II) $3x + 2y + 2 = 2$
III) $x - 5y = 0$

A. Sólo I
B. Sólo II
C. Sólo II y III
D. Sólo I y III
E. I, II y III

47. La ecuación de la recta paralela al eje X que pasa por el punto (4, –1) es:

A. $x - 1 = 0$
B. $x + 1 = 0$
C. $y - 1 = 0$
D. $y + 1 = 0$
E. $x + y = 1$

48. La ecuación de la recta perpendicular al eje Y que pasa por el punto (–3, –4) es:

A. $y - 4 = 0$
B. $y + 4 = 0$
C. $x + 4 = 0$
D. $x - 4 = 0$
E. $x - y = 4$

49. La ecuación de la familia de rectas que tiene pendiente $\frac{2}{3}$ es:

A. $2x + 3y + k = 0$
B. $3x - 2y + k = 0$
C. $2x - 3y + k = 0$
D. $-2x - 3y + k = 0$
E. $3x + 2y + k = 0$

50. De las siguientes funciones en A = {4, 6, 8} determinar cuál o cuáles son biyectivas.

I) $f_1 = \{(4, 4)\ (6, 6)\ (8, 8)\}$
II) $f_2 = \{(4, 6)\ (6, 6)\ (8, 6)\}$
III) $f_3 = \{(4, 6)\ (6, 8)\ (8, 4)\}$

A. Sólo f_1
B. Sólo f_3
C. Sólo f_1 y f_2
D. Sólo f_2 y f_3
E. Sólo f_1 y f_3

51. La función inversa de la función real

$f(x) = \frac{2x - 1}{x + 3}$

A. $f^{-1}(x) = \frac{3x - 1}{2 - x}$
B. $f^{-1}(x) = \frac{3x + 1}{2 - x}$
C. $f^{-1}(x) = \frac{3x + 1}{x - 2}$
D. $f^{-1}(x) = \frac{3x - 1}{x - 2}$
E. $f^{-1}(x) = \frac{x - 3}{x - 2}$

52. La función inversa de la función real

$f(x) = 3x + 5$ es:

A. $f^{-1}(x) = 3(x - 5)$
B. $f^{-1}(x) = 3x - 5$
C. $f^{-1}(x) = \frac{(x - 5)}{3}$
D. $f^{-1}(x) = \frac{x}{3} - 5$
E. $f^{-1}(x) = \frac{(x + 5)}{3}$

53. La solución del sistema

$$\left.\begin{array}{l} 2x - y - 5 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{array}\right| \text{ es:}$$

A. (–1, –3)
B. (1, –3)
C. (–1, 3)
D. (3, 1)
E. (–3, –1)

54. Los valores de p y q para que la solución del sistema

$$\left.\begin{array}{l} x - 2py - 5 = 3 \\ qx + 1 - 2y = 3 \end{array}\right|$$

sea (4, 3) son respectivamente:

A. $\frac{2}{3}$ y 2
B. 2 y $\frac{2}{3}$
C. $-\frac{2}{3}$ y -2
D. -2 y $-\frac{2}{3}$
E. $-\frac{2}{3}$ y 2

55. El valor de k para que el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 5x - y + 3 = 0 \\ 2kx + 3y - 1 = 0 \end{array}\right|$$

no tenga solución es:

A. –15
B. 15
C. 2
D. –2
E. $-\frac{15}{2}$

56. La solución (x, y) del sistema

$$\left.\begin{array}{l} 2ax - by + 2 = 0 \\ ax + 2by + 1 = 0 \end{array}\right| \text{ es:}$$

A. $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$
B. $\left(\frac{1}{a}, 0\right)$
C. $\left(-\frac{1}{a}, -\frac{1}{b}\right)$
D. $\left(-\frac{1}{a}, 0\right)$
E. $\left(-\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$

Prueba de selección múltiple

57. La solución del sistema

$$\begin{array}{r} x + y - z + 2u = \ \ 2 \\ x + 2y - z - u = -1 \\ 2x - y + 2z - 3u = \ \ 1 \\ -x - 2y + z + 3u = \ \ 3 \end{array}$$

es:

A. (0, 1, 1, 1)
B. (1, 0, 1, 1)
C. (1, 1, 0, 1)
D. (1, 1, 1, 0)
E. (1, 1, 1, 1)

58. ¿Son soluciones de la inecuación $x - 2y + 5 \geq 0$ los siguientes puntos?

I) (1, 2)
II) (3, 4)
III) (–1, 2)

A. Sólo I
B. Sólo II
C. Sólo III
D. I, II y III
E. ninguno

59. Son soluciones del sistema

$$\begin{array}{r} 2x + y - 1 \geq 0 \\ x - 2y \leq 0 \\ x - 3 \leq 0 \end{array}$$

I) (2, 1)
II) (3, – 5)
III) (2, 3)

A. Sólo I
B. Sólo II
C. Sólo III
D. Sólo I, y III
E. I, II y III

60. Considerando las restricciones

$$\begin{array}{r} 2x + y - 1 \geq 0 \\ -x + 2y \leq 0 \\ x \leq 3 \end{array}$$

la función F (x, y) = x + y es máxima para:

A.	3	1,5
B.	3	0
C.	2	3
D.	3	2
E.	1,5	3

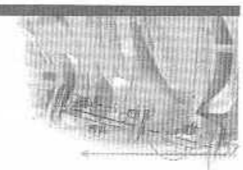
Soluciones

1. E	2. C	3. C	4. C	5. A	6. D	7. E	8. C
9. A	10. D	11. B	12. E	13. E	14. C	15. C	16. B
17. A	18. D	19. E	20. C	21. D	22. C	23. C	24. B
25. B	26. A	27. C	28. A	29. A	30. C	31. E	32. E
33. C	34. B	35. C	36. C	37. D	38. E	39. D	40. A
41. A	42. B	43. D	44. B	45. C	46. C	47. D	48. B
49. C	50. E	51. A	52. C	53. D	54. E	55. E	56. D
57. B	58. D	59. D	60. A				

CAPÍTULO 4

Ecuaciones e inecuaciones de segundo grado

Ecuación cuadrática 4.1



La expresión $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números reales cualesquiera y $a \neq 0$, se llama ecuación cuadrática o ecuación de segundo grado.

La solución de esta ecuación puede obtenerse por factorización o aplicando la fórmula general.

Todas las ecuaciones de segundo grado tienen dos soluciones.

4.1.1. Solución de la ecuación por factorización

Aplicamos aquí la siguiente propiedad:

$a \bullet b = 0 \leftrightarrow a = 0 \text{ o } b = 0$

(si el producto de dos números reales es cero, entonces al menos uno de ellos es cero).

Ejercicios resueltos

1. Resolvamos la ecuación: $x^2 - 3x = 0$

Factorizando obtenemos:

$$x^2 - 3x = 0$$
$$x(x - 3) = 0$$

y aplicando la propiedad indicada, nos queda:

$$x = 0 \text{ o } x - 3 = 0$$

de donde obtenemos las soluciones

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 3$$

Ejercicios resueltos

2. Resolvamos $5x^2 + 11x = 0$

Factoricemos y apliquemos la propiedad:

$$5x^2 + 11x = 0 \;\Rightarrow x\,(5x + 11) = 0$$
$$\Rightarrow x = 0 \;\text{ o }\; 5x + 11 = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = 0 \;;\; x_2 = -\frac{11}{5}$$

3. Resolvamos $x^2 - 64 = 0$

La factorización correspondiente es:

$$x^2 - 64 = 0 \;\Rightarrow (x - 8)\,(x + 8) = 0$$
$$\Rightarrow x - 8 = 0 \;\text{ o }\; x + 8 = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = 8 \;;\; x_2 = -8$$

4. Resolvamos $x^2 - 5 = 0$

Factorizando como suma por diferencia nos queda:

$$x^2 - 5 = 0 \;\Rightarrow (x - \sqrt{5})\,(x + \sqrt{5}) = 0$$
$$\Rightarrow x - \sqrt{5} = 0 \;\text{ o }\; x + \sqrt{5} = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = \sqrt{5} \;;\; x_2 = -\sqrt{5}$$

5. Resolvamos $x^2 - x - 30 = 0$

Procediendo como antes:

$$x^2 - x - 30 = 0 \;\Rightarrow (x - 6)\,(x + 5) = 0$$
$$\Rightarrow x - 6 = 0 \;\text{ o }\; x + 5 = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = 6 \;;\; x_2 = -5$$

Impares

$(9x-9)(9x+9)$

$9x-9=0$

Ejercicios

Resuelva aplicando **factorización:**

1. $x^2 - 7x = 0$	**10.** $5x^2 + 24x = 0$	**19.** $x^2 - 121 = 0$	**28.** $9x^2 - 16 = 0$
2. $x^2 - 13x = 0$	**11.** $-9x^2 + x = 0$	**20.** $x^2 - 4 = 0$	**29.** $x^2 - 15 = 0$
3. $x^2 + 20x = 0$	**12.** $x^2 + x = 0$	**21.** $x^2 - 9 = 0$	**30.** $x^2 - 3 = 0$
4. $x^2 + 19x = 0$	**13.** $-x^2 + x = 0$	**22.** $x^2 - 100 = 0$	**31.** $x^2 - 11 = 0$
5. $-x^2 + 6x = 0$	**14.** $11x^2 - x = 0$	**23.** $x^2 - 49 = 0$	**32.** $6x^2 - 24 = 0$
6. $-x^2 - 9x = 0$	**15.** $x^2 - 25 = 0$	**24.** $2x^2 - 50 = 0$	**33.** $2x^2 - 6 = 0$
7. $7x^2 - 5x = 0$	**16.** $x^2 - 36 = 0$	**25.** $3x^2 - 12 = 0$	**34.** $4x^2 - 3 = 0$
8. $13x^2 + 2x = 0$	**17.** $x^2 - 1 = 0$	**26.** $5 - 5x^2 = 0$	**35.** $49x^2 - 1 = 0$
9. $20x^2 - 4x = 0$	**18.** $x^2 - 16 = 0$	**27.** $4x^2 - 1 = 0$	**36.** $x^2 - 5x + 6 = 0$

37. $x^2 - 6x + 5 = 0$

38. $x^2 - x - 12 = 0$

39. $x^2 + 7x - 18 = 0$

40. $x^2 - 11x + 30 = 0$

41. $x^2 - 9x - 22 = 0$

42. $x^2 + 5x - 24 = 0$

43. $x^2 + 3x - 28 = 0$

44. $x^2 - 9x + 8 = 0$

45. $x^2 + 15x + 36 = 0$

46. $x^2 + 11x + 30 = 0$

47. $x^2 - x - 20 = 0$

48. $x^2 - 13x + 42 = 0$

49. $x^2 + 10x + 21 = 0$

50. $x^2 + 14x + 45 = 0$

51. $x^2 + 9x - 36 = 0$

52. $x^2 - 5x - 36 = 0$

53. $x^2 + 15x - 16 = 0$

54. $x^2 - 9x + 20 = 0$

55. $y^2 - y - 2 = 0$

56. $y^2 - 13y + 40 = 0$

57. $y^2 + 8y + 12 = 0$

58. $y^2 + 10y + 24 = 0$

59. $x^2 - 12x + 36 = 0$

60. $x^2 + 2x + 1 = 0$

61. $x^2 - 6x + 9 = 0$

62. $x^2 - 8x + 16 = 0$

63. $x^2 + 18x + 81 = 0$

64. $x^2 - 10x + 25 = 0$

65. $4x^2 + 4x + 1 = 0$

66. $9x^2 - 12x + 4 = 0$

67. $9x^2 - 6x + 1 = 0$

68. $4x^2 + 20x + 25 = 0$

69. $9x^2 + 24x + 16 = 0$

70. $16x^2 - 24x + 9 = 0$

Soluciones

1. $x_1 = 0 \quad x_2 = 7$
2. $x_1 = 0 \quad x_2 = 13$
3. $x_1 = 0 \quad x_2 = -20$
4. $x_1 = 0 \quad x_2 = -19$
5. $x_1 = 0 \quad x_2 = 6$
6. $x_1 = 0 \quad x_2 = -9$
7. $x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{5}{7}$
8. $x_1 = 0 \quad x_2 = -\frac{2}{13}$
9. $x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{1}{5}$
10. $x_1 = 0 \quad x_2 = -\frac{24}{5}$
11. $x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{1}{9}$
12. $x_1 = 0 \quad x_2 = -1$
13. $x_1 = 0 \quad x_2 = 1$
14. $x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{1}{11}$
15. $x_1 = 5 \quad x_2 = -5$
16. $x_1 = 6 \quad x_2 = -6$
17. $x_1 = 1 \quad x_2 = -1$
18. $x_1 = 4 \quad x_2 = -4$
19. $x_1 = 11 \quad x_2 = -11$
20. $x_1 = 2 \quad x_2 = -2$
21. $x_1 = 3 \quad x_2 = -3$
22. $x_1 = 10 \quad x_2 = -10$
23. $x_1 = 7 \quad x_2 = -7$
24. $x_1 = 5 \quad x_2 = -5$
25. $x_1 = 2 \quad x_2 = -2$
26. $x_1 = 1 \quad x_2 = -1$
27. $x_1 = \frac{1}{2} \quad x_2 = -\frac{1}{2}$
28. $x_1 = \frac{4}{3} \quad x_2 = -\frac{4}{3}$
29. $x_1 = \sqrt{15} \quad x_2 = -\sqrt{15}$
30. $x_1 = \sqrt{3} \quad x_2 = -\sqrt{3}$
31. $x_1 = \sqrt{11} \quad x_2 = -\sqrt{11}$
32. $x_1 = 2 \quad x_2 = -2$
33. $x_1 = \sqrt{3} \quad x_2 = -\sqrt{3}$
34. $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
35. $x_1 = \frac{1}{7} \quad x_2 = -\frac{1}{7}$
36. $x_1 = 2 \quad x_2 = 3$
37. $x_1 = 5 \quad x_2 = 1$
38. $x_1 = 4 \quad x_2 = -3$
39. $x_1 = 2 \quad x_2 = -9$
40. $x_1 = 5 \quad x_2 = 6$
41. $x_1 = 11 \quad x_2 = -2$
42. $x_1 = 3 \quad x_2 = -8$
43. $x_1 = -7 \quad x_2 = 4$
44. $x_1 = 8 \quad x_2 = 1$
45. $x_1 = -12 \quad x_2 = -3$
46. $x_1 = -6 \quad x_2 = -5$
47. $x_1 = 5 \quad x_2 = -4$
48. $x_1 = 6 \quad x_2 = 7$
49. $x_1 = -3 \quad x_2 = -7$
50. $x_1 = -9 \quad x_2 = -5$
51. $x_1 = 3 \quad x_2 = -12$
52. $x_1 = 9 \quad x_2 = -4$
53. $x_1 = 1 \quad x_2 = -16$
54. $x_1 = 4 \quad x_2 = 5$
55. $y_1 = 2 \quad y_2 = -1$
56. $y_1 = 8 \quad y_2 = 5$
57. $y_1 = -6 \quad y_2 = -2$

Soluciones

58. $y_1 = -6$ $y_2 = -4$	59. $x_1 = 6$ $x_2 = 6$	60. $x_1 = -1$ $x_2 = -1$
61. $x_1 = 3$ $x_2 = 3$	62. $x_1 = 4$ $x_2 = 4$	63. $x_1 = -9$ $x_2 = -9$
64. $x_1 = 5$ $x_2 = 5$	65. $x_1 = -\frac{1}{2}$ $x_2 = -\frac{1}{2}$	66. $x_1 = \frac{2}{3}$ $x_2 = \frac{2}{3}$
67. $x_1 = \frac{1}{3}$ $x_2 = \frac{1}{3}$	68. $x_1 = -\frac{5}{2}$ $x_2 = -\frac{5}{2}$	69. $x_1 = -\frac{4}{3}$ $x_2 = -\frac{4}{3}$
70. $x_1 = \frac{3}{4}$ $x_2 = \frac{3}{4}$		

4.1.2. Solución de la ecuación cuadrática aplicando la fórmula general

A partir de la ecuación general de segundo grado

$ax^2 + bx + c = 0$

podemos obtener las soluciones x_1 y x_2 aplicando la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejercicios resueltos

1. Resolvamos la ecuación $x^2 + 3x - 10 = 0$ aplicando la fórmula.

Primero determinamos los coeficientes que son:

$a = 1$; $b = 3$ y $c = -10$

y luego reemplazamos estos valores en la fórmula.

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2}$$

$$x = \frac{-3 \pm 7}{2}$$ $-3+7$ $+\frac{4}{2}$ $\frac{2}{1}$

obteniendo $x_1 = 2$ y $x_2 = -5$

2. Resolvamos la ecuación $4x^2 + 4x + 1 = 0$

Los coeficientes son $a = 4$, $b = 4$ y $c = 1$

Reemplazando en la fórmula obtenemos:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{8}$$

$$x = \frac{-4 \pm 0}{8}$$

lo cual nos da las soluciones iguales a $-\frac{1}{2}$, es decir,

$x_1 = -\frac{1}{2}$ y $x_2 = -\frac{1}{2}$

3. Resolvamos la ecuación $2x^2 + 3x - 1 = 0$

Aplicando la fórmula para los valores $a = 2$; $b = 3$ y $c = -1$

obtenemos: $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9+8}}{4}$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$$

y obtenemos $x_1 = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{4}$ y $x_2 = \dfrac{-3-\sqrt{17}}{4}$

Nota: Si la cantidad subradical no es un cuadrado exacto, la dejamos expresada tal cual aparece, así como en el ejemplo anterior.

4. Resolvamos la ecuación $x^2 + x + 2 = 0$
Los coeficientes en este caso son $a = 1$; $b = 1$ y $c = 2$, aplicando la fórmula obtenemos:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2}$$

y las soluciones son:

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{-7}}{2} \quad y \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{-7}}{2}$$

Nota: Si la cantidad subradical es un número negativo, entonces las soluciones son números complejos. El capítulo de números complejos está estudiado más adelante, pero aquí podemos definir:

$$\boxed{\sqrt{-1} = i \quad \text{unidad imaginaria}}$$

Ej. : $\sqrt{-2} = i\sqrt{2}$

$$\sqrt{-25} = \sqrt{-1}\,\sqrt{25} = 5i \text{.......etc.}$$

entonces en el ejemplo anterior, las soluciones pueden ser expresadas por:

$$x_1 = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2} \quad y \quad x_2 = \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$$

5. Resolvamos la ecuación $x^2 + 2x + 5 = 0$

Apliquemos la fórmula directamente:

1+4i

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$$

y las soluciones son $x_1 = -1 + 2i$ y $x_2 = -1 - 2i$

Ejercicios

Aplique la fórmula para resolver las siguientes ecuaciones:

1. $x^2 + x = 0$
2. $3x^2 - 2 = 0$
3. $x^2 + 2x + 1 = 0$
4. $x^2 - x - 30 = 0$
5. $2x^2 + 3x - 1 = 0$
6. $3x^2 - x - 2 = 0$
7. $x^2 + 2x + 3 = 0$
8. $x^2 - 5x - 4 = 0$
9. $4x^2 + 4x + 1 = 0$
10. $2x^2 + x - 2 = 0$
11. $x^2 + 6x + 5 = 0$
12. $x^2 - 6x + 5 = 0$
13. $3x^2 + x - 2 = 0$
14. $2x^2 + x - 1 = 0$
15. $6x^2 + x + 5 = 0$
16. $3x^2 - x - 1 = 0$
17. $9x^2 - 2x + 3 = 0$
18. $(2x - 3)(x + 1) = (x - 3)(x + 2)$
19. $(x - 7)^2 + 2x = (2x - 1)(x - 2)$
20. $x(x + 5) - 3 = 2x(x - 6)$
21. $3x(x + 2) = (x + 5)(x - 5)$
22. $(x - 6)(2 - x) = (x + 3)^2 - (x - 2)^2$
23. $5x(x + 2) = 2x(x + 1)$
24. $x(x - 6) + 2x(x - 1) - x(x - 3) = 0$
25. $(1 + x)^2 + (2 + x)^2 = (3 - x)^2$
26. $(x - 8)^2 + (x - 5)^2 = (x - 9)^2$
27. $(x + 6)(x - 6) - (x - 5)^2 = 0$
28. $(3x - 1)(x + 2) - x(x - 4) = 0$
29. $a(x - a) + b(x - b) = x(x - a) + x(x - b)$
30. $(a + x)^2 + (b + x)^2 = a^2 + b^2$
31. $x^2 + ax + b = 0$
32. $x^2 - 3abx = -3ab(x - 3ab)$
33. $\dfrac{1}{x-a} - \dfrac{1}{x-b} = a - b$
34. $\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x-3} = 1$
35. $\dfrac{1+x}{1-x} - \dfrac{1-x}{1+x} = 3$
36. $\dfrac{3}{2x-1} - \dfrac{1}{2x+1} = 2$

Impares

Soluciones

1. $x_1 = 0 \quad x_2 = -1$ 2. $x_1 = \dfrac{\sqrt{6}}{3} \quad x_2 = \dfrac{-\sqrt{6}}{3}$ 3. $x_1 = -1 \quad x_2 = -1$

4. $x_1 = 6 \quad x_2 = -5$ 5. $x_1 = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{4} \quad x_2 = \dfrac{-3-\sqrt{17}}{4}$ 6. $x_1 = 1 \quad x_2 = \dfrac{-2}{3}$

7. $x_1 = -1 + i\sqrt{2} \quad x_2 = -1 - i\sqrt{2}$ 8. $x_1 = \dfrac{5+\sqrt{41}}{2} \quad x_2 = \dfrac{5-\sqrt{41}}{2}$

9. $x_1 = -\dfrac{1}{2} \quad x_2 = -\dfrac{1}{2}$ 10. $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{4} \quad x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{17}}{4}$ 11. $x_1 = -5 \quad x_2 = -1$

12. $x_1 = 5 \quad x_2 = 1$ 13. $x_1 = -1 \quad x_2 = \dfrac{2}{3}$ 14. $x_1 = -1 \quad x_2 = \dfrac{1}{2}$

15. $x_1 = \frac{-1+i\sqrt{119}}{12}$ $x_2 = \frac{-1-i\sqrt{119}}{12}$ 16. $x_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{6}$ $x_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{6}$

17. $x_1 = \frac{1+i\sqrt{26}}{9}$ $x_2 = \frac{1-i\sqrt{26}}{9}$ 18. $x_1 = i\sqrt{3}$ $x_2 = -i\sqrt{3}$

19. $x_1 = \frac{-7+\sqrt{237}}{2}$ $x_2 = \frac{-7-\sqrt{237}}{2}$ 20. $x_1 = \frac{17+\sqrt{277}}{2}$ $x_2 = \frac{17-\sqrt{277}}{2}$

21. $x_1 = \frac{-3+i\sqrt{41}}{2}$ $x_2 = \frac{-3-i\sqrt{41}}{2}$ 22. $x_1 = -1 + 4i$ $x_2 = -1 - 4i$

23. $x_1 = 0$ $x_2 = \frac{-8}{3}$ 24. $x_1 = 0$ $x_2 = \frac{5}{2}$

25. $x_1 = -6-2\sqrt{10}$ $x_2 = -6-2\sqrt{10}$ 26. $x_1 = 4+2\sqrt{2}$ $x_2 = 4-2\sqrt{2}$

27. $x_1 = \frac{61}{10}$ $x_2 =$ No hay 28. $x_1 = \frac{-9+\sqrt{97}}{4}$ $x_2 = \frac{-9-\sqrt{97}}{4}$

29. $x_1 = \frac{a+b+i(a-b)}{2}$ $x_2 = \frac{a+b-i(a-b)}{2}$ 30. $x_1 = 0$ $x_2 = -(a + b)$

31. $x_1 = \frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$ $x_2 = \frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$ 32. $x_1 = 3ab$ $x_2 = -3ab$

33. $x_1 = \frac{a+b+\sqrt{(a-b)^2+4}}{2}$ $x_2 = \frac{a+b-\sqrt{(a-b)^2+4}}{2}$ 34. $x_1 = \frac{7+\sqrt{5}}{2}$ $x_2 = \frac{7-\sqrt{5}}{2}$

35. $x_1 = \frac{-2+\sqrt{13}}{3}$ $x_2 = \frac{-2-\sqrt{13}}{3}$ 36. $x_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{4}$ $x_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{4}$

4.1.3 Ecuaciones bicuadráticas

Estas ecuaciones tienen la forma

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

y podemos resolverlas haciendo el siguiente cambio de variables

$$y = x^2$$

Con este cambio, la ecuación original se transforma en una ecuación cuadrática en la variable y:

$$ay^2 + by + c = 0$$

y aplicando la fórmula general o factorizando podemos obtener los dos valores de y, que son soluciones de la ecuación transformada.

A partir de cada valor obtenido para y, usando el cambio de variable efectuado al comienzo, obtenemos dos valores para la variable original x, y de este modo las 4 soluciones de la ecuación original.

Nota: La ecuación original es de grado 4 y por lo tanto tiene 4 soluciones.

Ejercicios resueltos

1. Resolvamos la ecuación: $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Haciendo el cambio de variable $y = x^2$ obtenemos:

$$y^2 - 5y + 4 = 0$$

Resolviendo esta ecuación (por factorización o aplicando fórmula) obtenemos las siguientes soluciones: $y_1 = 1$; $y_2 = 4$

Pero como $y = x^2$ (recordemos que "y" es variable auxiliar, nosotros debemos buscar los valores para la variable original "x").

$y_1 = 1$, esto implica $x^2 = 1$, es decir $x_1 = 1$

$x_2 = -1$

$y_2 = 4$, es decir $x^2 = 4$, entonces $x_3 = 2$

$x_4 = -2$

y las cuatro soluciones de la ecuación original son:

$x_1 = 1$; $x_2 = -1$; $x_3 = 2$; $x_4 = -2$

2. Resolvamos la ecuación: $x^4 - 11x^2 + 18 = 0$

Hacemos el cambio de variable $y = x^2$ y reemplazamos; nos queda:

$$y^2 - 11y + 18 = 0$$

Podemos factorizar $(y - 9)(y - 2) = 0$

y obtenemos las soluciones auxiliares: $y_1 = 9$; $y_2 = 2$

Volvemos a nuestra variable original del siguiente modo:

$y_1 = 9$ implica $x^2 = 9$, es decir $x_1 = 3$

$x_2 = -3$

$y_2 = 2$ implica $x^2 = 2$, es decir $x_3 = \sqrt{2}$

$x_4 = -\sqrt{2}$

3. Resolvamos la ecuación $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

Haciendo $y = x^2$, reemplazando y factorizando obtenemos:

$$y^2 - 3y - 4 = 0$$

$$(y - 4)(y + 1) = 0$$

las soluciones auxiliares son: $y_1 = 4$; $y_2 = -1$

$y = 4$ implica $x^2 = 4$, es decir $x_1 = 2$

$x_2 = -2$

$y = -1$ implica $x^2 = -1$, es decir $x_3 = i$

$x_4 = -i$

Las soluciones pedidas son:

$x_1 = 2$; $x_2 = -2$; $x_3 = i$; $x_4 = -i$

Ejercicios

Resuelva las siguientes ecuaciones:

1. $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$	**2.** $x^4 - 16 = 0$	**3.** $x^4 - 7x^2 + 10 = 0$
4. $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$	**5.** $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$	**6.** $x^4 - 13x^2 + 42 = 0$
7. $x^4 - 14x^2 + 33 = 0$	**8.** $x^4 + 5x^2 - 6 = 0$	**9.** $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$
10. $x^4 - 10x^2 + 25 = 0$	**11.** $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$	**12.** $9x^4 - 10x^2 + 1 = 0$
13. $2x^4 - 9x^2 + 4 = 0$	**14.** $3x^4 - 8x^2 + 4 = 0$	**15.** $8x^4 - 6x^2 + 1 = 0$

Soluciones

1. $x_1 = i;\quad x_2 = -i;\quad x_3 = 3i;\quad x_4 = -3i$
2. $x_1 = 2;\quad x_2 = -2;\quad x_3 = 2i;\quad x_4 = -2i$
3. $x_1 = \sqrt{2};\ x_2 = -\sqrt{2};\ x_3 = \sqrt{5};\quad x_4 = -\sqrt{5}$
4. $x_1 = 3;\quad x_2 = -3;\quad x_3 = 2i;\quad x_4 = -2i$
5. $x_1 = 2;\quad x_2 = -2;\quad x_3 = \sqrt{3};\quad x_4 = -\sqrt{3}$
6. $x_1 = \sqrt{6};\ x_2 = -\sqrt{6};\ x_3 = \sqrt{7};\quad x_4 = -\sqrt{7}$
7. $x_1 = \sqrt{3};\ x_2 = -\sqrt{3};\ x_3 = \sqrt{11};\ x_4 = -\sqrt{11}$
8. $x_1 = 1;\ x_2 = -1;\ x_3 = i\sqrt{6};\quad x_4 = -i\sqrt{6}$
9. $x_1 = \sqrt{2};\quad x_2 = \sqrt{2};\quad x_3 = -\sqrt{2};\quad x_4 = -\sqrt{2}$
10. $x_1 = \sqrt{5};\ x_2 = \sqrt{5};\ x_3 = -\sqrt{5};\quad x_4 = -\sqrt{5}$
11. $x_1 = 1;\quad x_2 = -1;\quad x_3 = \frac{1}{2};\quad x_4 = -\frac{1}{2}$
12. $x_1 = 1;\ x_2 = -1;\ x_3 = \frac{1}{3};\ x_4 = -\frac{1}{3}$
13. $x_1 = 2;\quad x_2 = -2;\quad x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}};\quad x_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
14. $x_1 = \sqrt{2};\ x_2 = -\sqrt{2};\ x_3 = \sqrt{\frac{2}{3}};\ x_4 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$
15. $x_1 = \frac{1}{2};\quad x_2 = -\frac{1}{2};\quad x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}};\quad x_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

4.1.4 Relación entre los coeficientes de una ecuación cuadrática y sus raíces o soluciones y la naturaleza de ellas

$X_1 = 5$

$x_2 = 8$

$\frac{-4}{1} = \frac{b}{a}$

Sean x_1 y x_2 las soluciones de la ecuación:

$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$

$-\frac{5}{9} = \frac{c}{a}$

$ax^2 + bx + c = 0$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{+c}{a}$

Se verifica: $\boxed{x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad \text{y} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}}$

Las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por:

$-\frac{13}{1} = \frac{-b}{a}$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Llamamos discriminante de la ecuación a la expresión denotada por Δ y definida por:

$\Delta = b^2 - 4ac.$

$x^2 - 13x + 40 = 0 \qquad \frac{40}{1} = \frac{c}{a}$

El signo Δ determina la naturaleza de las soluciones de la ecuación.

Se verifica:

Si $\Delta > 0$, entonces las soluciones son números reales y distintos.

Si $\Delta = 0$, entonces las soluciones son números reales e iguales.

Si $\Delta < 0$, entonces las soluciones son números complejos.

Ejercicios resueltos

1. Determinemos la suma de las soluciones de la ecuación
   $3x^2 - 9x - 16 = 0$

   Notamos que no es necesario obtener las soluciones para determinar su suma, pues podemos aplicar directamente la propiedad

   $$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \text{ para este caso } a = 3 \text{ y } b = -9$$

   Entonces tenemos $\quad x_1 + x_2 = \frac{9}{3} = 3$

2. Determinemos el producto de las soluciones de la ecuación
   $2x^2 + x - 15 = 0$

   Aquí también podemos aplicar directamente la propiedad

   $$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \quad \text{para } a = 2 \quad \text{y} \quad c = -15$$

   y obtenemos: $\quad x_1 \cdot x_2 = \frac{-15}{2}$

3. ¿Qué valor(es) debe tomar k en la ecuación
   $9x^2 - kx + 1 = 0$
   para que sus soluciones sean números reales e iguales?

   La condición para que las raíces sean reales e iguales es que el discriminante Δ sea igual a cero. En este ejemplo tenemos $a = 9$; $b = -k$; $c = 1$

   entonces: $\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0$

   $$k^2 - 36 = 0$$
   $$k^2 = 36$$
   $$k = \pm 6$$

   y los valores que puede tomar k son +6 y −6

4. ¿Qué condición debe cumplir t en la ecuación
   $tx^2 + 2x + 1 = 0$
   para que sus raíces sean números complejos conjugados?

Para que las raíces de una ecuación sean números complejos conjugados se debe cumplir que el discriminante sea negativo.

Aquí $a = t$; $b = 2$ y $c = 1$

entonces: $\Delta < 0 \Rightarrow b^2 - 4ac < 0$

$$4 - 4t < 0$$
$$4 < 4t$$
$$1 < t$$

y por lo tanto la condición pedida es que t sea mayor que 1.

5. Determine una ecuación cuadrática sabiendo que sus raíces son: $x_1 = 5$ y $x_2 = -6$

Solución 1:

Aplicando las propiedades que relacionan los coeficientes de una ecuación cuadrática con sus soluciones obtenemos:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \Rightarrow -1 = \frac{-b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow -30 = \frac{c}{a}$$

Podemos asignar a "a" cualquier valor; en particular, hagamos $a = 1$ y entonces obtenemos $b = 1$ y $c = -30$ y la ecuación pedida es:

$x^2 + x - 30 = 0$

Solución 2:

Si x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación, entonces ésta se puede factorizar por $(x - x_1)(x - x_2) = 0$

Aquí $x_1 = 5$ y $x_2 = -6$,
entonces la ecuación factorizada es $(x - 5)(x + 6) = 0$
y la ecuación pedida es: $x^2 + x - 30 = 0$

NOTA: Cualquier amplificación que hagamos a una ecuación cuadrática nos dejará invariables las soluciones. Ésta es la razón que nos permitió "elegir" $a = 1$ en la solución 1 del ejemplo anterior.

$\frac{-b}{a}$

$\frac{c}{a}$

$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$

$\frac{+5}{3}$

Ejercicios

1. ¿Cuál es la suma de las soluciones de la ecuación:
$3x^2 + 5x - 2 = 0$?

2. ¿Cuál es el producto de las soluciones de la ecuación:
$3x^2 + 5x + 2 = 0$?

3. ¿Cuál es la suma de las raíces de la ecuación:
$3x^2 - 5x - 1 = 7(x - 3)$?

4. ¿Cuál es el producto de las raíces de la ecuación:
$(x - 5)^2 = (x - 5)(x + 5)$?

Ejercicios

5. Determine la suma y el producto de las raíces de la ecuación:
$2ax^2 - bx + a^2b^2 = 0$

6. Determine la suma y el producto de las raíces de la ecuación:
$(a - x)^2 + (b - x)^2 = 0$

7. Determine una ecuación cuadrática- cuyas raíces sean:
$x_1 = -2$ y $x_2 = -5$
(Esta ecuación debe tener coeficientes enteros e irreductibles).

8. Determine una ecuación cuadrática cuyas raíces sean:
$x_1 = 0$ y $x_2 = 1$

9. Determine una ecuación cuadrática cuyas raíces sean:
$x_1 = 0$ y $x_2 = 0$

10. Determine una ecuación cuadrática cuyas raíces sean:
$x_1 = 2$ y $x_2 = -2$

11. Determine una ecuación cuadrática cuyas raíces sean:
$x_1 = 3$ y $x_2 = -3$

12. Determine una ecuación cuadrática cuyas raíces sean:
$x_1 = 5$ y $x_2 = -5$

13. Determine una ecuación cuadrática cuyas raíces sean:
$x_1 = \sqrt{2}$ y $x_2 = -\sqrt{2}$

14. Determine una ecuación cuadrática cuyas raíces sean:
$x_1 = \sqrt{6}$ y $x_2 = -\sqrt{6}$

15. Determine una ecuación cuadrática con coeficientes enteros e irreductibles cuyas raíces sean:
$x_1 = 2$ y $x_2 = \frac{2}{3}$

16. Determine una ecuación cuadrática con coeficientes enteros e irreductibles cuyas raíces sean:
$x_1 = 3$ y $x_2 = \frac{1}{2}$

17. Determine una ecuación cuadrática con coeficientes enteros e irreductibles cuyas soluciones sean:
$x_1 = -\frac{1}{2}$ y $x_2 = 2$

18. Determine una ecuación cuadrática con coeficientes enteros e irreductibles cuyas raíces sean:
$x_1 = \frac{3}{5}$ y $x_2 = \frac{2}{5}$

19. Determine una ecuación cuadrática con coeficientes enteros que tenga como soluciones:
$x_1 = -\frac{2}{7}$ y $x_2 = \frac{3}{2}$

20. Determine una ecuación de segundo grado con coeficientes enteros que tenga como soluciones:
$x_1 = \frac{5}{11}$ y $x_2 = -\frac{3}{4}$

21. Sin resolver la ecuación
$2x^2 + 3x - 5 = 0$
determine la naturaleza de sus soluciones.

22. Sin resolver la ecuación
$x^2 + x + 1 = 0$
determine la naturaleza de sus raíces.

En los ejercicios 23 → 30, determine la naturaleza de las raíces sin resolver las ecuaciones.

23. $2(x - 3)^2 - 3(x + 1)^2 = 0$

24. $(x - 6)(x + 5) - 2(x - 7)^2 = (x + 3)^2$

25. $3x^2 - 5x - 2 = 3(x - 3) + 2(x - 1)$

26. $(1 + x)^2 = (1 - 2x)^2$

27. $6x^2 + 7x + 4 = 0$

28. $2x(x + 4) - x(x - 1) = (x - 3)(2x - 1)$

29. $\frac{x+5}{x}+\frac{2x-3}{x}=\frac{x-3}{x-2}$

30. $\frac{x-2}{x+3}+\frac{x+3}{x-2}=1$

En los ejercicios 31 → 40 determine qué valores debe tomar k o qué condiciones debe cumplir k para que las soluciones sean como se requiere en cada caso.

31. $2x^2 + kx - 3 = 0$
Soluciones reales y distintas.

32. $3x^2 - kx + 3 = 0$
Soluciones reales e iguales.

33. $kx^2 + kx - 2 = 0$
Soluciones reales e iguales.

34. $5x^2 + 2x + k = 0$
Soluciones complejas conjugadas.

35. $3x^2 - x - 2k = 0$
Soluciones reales y distintas.

36. $x^2 + x + 3k = 0$
Soluciones reales y distintas.

37. $4x^2 - 12x - k = 0$
Soluciones reales e iguales.

38. $3kx^2 + 2x - 1 = 0$
Soluciones complejas conjugadas.

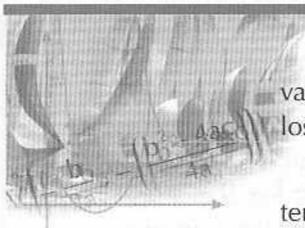
39. $3x^2 - 2kx + 2 = 0$
Soluciones reales e iguales.

40. $3kx^2 - 2x + 5 = 0$
Soluciones reales e iguales.

Soluciones

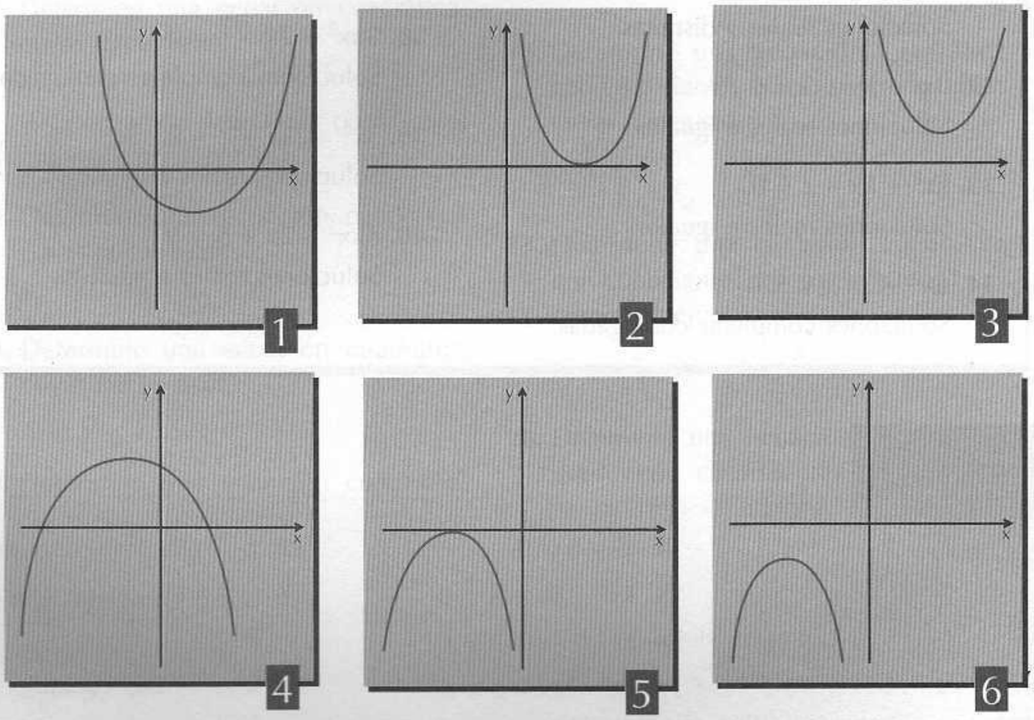
1. $x_1 + x_2 = \frac{5}{3}$
2. $x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{3}$
3. $x_1 + x_2 = 4$
4. Tiene 1 sola raíz.
5. $x_1 + x_2 = \frac{b}{2a}$
$x_1 \cdot x_2 = \frac{ab^2}{2}$
6. $x_1 + x_2 = a + b$
$x_1 \cdot x_2 = \frac{a^2+b^2}{2}$
7. $x^2 + 7x + 10 = 0$
8. $x^2 - x = 0$
9. $x^2 = 0$
10. $x^2 - 4 = 0$
11. $x^2 - 9 = 0$
12. $x^2 - 25 = 0$
13. $x^2 - 2 = 0$
14. $x^2 - 6 = 0$
15. $3x^2 - 8x + 4 = 0$
16. $2x^2 - 7x + 3 = 0$
17. $2x^2 - 3x - 2 = 0$
18. $25x^2 - 25x + 6 = 0$
19. $14x^2 - 17x - 6 = 0$
20. $44x^2 + 13x - 15 = 0$
21. $\Delta > 0$ Reales y distintas.
22. $\Delta < 0$ Complejas conjugadas.
23. $\Delta > 0$ Reales y distintas.
24. $\Delta < 0$ Complejas conjugadas.
25. $\Delta < 0$ Complejas conjugadas.
26. $\Delta > 0$ Reales y distintas.
27. $\Delta < 0$ Complejas conjugadas.
28. $\Delta > 0$ Reales y distintas.
29. $\Delta > 0$ Reales y distintas.
30. $\Delta < 0$ Complejas conjugadas.
31. $k^2 > -24$; cualquier k real.
32. $k = \pm 6$
33. $k = 0$ o $k = -8$;
$k^2 + 8k > 0$
34. $k > \frac{1}{5}$
35. $k > -\frac{1}{24}$
36. $k < \frac{1}{12}$
37. $k = -9$
38. $k < -\frac{1}{3}$
39. $-\sqrt{6} < k < \sqrt{6}$; $k^2 < 6$
40. $k = \frac{1}{15}$

4.2 La función cuadrática



Corresponde a la expresión $y = ax^2 + b\ x + c$, donde x es la variable independiente; y es la variable dependiente; a,b, y c son los coeficientes de la función.

La gráfica de la función cuadrática es una parábola y puede tener una de las siguientes seis posiciones.



Es decir, se puede abrir hacia arriba (figuras 1-2-3) o hacia abajo (figuras 4-5-6) y puede intersectar al eje x en 2 puntos (figuras 1 y 4); en 1 punto (figuras 2 y 5) o en ningún punto (figuras 3 y 6).

La concavidad de la parábola o la posición en que se abre, (hacia arriba o hacia abajo) está determinada por el signo del coeficiente de x^2 en la función $y = ax^2 + bx + c$, es decir, está determinada por el signo de "a". Así:

- si $a > 0$, entonces la concavidad es positiva y la parábola se abre hacia arriba.

- si $a < 0$, entonces la concavidad es negativa y la parábola se abre hacia abajo.

NOTA: "a" no puede tomar el valor 0 (cero) pues entonces la función sería lineal y no cuadrática.

Las intersecciones de la gráfica **con el eje X** corresponden a las soluciones de la ecuación cuadrática asociada; es decir a;

$ax^2 + bx + c = 0$ (cuando y toma el valor cero la gráfica está sobre el eje x).

Como sabemos, los tipos de soluciones de la ecuación dependen del signo del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$.

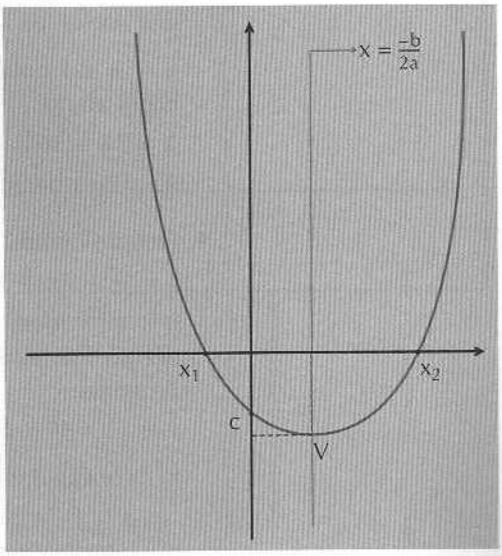
Si $\Delta > 0$, entonces las soluciones son reales y distintas y por lo tanto hay dos intersecciones con el eje x; éstas son los puntos x_1 y x_2.

Si $\Delta = 0$, las soluciones son reales e iguales y hay una sola intersección con el eje x. Aquí $x_1 = x_2$.

Si $\Delta < 0$, las soluciones son complejas conjugadas y entonces no hay intersección con el eje x.

La intersección de la parábola **con el eje Y** se obtiene haciendo $x = 0$ y corresponde por supuesto a $y = c$.

Todas las parábolas tienen un **vértice** que corresponde al valor mínimo (si la parábola se abre hacia arriba) o al valor máximo (si se abre hacia abajo).



Las coordenadas del vértice son:

$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right)\right)$$

La recta $x = -\frac{b}{2a}$ es el eje de la parábola.

El dominio de la función cuadrática es $\mathbb{R}$ (no hay restricción).

El recorrido depende de la concavidad:

Si $a > 0$ entonces

$$\text{Rec.(f)} = \left[-\left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right), +\infty\right[$$

Si $a < 0$ entonces

$$\text{Rec.(f)} = \left]-\infty, -\left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right)\right]$$

Ejercicios resueltos

1. Determinemos la concavidad y el número de intersecciones con el eje x de la gráfica de la función:

   $y = 2x^2 + 3x - 1$

   En esta función tenemos: $a = 2$, $b = 3$, $c = -1$.

   Para la concavidad nos basta con analizar el signo de a.

   $a = 2$; $a > 0$ implica concavidad positiva, la parábola se abre hacia arriba.

Para determinar las intersecciones con el eje X analizamos el signo del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 9 + 8$

$\Delta = 17$; $\Delta > 0$, es decir, las soluciones son reales y distintas, por lo tanto hay dos intersecciones con el eje X.

2. Determinemos la concavidad y el número de intersecciones de la gráfica de la función: (con el eje X)

$y = -3x^2 - x + 2$

De inmediato; $a = -3$; $a < 0$ implica concavidad negativa y la parábola se abre hacia abajo.

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 1 + 24 = 25$

$\Delta > 0$, hay dos intersecciones con el eje X.

3. Determinemos concavidad e intersecciones con el eje X en la función

$y = -x^2 + 6x - 9$

$a = -1$, concavidad negativa, por lo tanto la parábola se abre hacia abajo.

$\Delta = 36 - 36$

$\Delta = 0$, es decir, hay un solo punto de intersección con el eje X.

4. Determinemos, en la función

$y = x^2 - 4x - 32$

la concavidad, las intersecciones con ambos ejes, las coordenadas del vértice, el dominio y el recorrido y esbocemos la gráfica.

Tenemos:

$y = x^2 - 4x - 32 \quad a = 1 \; ; b = -4 \; ; c = -32$

a) concavidad

$a = 1$, $a > 0 \Rightarrow$ (+)

b) intersecciones

con eje X : $\Delta = 144$

$\Delta > 0 \Rightarrow 2$ intersecciones.

Solucionamos la ecuación para determinar los puntos de intersección, que están dados por las soluciones x_1 y x_2

$x^2 - 4x - 32 = 0 \Rightarrow (x - 8)(x + 4) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 8$ y $x_2 = -4$

con eje Y:

hacemos $x = 0$ en la función $y = x^2 - 4x - 32$ y obtenemos $y = -32$

c) Coordenadas del vértice.

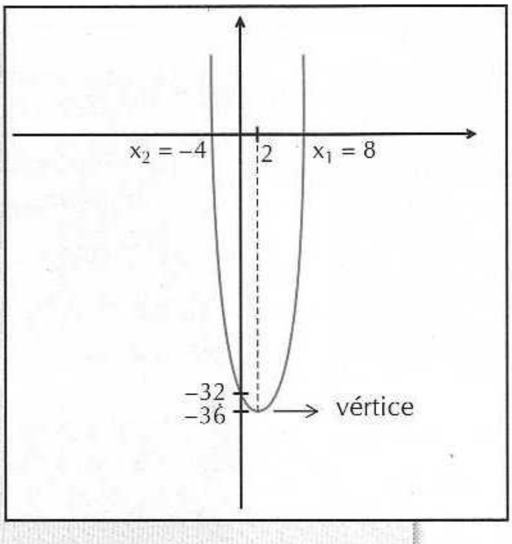
$$V\left(\frac{b}{2a}, -\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)\right)$$

reemplazando obtenemos: V (2 , – 36)

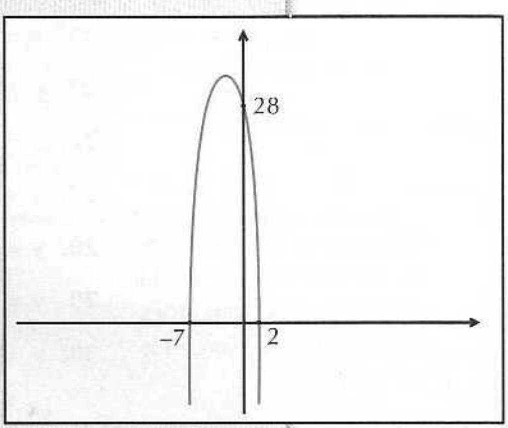
d) Dom (f) = $\mathbb{R}$

Rec (f) = $[-36, +\infty[$

e) Gráfico



5. Dada la siguiente gráfica, determinemos la función correspondiente.
Debemos determinar a, b y c.



Tenemos $x_1 = -7$
$x_2 = 2$
$c = 28$
(c es la intersección de la gráfica con el eje y)

Sabemos que $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
y $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

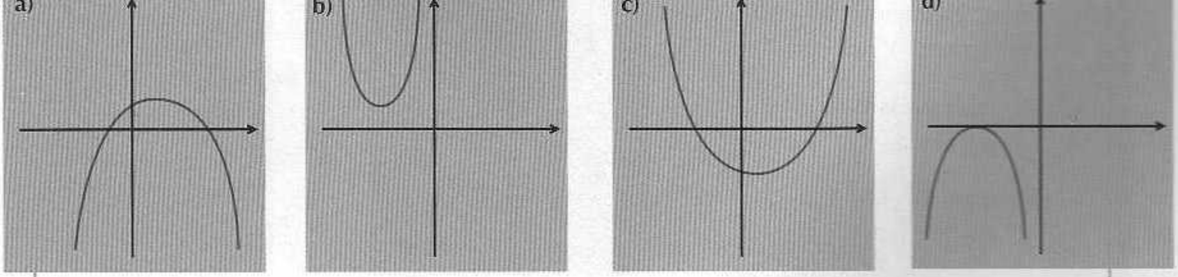
$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}: -7 \cdot 2 = \frac{28}{a} \Rightarrow -14a = 28 \Rightarrow \boxed{a = -2}$

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}: -7 + 2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow -5 = \frac{b}{2} \Rightarrow \boxed{b = -10}$

entonces la función pedida es: $y = -2x^2 - 10x + 28$

Ejercicios

1. Dados los siguientes gráficos, determine signo de 'a', (concavidad) y tipos de soluciones de la ecuación asociada:



Ejercicios

En los ejercicios 2 $\rightarrow$ 10, determine la concavidad y el número de intersecciones con el eje X.

2. $y = x^2 - 1$

3. $y = x^2 + 1$

4. $y = -2x^2 - 3x + 1$

5. $y = 3x^2 + x + 1$

6. $y = -\ 5x^2 + 2x$

7. $y = -3x^2 + 4$

8. $y = 6x^2 - 2x - 3$

9. $y = x^2 + x + 1$

10. $y = -\ 5x^2$

Determine las coordenadas del vértice de la gráfica de las funciones dadas en los ejercicios 11 $\rightarrow$ 18.

11. $y = x^2 - 5$

12. $y = x^2 + 2x + 1$

13. $y = 4x^2 - 3x - 2$

14. $y = -2x^2 + x + 1$

15. $y = 3x^2 - 3x + 2$

16. $y = -3x^2 + \frac{3x}{4} - \frac{1}{32}$

17. $y = -x^2 + 1$

18. $y = \frac{3x^2}{2} - 2x + 5$

En los ejercicios 19 $\rightarrow$ 30 determine:

a) concavidad de la parábola

b) intersección con el eje X

c) coordenadas del vértice

d) recorrido de la función

e) gráfico

19. $y = x^2 + 4x + 3$

20. $y = -x^2 + 5x$

21 $y = x^2 - 6x + 5$

22. $y = -x^2 + 2x + 24$

23. $y = -x^2 + 6x + 16$

24. $y = 3x^2 - 5x - 2$

25. $y = 4x^2 - 9x + 2$

26. $y = -\ 4x^2 + 9$

27. $y = 2x^2 + 5x + 4$

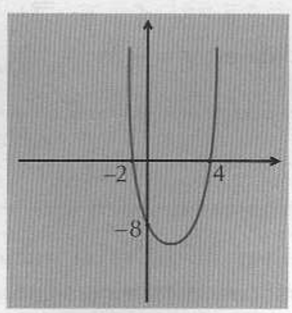
28. $y = x^2 + 5x$

29. $y = 6x^2 - 13x - 5$

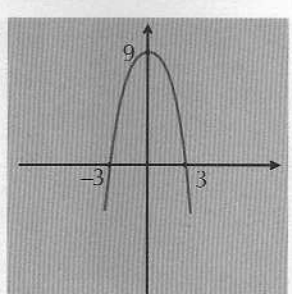
30. $y = -3x^2 - 5x - 6$

En los ejercicios 31 $\rightarrow$ 42 determine la función correspondiente de acuerdo con los datos dados:

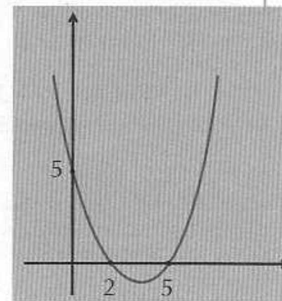
31.



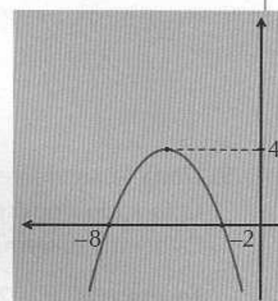
32.



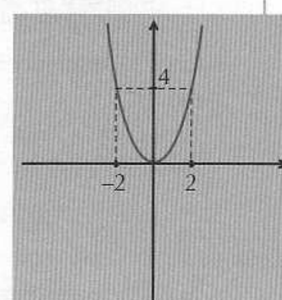
33.



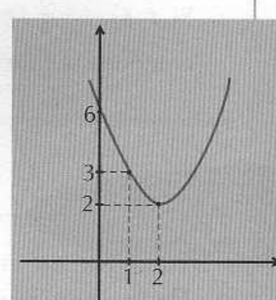
34.



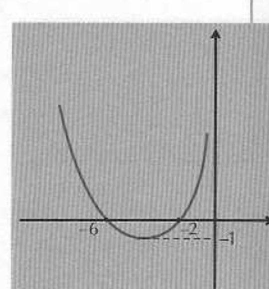
35.



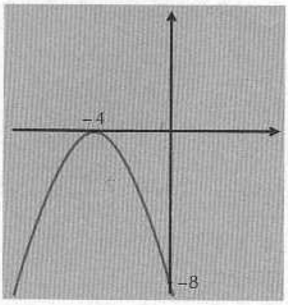
36.



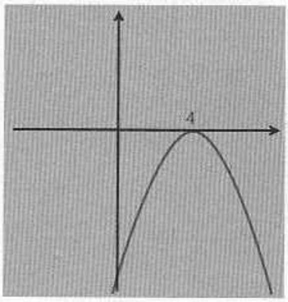
37.



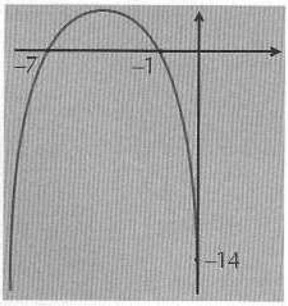
38.



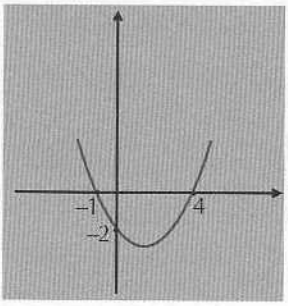
40.



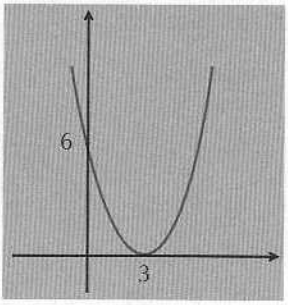
42.



39.



41.



Soluciones

1. a) $a < 0$; soluciones reales y distintas.
   b) $a > 0$; soluciones complejas conjugadas.
   c) $a > 0$; soluciones reales y distintas.
   d) $a < 0$; soluciones reales e iguales.
2. Concavidad positiva; 2 intersecciones.
3. Concavidad positiva; 0 intersecciones.
4. Concavidad negativa; 2 intersecciones.
5. Concavidad positiva; 0 intersecciones.
6. Concavidad negativa; 2 intersecciones.
7. Concavidad negativa; 2 intersecciones.
8. Concavidad positiva; 2 intersecciones.
9. Concavidad positiva; 0 intersecciones.
10. Concavidad negativa; 1 intersección.
11. $V\,(0, -5)$
12. $V\,(-1, 0)$
13. $V\left(\frac{3}{8}, -\frac{41}{16}\right)$
14. $V\left(\frac{1}{4}, \frac{9}{8}\right)$
15. $V\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$
16. $V\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{64}\right)$
17. $V\,(0, 1)$
18. $V\left(\frac{2}{3}, \frac{13}{3}\right)$
19. a) positiva
    b) $x_1 = -1;\ x_2 = -3$
    c) $V(-2, -1)$
    d) Rec: $[-1, \infty)$
20. a) negativa
    b) $x_1 = 0\ ;\ x_2 = 5$
    c) $V\left(\frac{5}{2}, \frac{25}{4}\right)$
    d) Rec: $\left(-\infty, \frac{25}{4}\right]$
21. a) positiva
    b) $x_1 = 5\ ;\ x_2 = 1$
    c) $V\,(3, -4)$
    d) Rec: $[-4, \infty)$
22. a) negativa
    b) $x_1 = 6\ ;\ x_2 = -4$
    c) $V\,(1, 25)$
    d) Rec: $(-\infty, 25]$
23. a) negativa
    b) $x_1 = 8\ ;\ x_2 = -2$
    c) $V\,(3, 25)$

d) Rec: $(-\infty,\ 25]$

24. a) positiva

b) $x_1 = 2$; $x_2 = -\frac{1}{3}$

c) $V\left(\frac{5}{6},\ -\frac{49}{12}\right)$

d) Rec: $[\frac{-49}{12},\ \infty)$

25. a) positiva

b) $x_1 = 2$; $x_2 = \frac{1}{4}$

c) $V\left(\frac{9}{8},\ \frac{-49}{16}\right)$

d) Rec: $[-\frac{49}{16},\ \infty)$

26. a) negativa

b) $x_1 = \frac{3}{2}$; $x_2 = -\frac{3}{2}$

c) $V(0,\ 9)$

d) Rec: $(-\infty,\ 9]$

27. a) positiva

b) no hay

c) $V\left(-\frac{5}{4},\ \frac{7}{8}\right)$

d) Rec: $[\frac{7}{8},\ \infty)$

28. a) positiva

b) $x_1 = 0$; $x_2 = -5$

c) $V\left(-\frac{5}{2},\ -\frac{25}{4}\right)$

d) Rec: $[\frac{-25}{4},\ \infty)$

29. a) positiva

b) $x_1 = \frac{5}{2}$; $x_2 = -\frac{1}{3}$

c) $V\left(\frac{13}{12},\ -\frac{289}{24}\right)$

d) Rec: $[-\frac{289}{24},\ \infty)$

30. a) negativa

b) no hay

c) $V\left(-\frac{5}{6},\ -\frac{47}{12}\right)$

d) Rec: $(-\infty,\ -\frac{47}{12}]$

31. $y = x^2 - 2x - 8$

32. $y = -x^2 + 9$

33. $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 5$

34. $y = -\frac{4}{9}x^2 - \frac{40}{9}x - \frac{64}{9}$

35. $y = x^2$

36. $y = x^2 - 4x + 6$

37. $y = \frac{1}{4}x^2 + 2x + 3$

38. $y = -\frac{x^2}{2} - 4x - 8$

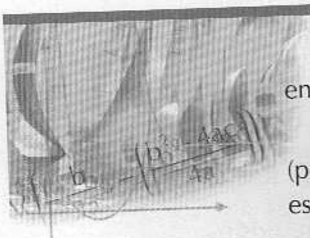
39. $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 2$

40. (Faltan datos)

41. $y = \frac{2}{3}x^2 - 4x + 6$

42. $y = -2x^2 - 16x - 14$

4.3 Inecuaciones de segundo grado



Resolveremos aquí inecuaciones que pueden ser expresadas en la forma:

$ax^2 + bx + c \geq 0$ o $ax^2 + bx + c \leq 0$

(por supuesto que las desigualdades también pueden ser estrictas, es decir >).

Usaremos la siguiente propiedad de los números reales:

$$a \bullet b > 0 \leftrightarrow a > 0 \ \wedge\ b > 0 \ \text{ o } \ a < 0 \ \wedge\ b < 0$$

$$a \bullet b < 0 \leftrightarrow a > 0 \ \wedge\ b < 0 \ \text{ o } \ a < 0 \ \wedge\ b > 0$$

es decir, un producto de dos factores es positivo si ambos tienen el mismo signo y es negativo si ambos tienen distinto signo.

Entonces para resolver una inecuación cuadrática, la factorizamos primero (esto es siempre posible determinando las raíces) y luego aplicamos la propiedad señalada.

Ejercicios resueltos

1. Resolvamos la inecuación: $x^2 - 5x + 6 > 0$

Factorizándola nos queda: $(x - 2)(x - 3) > 0$

Aplicando la propiedad, tenemos las siguientes condiciones:

i) $x - 2 > 0 \quad \wedge \quad x - 3 > 0$ o

ii) $x - 2 < 0 \quad \wedge \quad x - 3 < 0$

De i) obtenemos $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$
$x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$

Como deben cumplirse simultáneamente, la solución S_1 es la intersección de ambas soluciones parciales, es decir $S_i =]\,3, \infty[$

De ii) tenemos el siguiente sistema $x - 2 < 0$ y
$x - 3 < 0$

con lo cual obtenemos las condiciones $x < 2 \;\wedge\; x < 3$

la intersección de ambas es $S_2 =]-\infty, 2\,[$

La solución final es la unión de S_1 y S_2 (puesto que i) e ii) son situaciones independientes), es decir;

$S =]-\infty, 2\,[\cup]\,3, +\infty\,[$

En forma gráfica:

2. Resolvamos la inecuación $x(2x + 4) - (x^2 + 2x) - 35 \leq 0$

Factorizando tenemos: $(x + 7)(x - 5) \leq 0$

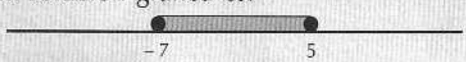
Aplicando la propiedad tenemos dos sistemas, que son:

i) $x + 7 \leq 0$ y ii) $x + 7 \geq 0$
$x - 5 \geq 0$ $\qquad x - 5 \leq 0$

De i) obtenemos $x \leq -7 \;\wedge\; x \geq 5$,
lo cual es una contradicción pues no hay ningún número que cumpla simultáneamente ambas condiciones.

De ii) obtenemos $x \geq -7$ y $x \leq 5$
lo que nos da como solución el intervalo $[-7, 5]$

la solución gráfica es:



3. Resolvamos la inecuación $2x^2 + 9x - 5 > 0$

Las raíces de la ecuación $2x^2 + 9x - 5 = 0$ son

$x_1 = \dfrac{1}{2}$ y $x_2 = -5$,

entonces podemos escribir (la ecuación) en la forma:

$$\left(x - \tfrac{1}{2}\right)\left(x + 5\right) = 0$$

Amplificándola por 2, nos queda la factorización correspondiente a la inecuación original, es decir, estudiamos:

$(2x - 1)(x + 5) > 0$

$$\text{i)}\quad \left.\begin{array}{l} 2x - 1 > 0 \rightarrow x > \dfrac{1}{2} \\ x + 5 > 0 \rightarrow x > -5 \end{array}\right\} \Rightarrow x > \frac{1}{2}\ (S_1)$$

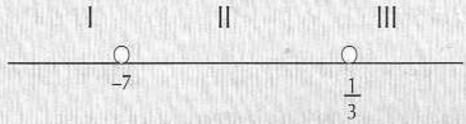
$$\text{ii)}\quad \left.\begin{array}{l} 2x - 1 < 0 \rightarrow x < \dfrac{1}{2} \\ x + 5 < 0 \rightarrow x < -5 \end{array}\right\} \Rightarrow x < -5\ (S_2)$$

$S = S_1 \cup S_2$, es decir
$S =]-\infty, -5[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[$
en forma gráfica:

4. Resolvamos la ecuación $3x^2 + 20x - 7 \geq 0$

Procedamos aquí de un modo diferente. Factorizando la expresión nos queda $(3x - 1)(x + 7) \geq 0$

Las raíces de la ecuación correspondiente son $x_1 = -7$ y $x_2 = \frac{1}{3}$
Ubicamos estos puntos en el eje real, obteniendo tres intervalos.



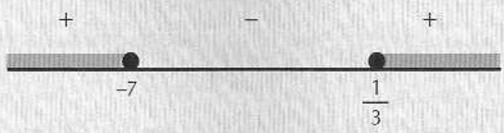
Los signos que se obtienen al reemplazar la variable x de la inecuación por un número real, van intercalados, es decir, cambian de un intervalo al intervalo siguiente. La razón es obvia.

Por esto sólo basta reemplazar la variable x por un valor cualquiera; esto nos determinará el signo del intervalo donde se encuentra ese valor y por consiguiente, el signo de los otros intervalos.

Veamos qué pasa con $x = 0$, (x pertenece al segundo intervalo).

$x = 0 \rightarrow 3x^2 + 20x - 7 < 0$

Entonces si x pertenece al segundo intervalo, la expresión es negativa allí y por lo tanto es positiva en el primer y tercer intervalo.
(y es igual a cero en los puntos -7 y $\frac{1}{3}$)



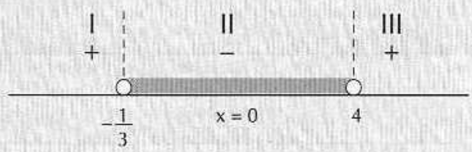
Así, la solución para $3x^2 + 20x - 7 \geq 0$ es

$S =]-\infty, -7] \cup [\frac{1}{3}, +\infty[$

5. Resolvamos la inecuación $3x^2 - 11x - 4 < 0$.

Las raíces de la ecuación asociada son $x_1 = -\frac{1}{3}$ y $x_2 = 4$

por lo tanto la factorización correspondiente es
$(3x + 1)(x - 4) < 0$.
Ubicamos las raíces en la recta real (en este caso estos valores no deben estar incluidos en la solución pues se trata de una desigualdad estricta) y analizamos lo que pasa para cualquier valor de la variable, por ejemplo para $x = 0$:



($x = 0$ pertenece al segundo intervalo)

Por lo tanto la solución pedida es: $S =]-\frac{1}{3}, 4[$

> **Nota:**
>
> Si $x = 0$, que pertenece al segundo intervalo, la inecuación queda:
>
> $$3 \cdot 0^2 - 11 \cdot 0 - 4 < 0$$
> $$-4 < 0$$
>
> como esto es verdadero el intervalo II es solución.

Ejercicios

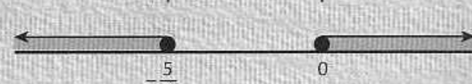
Resuelva las siguientes inecuaciones:

1. $x^2 - 1 \geq 0$
2. $8x^2 + 5x \geq 0$
3. $x(x - 3) - 2x(x - 2) + 3x < 0$
4. $4x^2 < 1$
5. $3x^2 - 5x < 0$
6. $x(x - 5) - 2x(x + 3) + 6 \leq x^2 - 11x$
7. $x^2 - 13x + 40 < 0$
8. $2x^2 + 3 \leq 7x$
9. $2x^2 - 3x - 36 > x^2 + 2x$
10. $3x^2 + 16x - 12 < 0$
11. $4x(x + 3) \geq -5$
12. $3(2x^2 + 1) > 11x$
13. $x(3x - 4) > 7$
14. $5x^2 + 4x - 1 \leq 0$
15. $(x - 2)^2 \leq 2(x^2 + 2)$
16. $x^2 - 10x + 25 < 0$
17. $4x(x - 4) + 7 \geq 0$
18. $\dfrac{x+2}{2x-1} - \dfrac{x}{x-2} + 2 \leq 0$
19. $\dfrac{2x}{x+12} - \dfrac{x}{x+3} + \dfrac{5}{(x+12)(x+3)} \geq 0$
20. $\dfrac{x+1}{x-1} + \dfrac{x+2}{2x+1} \leq \dfrac{x+3}{x-1}$

Soluciones

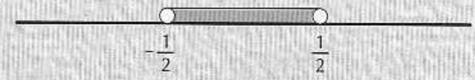
1. $S =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

2. $S = \left]-\infty, -\frac{5}{8}\right] \cup [0, +\infty[$

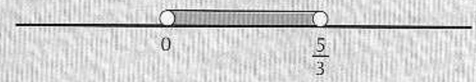


3. $S =]-\infty, 0\,[\cup]\,4, +\infty\,[$

4. $S = \left]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right[$



5. $S = \left]0, \frac{5}{3}\right[$



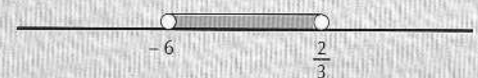
6. $S =]-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty[$

7. $S =]\,5, 8\,[$

8. $S = \left[\frac{1}{2}, 3\right]$

9. $S =]-\infty, -4\,[\cup]\,9, +\infty[$

10. $S = \left]-6, \frac{2}{3}\right[$

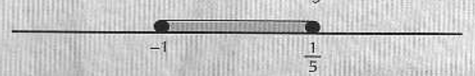


11. $S = \left]-\infty, -\frac{5}{2}\right] \cup \left[\frac{-1}{2}, +\infty\right[$

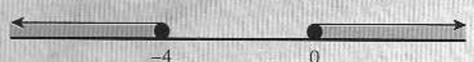
12. $S = \left]-\infty, \frac{1}{3}\right[\cup \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$

13. $S =]-\infty, -1[\, \cup \left]\frac{7}{3}, +\infty\right[$

14. $S = \left[-1, \frac{1}{5}\right]$



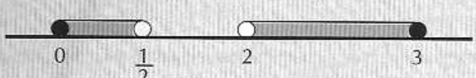
15. $S =]-\infty, -4] \cup [0, +\infty[$



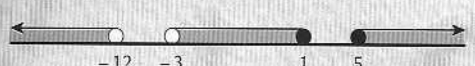
16. $S = \varnothing$

17. $S = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{7}{2}, +\infty\right[$

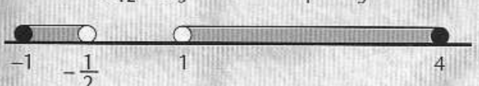
18. $S = \left[0, \frac{1}{2}\right[\cup\ ]2, 3]$



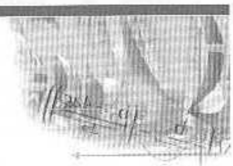
19. $S =]-\infty, -12\,[\cup]-3, 1\,] \cup [\,5, +\infty\,[$



20. $S = \left[-1, -\frac{1}{2}\right[\cup\ ]1, 4]$



Sistemas de ecuaciones de segundo grado 4.4



Un sistema de ecuaciones en dos variables es de segundo grado si alguna de las ecuaciones contiene alguno de los términos x^2, y^2 o xy (suponiendo que las variables son x e y por supuesto).

No hay métodos generales que puedan ser aplicados en forma práctica a todos los sistemas.

Veremos aquí algunos tipos de ellos.

4.4.1 Sistemas que contienen una ecuación lineal y una ecuación cuadrática

Para resolverlo, despejamos una de las variables de la ecuación lineal y la sustituimos en la ecuación cuadrática.

Ejercicios resueltos

1. Resolvamos: $\left.\begin{array}{rcl} 2x + y & = & 10 \\ x^2 - y^2 & = & 12 \end{array}\right|$

Despejemos la variable "y" de la primera ecuación:

$y = 10 - 2x$

Reemplacemos en la segunda ecuación la variable "y" despejada. Obtenemos:

$x^2 - (10 - 2x)^2 = 12$

$x^2 - (100 - 40x + 4x^2) = 12$

Ordenando los términos tenemos la siguiente ecuación cuadrática:

$3x^2 - 40x + 112 = 0$

cuyas soluciones son: $x_1 = 4$ y $x_2 = \frac{28}{3}$

Si $\begin{array}{l} x_1 = 4 \rightarrow y_1 = 2 \\ x_2 = \frac{28}{3} \rightarrow y_2 = -\frac{26}{3} \end{array}$

La solución de la ecuación es el conjunto

$S = \left\{ (4, 2), \left(\frac{28}{3}, -\frac{26}{3}\right) \right\}.$

Notemos que la solución de este tipo de sistemas puede estar formada por 2 puntos, 1 punto o ninguno (geométricamente representa la intersección de una línea recta con una cónica, o bien, la intersección de dos cónicas).

Ejercicios resueltos

2. Resolvamos el sistema: $\begin{cases} x + y = 6 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$

Despejamos la variable x (o la variable "y") de la primera ecuación y obtenemos:

$x = 6 - y$

y la reemplazamos en la segunda ecuación:

$(6 - y)^2 + y^2 = 16$

$2y^2 - 12y + 20 = 0$ o $y^2 - 6y + 10 = 0$

las soluciones algebraicas de esta ecuación son los puntos

$y_1 = 3 + i$ y $y_2 = 3 - i$

y por lo tanto

$x_1 = 3 - i$; $y_1 = 3 + i$

$x_2 = 3 + i$; $y_2 = 3 - i$

geométricamente el sistema no tiene solución.

3. Resolvamos el sistema: $\begin{cases} x - y = 7 \\ xy = -10 \end{cases}$

Despejando la variable "y" de la primera ecuación:

$y = x - 7$

y reemplazándola en la segunda: $x(x - 7) = -10$

$x^2 - 7x + 10 = 0$

las soluciones de la ecuación son: $x_1 = 2$ y $x_2 = 5$.

Si $x = 2$ entonces $y = -5$

$x = 5$ entonces $y = -2$

y la solución del sistema es: $S = \{(2, -5), (5, -2)\}$

Ejercicios

Resuelva los siguientes sistemas:

1. $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x - 2y = 7 \\ x^2 - y = 26 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ x - y^2 = -8 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x - y = 9 \\ 2xy = -40 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x + y = -6 \\ x^2 + 2y = 0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ 2x^2 - y^2 = 23 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x + 4y = 18 \\ 4xy = -40 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 5x - y = 8 \\ -2xy = 6 \end{cases}$

10. $\begin{array}{l} x + 5y = -1 \\ x^2 + 3xy = 27 \end{array}$

11. $\begin{array}{l} 3x + y = 2 \\ 9x^2 - 9y^2 = -8 \end{array}$

12. $\begin{array}{l} x - 2y = 0 \\ 2xy = 1 \end{array}$

13. $\begin{array}{l} 3x + 4y = 0 \\ -4xy = \dfrac{1}{3} \end{array}$

14. $\begin{array}{l} 2x + y = 11 \\ x^2 - xy = 4 \end{array}$

15. $\begin{array}{l} 3x + y - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 - xy = 3 \end{array}$

16. $\begin{array}{l} 2x + y = -8 \\ x^2 - y^2 = 5 \end{array}$

17. $\begin{array}{l} 5x + y = 17 \\ \dfrac{x^2 - y^2}{5} = 1 \end{array}$

18. $\begin{array}{l} 2x + 3y = 5 \\ x^2 - xy + y^2 = \dfrac{61}{36} \end{array}$

19. $\begin{array}{l} x - 2y = \dfrac{16}{15} \\ x^2 + 3xy = -\dfrac{6}{25} \end{array}$

20. $\begin{array}{l} x + y = 12 \\ x + y - xy = -8 \end{array}$

Soluciones

1. $(4, 2)$; $(-2, -4)$
2. $(1, 2)$; $\left(\frac{11}{5}, \frac{-2}{5}\right)$
3. $(5, -1)$; $\left(\frac{-9}{2}, \frac{-23}{4}\right)$
4. $(1, -3)$; $\left(\frac{-7}{4}, \frac{5}{2}\right)$
5. $(5, -4)$; $(4, -5)$
6. $(-2, -2)$; $(6, -18)$
7. $(4, 3)$; $(32, 45)$
8. $(-2, 5)$; $(20, \frac{-1}{2})$
9. $(1, -3)$; $(\frac{3}{5}, -5)$
10. $(9, -2)$; $\left(\frac{-15}{2}, \frac{13}{10}\right)$
11. $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$; $\left(\frac{7}{6}, \frac{-3}{2}\right)$
12. $\left(1, \frac{1}{2}\right)$; $\left(-1, \frac{-1}{2}\right)$
13. $\left(\frac{1}{3}, \frac{-1}{4}\right)$; $\left(\frac{-1}{3}, \frac{1}{4}\right)$
14. $(4, 3)$; $\left(\frac{-1}{3}, \frac{35}{3}\right)$
15. $(1, 2)$; $\left(\frac{22}{3}, \frac{-1}{13}\right)$
16. $(-3, -2)$; $\left(\frac{-23}{3}, \frac{22}{3}\right)$
17. $(3, 2)$; $\left(\frac{49}{12}, \frac{-41}{12}\right)$
18. $\left(\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right)$; $\left(\frac{13}{38}, \frac{82}{57}\right)$
19. $\left(\frac{2}{5}, \frac{-1}{3}\right)$; $\left(\frac{6}{25}, \frac{-31}{75}\right)$
20. $(2, 10)$; $(10, 2)$

4.4.2 Sistemas en que ambas ecuaciones son de la forma $ax^2 \pm by^2 = c$

(No hay términos de primer grado, ni el término xy).
Lo más práctico en estos casos es proceder por reducción de variables y como sabemos, esto se logra con una adecuada amplificación de las ecuaciones:

Ejercicios resueltos

1. Resolvamos el sistema: $\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 41 \\ x^2 - y^2 = 9 \end{array}$

Podemos reducir la variable "y" en forma inmediata sumando ambas ecuaciones.

Nos queda: $2x^2 = 50$
$x^2 = 25$

y las soluciones para la variable x son: $x_1 = 5$ y $x_2 = -5$
Si $x_1 = 5$ entonces, reemplazando en la primera ecuación,
obtenemos: $y^2 = 41 - 25$
$y^2 = 16$
$y = \pm 4$
Lo mismo ocurre si $x = -5$.

La solución del sistema, entonces, consiste en 4 puntos que son:
$5 = \{(5, 4), (5, -4), (-5, 4), (-5, -4)\}$

2. Resolvamos el sistema:
$$\begin{array}{r} 2x^2 - y^2 = 1 \\ 3x^2 + 2y^2 = 5 \end{array}$$

Aquí para eliminar la variable y^2 podemos amplificar la primera ecuación por 2, y luego sumamos ambas ecuaciones:

$$+\left\{\begin{array}{r} 4x^2 - 2y^2 = 2 \\ 3x^2 + 2y^2 = 5 \end{array}\right.$$
$$7x^2 = 7$$

Y las soluciones para la variable x son: $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$
Si $x = 1$ entonces, $y \pm 1$
Si $x = -1$ entonces, $y \pm 1$

y la solución del sistema está dada por:
$S = \{(1,1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)\}$

3. Resolvamos el sistema:
$$\begin{array}{r} 3x^2 - 2y^2 = 3 \\ x^2 - 3y^2 = -13 \end{array}$$

Amplificando la segunda ecuación por (-3) y sumando ambas ecuaciones obtenemos:

$$+\left\{\begin{array}{r} 3x^2 - 2y^2 = 3 \\ -3x^2 + 9y^2 = 39 \end{array}\right.$$
$$7y^2 = 42$$
$$y^2 = 6$$

Las soluciones para la variable y son: $y_1 = \sqrt{6}$; $y_2 = -\sqrt{6}$

Y sustituyendo estos valores en cualquier ecuación del sistema obtenemos para x los valores $x_1 = \sqrt{5}$ $x_2 = -\sqrt{5}$

La solución del sistema es, entonces:
$5 = \{(\sqrt{5}, \sqrt{6}), (\sqrt{5}, -\sqrt{6}), (-\sqrt{5}, \sqrt{6}), (-\sqrt{5}, -\sqrt{6})\}$

Ejercicios

Resolver los siguientes sistemas:

1. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 72 \\ x^2 - y^2 = 60 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 22 \\ x^2 - 2y^2 = 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 124 \\ 2x^2 + 3y^2 = 120 \end{cases}$

5. $\begin{cases} -5x^2 + y^2 = -20 \\ -3y^2 = -75 \end{cases}$

6. $\begin{cases} -5x^2 + 3y^2 = 172 \\ x^2 - y^2 = -60 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 = 194 \\ 3x^2 + y^2 = 379 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 4x^2 - 5y^2 = -8 \\ x^2 + 3y^2 = 49 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 1 \\ 2x^2 + y^2 = 7 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 27 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 6x^2 - 5y^2 = 3x^2 - 2y^2 \\ x^2 = 2y^2 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 7 \\ 4x^2 - 7y^2 = 6 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 6x^2 - 2y^2 = x^2 + y^2 - 4 \\ 3x^2 - y^2 = 4 \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2}{2} = 17 \\ \dfrac{x^2 - y^2}{4} = 4 \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dfrac{3x^2 + 2y^2}{4} = \dfrac{7}{4} \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases}$

Soluciones

1. $S = \{(2, 1), (2, -1), (-2, 1), (-2, -1)\}$
2. $S = \{(8, 2), (8, -2), (-8, 2), (-8, -2)\}$
3. $S = \{(3, 2), (3, -2), (-3, 2), (-3, -2)\}$
4. $S = \{(6, 4), (6, -4), (-6, 4), (-6, -4)\}$
5. $S = \{(3, 5), (-3, -5), (3, -5), (-3, 5)\}$
6. $S = \{(2, 8), (2, -8), (-2, 8), (-2, -8)\}$
7. $S = \{(11, 4), (11, -4), (-11, 4), (-11, -4)\}$
8. $S = \{(\sqrt{13}, \sqrt{12}), (\sqrt{13}, -\sqrt{12}), (-\sqrt{13}, \sqrt{12}), (-\sqrt{13}, -\sqrt{12})\}$
9. $S = \{(\sqrt{2}, \sqrt{3}), (\sqrt{2}, -\sqrt{3}), (-\sqrt{2}, \sqrt{3}), (-\sqrt{2}, -\sqrt{3})\}$
10. $S = \{(\sqrt{6}, \sqrt{5}), (\sqrt{6}, -\sqrt{5}), (-\sqrt{6}, \sqrt{5}), (-\sqrt{6}, -\sqrt{5})\}$
11. $S = \{(0, 0)\}$
12. $S = \{(\sqrt{5}, \sqrt{2}), (\sqrt{5}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{5}, \sqrt{2}), (-\sqrt{5}, -\sqrt{2})\}$
13. $S = \{(2, \sqrt{8}), (2, -\sqrt{8}), (-2, \sqrt{8}), (-2, -\sqrt{8})\}$
14. $S = \{(5, 3), (5, -3), (-5, 3), (-5, -3)\}$
15. $S = \{(1, \sqrt{2}), (1, -\sqrt{2}), (-1, \sqrt{2}), (-1, -\sqrt{2})\}$

4.4.3 Sistemas formados por una ecuación de la forma $x^2 \pm y^2 = a$ y la otra ecuación de la forma $x\,y = b$.

Una manera práctica de resolver estos sistemas es completando cuadrados de binomio y reduciendo la solución del sistema de 2° grado a sistemas lineales (o de 1er grado).

Ejercicios resueltos

1. Resolvamos el sistema:
$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=34 \\ xy=15 \end{array}\right|$$

Amplificando la segunda ecuación por 2, y sumando las ecuaciones, y luego restando, obtenemos:

$$+\left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2 &=& 34 \\ 2xy &=& 30 \end{array}\right. \qquad -\left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2 &=& 34 \\ 2xy &=& 30 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rcl} x^2+2\,xy+y^2 &=& 64 \\ \Rightarrow (x+y)^2 &=& 64 \\ x+y &=& \pm 8 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x^2-2xy+y^2 &=& 4 \\ \Rightarrow (x-y)^2 &=& 4 \\ x-y &=& \pm 2 \end{array}$$

y nos quedan cuatro sistemas, de solución casi inmediata, que son:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=8 \\ x-y=2 \end{array}\right| \qquad \left.\begin{array}{r} x+y=\;\;8 \\ x-y=-2 \end{array}\right| \qquad \left.\begin{array}{r} x+y=-8 \\ x-y=2 \end{array}\right| \qquad \left.\begin{array}{r} x+y=-8 \\ x-y=-2 \end{array}\right|$$

y las soluciones son respectivamente:

(5, 3); (3, 5); (– 3, – 5); (– 5, – 3)

La solución del sistema es la unión de todas ellas.

$S = \{(5, 3); (3, 5); (-3, -5); (-5, -3)\}$

2. Resolvamos el sistema:
$$\left.\begin{array}{rcl} x^2+y^2 &=& 15 \\ xy &=& 6 \end{array}\right|$$

Repitiendo el procedimiento anterior tenemos:

$$+\left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2 &=& 15 \\ 2\,xy &=& 12 \end{array}\right. \qquad -\left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2 &=& 15 \\ 2\,xy &=& 12 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rcl} x^2+2\,xy+y^2 &=& 27 \\ (x+y)^2 &=& 27 \\ x+y &=& \pm\sqrt{27} = \pm 3\sqrt{3} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x^2-2xy+y^2 &=& 3 \\ (x-y)^2 &=& 3 \\ x-y &=& \pm\sqrt{3} \end{array}$$

Los sistemas lineales asociados al sistema original son:

$$\left.\begin{aligned} x+y &= 3\sqrt{3} \\ x-y &= \sqrt{3} \end{aligned}\right| \quad \left.\begin{aligned} x+y &= 3\sqrt{3} \\ x-y &= -\sqrt{3} \end{aligned}\right| \quad \left.\begin{aligned} x+y &= -3\sqrt{3} \\ x-y &= \sqrt{3} \end{aligned}\right| \quad \left.\begin{aligned} x+y &= -3\sqrt{3} \\ x-y &= -\sqrt{3} \end{aligned}\right|$$

y las soluciones son, respectivamente:

$$x_1 = 2\sqrt{3} \qquad x_2 = \sqrt{3} \qquad x_3 = -\sqrt{3} \qquad x_4 = -2\sqrt{3}$$

$$y_1 = \sqrt{3} \qquad y_2 = 2\sqrt{3} \qquad y_3 = -2\sqrt{3} \qquad y_4 = -\sqrt{3}$$

Y la solución del sistema es:

$$S = \{(2\sqrt{3}, \sqrt{3}); (\sqrt{3}, 2\sqrt{3}); (-\sqrt{3}, -2\sqrt{3}); (-2\sqrt{3}, -\sqrt{3})\}$$

Observación: Las soluciones de estos sistemas están en el conjunto de los números reales, es decir, no se aceptan como soluciones raíces de números negativos.

3. Resolvamos el sistema: $\left.\begin{aligned} x^2+y^2 &= -4 \\ xy &= 2 \end{aligned}\right|$

Si procedemos en forma análoga a los ejemplos anteriores, obtenemos:

$$+\left\{\begin{aligned} x^2+y^2 &= -4 \\ 2xy &= 4 \end{aligned}\right| \qquad\qquad -\left\{\begin{aligned} x^2+y^2 &= -4 \\ 2xy &= 4 \end{aligned}\right|$$

$$\begin{aligned} x^2+2xy+y^2 &= 0 \\ (x+y)^2 &= 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x^2-2xy+y^2 &= -8 \\ (x-y)^2 &= -8 \end{aligned}$$

Y los sistemas asociados serían:

$$\left.\begin{aligned} x+y &= 0 \\ x-y &= \sqrt{-8} \end{aligned}\right| \qquad\qquad \left.\begin{aligned} x+y &= 0 \\ x-y &= -\sqrt{-8} \end{aligned}\right|$$

Y sus soluciones estarían dadas por:

$$x_1 = \frac{\sqrt{-8}}{2} \qquad x_2 = \frac{-\sqrt{-8}}{2}$$

$$y_1 = \frac{-\sqrt{-8}}{2} \qquad y_2 = \frac{\sqrt{-8}}{2}$$

las cuales **no** son números reales. Decimos entonces que el sistema no tiene solución en $\mathbb{R}$.

Nota: Una simple inspección en el sistema original nos habría determinado de inmediato la no existencia de solución real del sistema, pues una propiedad elemental de los números reales es:

$x^2 \geq 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$

¿Qué conclusión se obtiene?

Ejercicios

Resolver los siguientes sistemas:

1. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 26 \\ xy = 5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ xy = 6 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 30 \\ 2xy = 18 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 85 \\ 3xy = 54 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 50 \\ xy = 12 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 40 \\ 5xy = 60 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 58 \\ -2xy = -42 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 97 \\ \dfrac{xy}{6} = 6 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 5x^2 + 5y^2 = 185 \\ \dfrac{-xy}{3} = -2 \end{cases}$

10. $\begin{cases} -x^2 - y^2 = -61 \\ \dfrac{xy}{5} = 6 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x^2 + y^2 = -6 \\ \dfrac{xy}{3} = -8 \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2}{3} = 15 \\ xy = 18 \end{cases}$

13. $\begin{cases} -2x^2 - 2y^2 = -100 \\ xy = 25 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x^2 + y^2 = -2 \\ xy = 6 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ xy = 2 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 11 \\ xy = 0 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 153 \\ \dfrac{-xy}{4} = -9 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x^2 + y^2 = -1 \\ xy = -1 \end{cases}$

Soluciones

1. $S = \{(5, 1); (1, 5); (-5, -1); (-1, -5)\}$
2. $S = \{(\sqrt{18}, \sqrt{2}); (-\sqrt{18}, -\sqrt{2}); (\sqrt{2}, \sqrt{18}); (-\sqrt{2}, -\sqrt{18})\}$
3. $S = \{(\sqrt{3}, \sqrt{27}); (-\sqrt{3}, -\sqrt{27}); (\sqrt{27}, \sqrt{3}); (-\sqrt{27}, -\sqrt{3})\}$
4. $S = \{(9, 2); (-9, -2); (2, 9); (-2, -9)\}$
5. $S = \{(3, 4); (-3, -4); (4, 3); (-4, -3)\}$
6. $S = \{(6, 2); (-6, -2); (2, 6); (-2, -6)\}$
7. $S = \{(7, 3); (-7, -3); (3, 7); (-3, -7)\}$
8. $S = \{(9, 4); (-9, -4); (4, 9); (-4, -9)\}$
9. $S = \{(1, 6); (-1, -6); (6, 1); (-6, -1)\}$
10. $S = \{(6, 5); (5, 6); (-6, -5); (-5, -6)\}$

11. $S = \varnothing$ 12. $S = \{(3, 6); (6, 3); (-3, -6); (-6, -3)\}$ 13. $S = \{(5, 5); (-5, -5)\}$

14. $S = \varnothing$ 15. $S = \varnothing$ 16. $S = \{(0, \sqrt{11}); (0, -\sqrt{11}); (\sqrt{\frac{11}{3}}, 0); (-\sqrt{\frac{11}{3}}, 0)\}$

17. $S = \{(12, 3); (-12, -3); (3, 12); (-3, -12)\}$ 18. $S = \varnothing$

4.4.4 Sistemas homogéneos formados por ecuaciones cuyos términos son todos de segundo grado

(Es decir, contienen términos x^2, y^2, xy)
Para resolver estos sistemas usamos el cambio de variable $y = \lambda x$, y así reducimos el problema de resolver un sistema de segundo grado (con 2 variables) en una ecuación de segundo grado (con una variable).

Ejercicios resueltos

1. Resolvamos el sistema:
$$\begin{array}{r|} x^2 + y^2 = 50 \\ x^2 + xy = 56 \\ \hline \end{array}$$

Hagamos el cambio de variable indicado: $y = \lambda x$, y sustituyamos en ambas ecuaciones.

$$x^2 + \lambda^2 x^2 = 50$$
$$x^2 + \lambda x^2 = 56$$

Factorizando ambas ecuaciones por x^2 y luego dividiéndolas obtenemos:

$$: \left\{ \begin{array}{r|} x^2 (1+ \lambda^2) = 50 \\ x^2 (1 + \lambda) = 56 \\ \hline \end{array} \right.$$
$$\frac{1+\lambda^2}{1+\lambda} = \frac{50}{56}$$

lo cual da origen a la siguiente ecuación cuadrática en la variable λ:

$$56 + 56\lambda^2 = 50 + 50\lambda$$
$$56\lambda^2 - 50\lambda + 6 = 0$$
$$\text{o} \quad 28\lambda^2 - 25\lambda + 3 = 0$$

resolviendo la ecuación, obtenemos para λ las siguientes soluciones:

$$\lambda_1 = \frac{3}{4} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = \frac{1}{7}$$

Para $\lambda_1 = \frac{3}{4}$ tenemos $y = \frac{3}{4} x$

sustituyendo en la segunda ecuación (o en la primera),

obtenemos: $$x^2 + x \cdot \frac{3}{4} x = 56$$

$$4x^2 + 3x^2 = 224$$
$$7x^2 = 224$$
$$x^2 = 32$$
$$x = \pm\sqrt{32} = \pm 4\sqrt{2}$$

Si $x_1 = 4\sqrt{2} \rightarrow \quad y_1 = 3\sqrt{2} \qquad (y = \frac{3}{4} x)$

Si $x_2 = -4\sqrt{2} \rightarrow \quad y_2 = -3\sqrt{2}$

Para $\lambda_2 = \frac{1}{7}$ tenemos $y = \frac{1}{7}x$.

Sustituyendo en la 2ª ecuación, obtenemos:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{1}{7}x^2 &= 56 \\ 7x^2 + x^2 &= 392 \\ x^2 &= 49 \\ x &= \pm 7 \end{aligned}$$

Si $x_3 = 7 \longrightarrow y_3 = 1 \quad (y = \frac{1}{7}x)$

$x_4 = -7 \longrightarrow y_4 = -1$

La solución del sistema es, entonces:

$S = \{(4\sqrt{2},\ 3\sqrt{2}),\ (-4\sqrt{2}, -3\sqrt{2}),\ (7, 1),\ (-7, -1)\}$

2. Apliquemos el mismo procedimiento para resolver:

$$\left.\begin{aligned} 2x^2 + y^2 &= 33 \\ y^2 - xy &= 15 \end{aligned}\right|$$

Primero hacemos la sustitución $y = \lambda x$ y reemplazamos:

$$\left.\begin{aligned} 2x^2 + \lambda^2 x^2 &= 33 \\ \lambda^2 x^2 - \lambda x^2 &= 15 \end{aligned}\right|$$

Factorizamos por x^2 y dividimos ambas ecuaciones:

$$\begin{aligned} x^2(2 + \lambda^2) &= 33 \\ x^2(\lambda^2 - \lambda) &= 15 \\ \frac{2+\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda} &= \frac{33}{15} \end{aligned}$$

Formamos la ecuación cuadrática en la variable λ:

$$\begin{aligned} 30 + 15\lambda^2 &= 33\lambda^2 - 33\lambda \\ 18\lambda^2 - 33\lambda - 30 &= 0 \\ 6\lambda^2 - 11\lambda - 10 &= 0 \end{aligned}$$

las soluciones son $\lambda_1 = \frac{5}{2}$ y $\lambda_2 = -\frac{2}{3}$

Para $\lambda_1 = \frac{5}{2}$ tenemos $y = \frac{5}{2}x$

sustituyendo en la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{25}{4}x^2 - \frac{5}{2}x^2 &= 15 \\ 25x^2 - 10x^2 &= 60 \\ 15x^2 &= 60 \\ x^2 &= 4 \longrightarrow x_1 = 2,\quad x_2 = -2 \end{aligned}$$

$x_1 = 2 \longrightarrow y_1 = 5$

$x_2 = -2 \longrightarrow y_2 = -5$

Para $\lambda_2 = -\frac{2}{3}$ tenemos: $y = -\frac{2}{3}x$

sustituyendo:
$$\frac{4}{9}x^2 + \frac{2}{3}x^2 = 15$$
$$4x^2 + 6x^2 = 135$$
$$10x^2 = 135$$
$$x^2 = \frac{135}{10} = \frac{27}{2} \longrightarrow x_3 = 3\sqrt{\frac{3}{2}}, \quad x_4 = -3\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$x_3 = 3\sqrt{\frac{3}{2}} \longrightarrow y_3 = -2\sqrt{\frac{3}{2}}$$
$$x_4 = -3\sqrt{\frac{3}{2}} \longrightarrow y_4 = 2\sqrt{\frac{3}{2}}$$

y la solución está dada por el conjunto:

$$S = \left\{(2, 5), (-2, -5), \left(3\sqrt{\frac{3}{2}}, -2\sqrt{\frac{3}{2}}\right), \left(-3\sqrt{\frac{3}{2}}, 2\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right\}$$

Ejercicios

Resolver los siguientes sistemas:

1. $x^2 - y^2 = -7$; $xy = 12$

2. $x^2 + y^2 = 41$; $x^2 - xy = -4$

3. $2x^2 - y^2 = -34$; $xy = 6$

4. $x^2 - 3y^2 = 13$; $xy = 10$

5. $2x^2 + 3y^2 = -4$; $x^2 - xy = 12$

6. $x^2 + xy + y^2 = 26$; $\frac{x^2 - y^2}{4} = 4$

7. $3x^2 - 2y^2 = -24$; $\frac{2xy + y^2}{6} = 14$

8. $x^2 - 2xy - y^2 = 41$; $x^2 + 3xy - y^2 = 131$

Soluciones

1. $S = \{(3, 4), (-3, -4)\}$
2. $S = \{(4, 5), (-4, -5)\ (\sqrt{0{,}5}, \sqrt{40{,}5}); (-\sqrt{0{,}5}, -\sqrt{40{,}5})\}$
3. $S = \{(1, 6), (-1, -6)\}$
4. $S = \{(5, 2), (-5, -2)\}$
5. $S = \varnothing$
6. $S = \{(\sqrt{18}, \sqrt{2}), (-\sqrt{18}, -\sqrt{2})\}$
7. $S = \{(4, 6), (-4, -6)\}$
8. $S = \{(9, 2), (-9, -2)\}$

4.4.5 Otros sistemas y problemas

Resolveremos aquí algunos problemas cuyo planteamiento corresponde a un sistema de ecuaciones de segundo grado.

Hay oprtunidades en que las ecuaciones de 2° grado son la expresión de dos rectas que se intersectan y por lo tanto la solución del sistema puede ser única si el punto en que se intersectan las cuatro rectas coincide; o vacío en el caso en que la cuatro rectas no concurran en el mismo punto. (ver ejercicios 4 y 5)

Ejercicios resueltos

1. La suma de dos números es 11 y la suma de sus cuadrados es 65. Determine dichos números.
Sean x e y los números pedidos. Tenemos entonces:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 11 \\ x^2 + y^2 &= 65 \end{aligned}\right|$$

Resolviendo el sistema por sustitución, nos queda: $y = 11 - x$.

$$\begin{aligned} x^2 + (11 - x)^2 &= 65 \\ x^2 + 121 - 22x + x^2 &= 65 \\ 2x^2 - 22x + 56 &= 0 \\ x^2 - 11x + 28 &= 0 \end{aligned}$$

las soluciones para x son; $x_1 = 7$ y $x_2 = 4$

Si $x_1 = 7 \rightarrow y_1 = 4$
$x_2 = 4 \rightarrow y_2 = 7$

y los números pedidos son $x = 7$, $y = 4$
(por la naturaleza del problema, no es necesario en este caso tomar en cuenta la segunda solución).

2. El perímetro de un rectángulo es 20 cm y su área mide 24 cm^2. Determine sus dimensiones.
Llamemos x al largo del rectángulo e y al ancho. Tenemos el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 2y &= 20 \text{ cm} \\ xy &= 24 \text{ cm}^2 \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} &(\text{Perímetro}) \\ &(\text{Área}) \end{aligned}$$

Despejamos "y" de la primera ecuación: $y = (10 - x)$ cm
y lo reemplazamos en la segunda:

$$\begin{aligned} x\,(10 - x) &= 24 \\ 10x - x^2 &= 24 \qquad \text{o} \qquad x^2 - 10x + 24 = 0 \end{aligned}$$

las soluciones para x son; $x_1 = 6$ y $x_2 = 4$

Si $x = 6 \rightarrow y = 4$
$x = 4 \rightarrow y = 6$

Por lo tanto las dimensiones del rectángulo son 6 cm de largo y 4 cm de ancho.

3. La suma de dos números es $\frac{7}{10}$ y la suma de sus recíprocos es 7. Determine dichos números.

Sean x e y los números. Entonces:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= \frac{7}{10} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= 7 \end{aligned}\right|$$

Procediendo algebraicamente tenemos:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= \frac{7}{10} \\ \frac{x+y}{xy} &= 7 \end{aligned}\right| \rightarrow \quad \left.\begin{aligned} x + y &= \frac{7}{10} \\ x + y &= 7\,x\,y \end{aligned}\right| \rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} x + y &= \frac{7}{10} \\ xy &= \frac{1}{10} \end{aligned}\right| \rightarrow \quad y = \frac{7}{10} - x$$

$$x\left(\frac{7}{10} - x\right) = \frac{1}{10} \rightarrow \frac{7}{10}x - x^2 = \frac{1}{10} \rightarrow 7x - 10x^2 = 1$$

$$10x^2 - 7x + 1 = 0 \quad \begin{aligned} &\nearrow x_1 = \frac{1}{2} \\ &\searrow x_2 = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Si $\quad x_1 = \frac{1}{2}$ entonces $y_1 = \frac{7}{10} - \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$

$\quad x_2 = \frac{1}{5}$ entonces $y_2 = \frac{7}{10} - \frac{1}{5} = \frac{1}{2}$

y los números pedidos son; $x = \frac{1}{2}$ e $y = \frac{1}{5}$

4. Resolvamos el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + 4y^2 &= 0 \\ 9x^2 + 16y^2 &= 0 \end{aligned}\right| \begin{aligned} &(1) \\ &(2) \end{aligned}$$

Algebraicamente vemos que en (1) $x^2 = 4y^2$ y reemplazando en (2):

$$\begin{aligned} 9 \cdot 4y^2 - 16y^2 &= 0 \\ 32y^2 - 16y^2 &= 0 \\ 16y^2 &= 0 \\ y^2 &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

En (1) $\quad \begin{aligned} x^2 - 4 \cdot 0 &= 0 \\ x^2 &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$

Por lo tanto, la única solución es (0, 0).

Ejercicios resueltos

Analíticamente vemos que:

(1): $x^2 - 4y^2 = 0$

$(x + 2y)(x - 2y) = 0$

representa las rectas

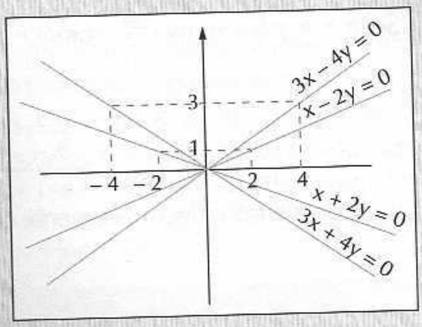
$x + 2y = 0$ y $x - 2y = 0$

(2): $9x^2 - 16y^2 = 0$

$(3x + 4y)(3x - 2y) = 0$

representa las rectas

$3x + 4y = 0$ y $3x - 4y = 0$



Las cuatro rectas se intersectan en el punto (0, 0)

5. Resolvamos el sistema:

$$\begin{array}{r|l} 4x^2 - y^2 + 6y - 9 = 0 & (1) \\ x^2 - 4y^2 + 24y - 36 = 0 & (2) \end{array}$$

Observamos que para eliminar "y" debemos amplificar la primera ecuación por –4 y sumamos:

$$\begin{array}{r|l} -16x^2 + 4y^2 - 24y + 36 = 0 & (1) \\ x^2 - 4y^2 + 24y - 36 = 0 & (2) \\ \hline -15x^2 = 0 & \\ x^2 = 0 & \\ x = 0 & \end{array}$$

Sustituyendo x por su valor 0, en cualquiera de las ecuaciones del sistema obtenemos que y = 3

Luego, la única solución del sistema es (0, 3)

Otra forma: Analíticamente vemos que si despejamos "y" en la primera ecuación:

$$y^2 - 6y + 9 - 4x^2 = 0$$

$$y = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4(9 - 4x^2)}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36 + 16x^2)}}{2}$$

$$= \frac{6 \pm 4x}{2} \quad \begin{cases} y_1 = 3 + 2x \\ y_2 = 3 - 2x \end{cases}$$

ecuaciones que corresponden a dos rectas que se intersectan en el punto (0, 3).

En forma análoga, podemos ver que la segunda ecuación, $x^2 - 4y^2 + 24y - 36 = 0$ corresponde a las rectas

$y = \frac{1}{2}x + 3$ y $y = -\frac{1}{2}x + 3$, las cuales también se intersectan en el punto (0, 3).

Ejercicios

1. La suma de dos números es 12 y la diferencia de sus cuadrados es 24. Determine dichos números.

2. La diferencia de dos números es –5 y la suma de sus cuadrados es 97. Determine dichos números.

3. La diferencia de dos números es 5 y la diferencia de sus cuadrados es 55. Determínelos.

4. La suma de dos números es 25 y la diferencia de sus cuadrados es 25. Determínelos.

5. El cuadrado de la suma de dos números es 100 y el producto de ellos es 24. ¿Cuáles son?

6. El cuadrado de la suma de dos números es 225 y su cociente es 4. ¿Cuáles son esos números?

7. El cuadrado de la diferencia de dos números es 25 y el producto de ellos es 36. ¿Cuáles son?

8. Dos números están en la razón 1:3 y la diferencia de sus cuadrados es –200. ¿Cuáles son?

9. Dos números están en la razón 2:3 y el triple del cuadrado del primero menos el cuadrado del segundo es 27. ¿Cuáles son los números?

10. La suma del cuadrado de un número más el quíntuple del cuadrado de otro es 49, y la diferencia entre el triple del cuadrado del primero y el cuadrado del segundo es 3. ¿Cuáles son los números?

11. El doble del cuadrado de un número menos el triple del cuadrado de otro es 23 y el producto de ambos es 15. Determine dichos números.

12. Determine las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su perímetro es 40 cm y su área mide 91 cm^2.

13. Determine las dimensiones de un rectángulo sabiendo que el largo es 4 veces el ancho y que el área mide 25 cm^2.

14. ¿Cuáles son las dimensiones de un rectángulo cuyos lados están en la razón 1:3 y cuya superficie mide 6,75 cm^2?

Ejercicios

15. El área de un triángulo rectángulo mide 10 cm^2 y la hipotenusa mide $\sqrt{41}$ cm. Determine la medida de los catetos.

16. La suma de las áreas de dos cuadrados es 74 cm^2 y la diferencia de sus perímetros es 8 cm. Determine el lado de cada uno.

17. Las áreas de dos círculos están en la razón 1:4 y sus radios suman 9 cm. Determine los radios.

18. Los catetos de un triángulo rectángulo están en la razón 5:3 y su superficie mide 120 cm^2. Determine la medida de sus 3 lados.

19. Resolver los siguientes sistemas:

a) $$\begin{aligned} 9x^2 - y^2 + 2y - 4 &= 0 \\ 4x^2 - 4y^2 + 16y + 16 &= 0 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x^2 - 4y^2 + 2x + 16y - 15 &= 0 \\ 2x^2 - y^2 + 4x + 4y - 2 &= 0 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} \frac{(x+1)^2}{2} - \frac{2y-2}{6} &= \frac{8}{9} \\ \frac{2x^2+4x+2}{3} - \frac{y-1}{5} &= 2 \end{aligned}$$

20. Una piscina rectangular cuyas dimensiones son 5 por 10 metros tiene un borde de ancho uniforme. Si el área del borde es 16 m^2, calcule el ancho del borde.

Soluciones

1. $x = 7$, $y = 5$

2. $(x_1 = 4$, $y_1 = 9)$; $(x_2 = -9$, $y_2 = -4)$

3. $x = 8$, $y = 3$

4. $x = 13$, $y = 12$

5. $(x_1 = 4$, $y_1 = 6)$; $(x_2 = -4$, $y_2 = -6)$

6. $(x = 12$, $y = 3)$; $(x_2 = -12;$ $y_2 = -3)$

7. $(x_1 = 4$, $y_1 = 9)$; $(x_2 = -4$, $y_2 = -9)$

8. $(x_1 = 5$, $y_1 = 15)$; $(x_2 = -5$, $y_2 = -15)$

9. $(x_1 = 6$, $y_1 = 9)$; $(x_2 = -6$, $y_2 = -9)$

10. (2, 3), (− 2, − 3), (− 2, 3), (2, − 3)

11. (5, 3) , (− 5, − 3)

12. 7 cm y 13 cm

13. 2,5 cm y 10 cm

14. 1,5 cm y 4,5 cm

15. a = 4 cm , b = 5 cm

16. a = 7 cm , b = 5 cm

17. $r_1 = 3$ cm , $r_2 = 6$ cm

18. a = 20 cm , b = 12 cm

19. a) (0, 2) **b)** (−1, 2) **c)** $(1, \frac{13}{3})$ $(-3, \frac{13}{3})$

20. 50 cm

Prueba de selección múltiple

1. La suma y el producto de las raíces de la ecuación $ax^2 + x + c = 0$ son respectivamente:

A. $\frac{1}{a}$ y $\frac{c}{a}$

B. $-\frac{1}{a}$ y $\frac{c}{a}$

C. $\frac{1}{a}$ y $-\frac{c}{a}$

D. $\frac{x}{a}$ y $\frac{c}{a}$

E. $-\frac{x}{a}$ y $\frac{c}{a}$

2. Las soluciones de la ecuación $x^2 + x - 20 = 0$ son:

A. -5 y 4
B. 5 y -4
C. -4 y -5
D. 4 y 5
E. 10 y -2

3. La ecuación cuyas raíces son $x_1 = 4$ y $x_2 = -6$ es:

A. $x^2 - 4x - 6 = 0$
B. $x^2 + 2x + 24 = 0$
C. $x^2 - 2x + 24 = 0$
D. $x^2 + 2x - 24 = 0$
E. $x^2 - 2x - 24 = 0$

4. Para que las raíces de la ecuación $4x^2 + 12x - k = 0$ sean reales e iguales el valor de k debe ser:

A. 9
B. -9
C. 36
D. -6
E. 6

5. ¿Qué condición debe cumplir k en la ecuación $2kx^2 + 3x + 5 = 0$ para que sus raíces sean complejas conjugadas?

A. $k = \frac{9}{40}$

B. $k < \frac{9}{40}$

C. $k < -\frac{9}{40}$

D. $k > -\frac{9}{40}$

E. $k > \frac{9}{40}$

6. La ecuación cuyas raíces son 0 y -2 es:

A. $x^2 - 2 = 0$
B. $x^2 + 2 = 0$
C. $x^2 - 2x = 0$
D. $x^2 + 4x = 0$
E. $x^2 + 2x = 0$

7. Una de las raíces de la ecuación $ax^2 - 2x - 3 = 0$ es: -3
¿Cuál es el valor de a?

A. $\frac{1}{9}$

B. $-\frac{1}{9}$

C. $-\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{3}$

E. No se puede determinar.

8. El producto de las raíces de la ecuación $2ax^2 + 3abx + 4ab^2 = 0$ es:

A. $-\frac{3}{2}b$

B. $-2b^2$

C. $4ab^2$

D. $2b^2$

E. $4ab$

9. La intersección de la parábola cuya ecuación es $y = 2x^2 + 3x - 2$ con el eje x es en los puntos.

A. $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$

B. $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ y $(-2, 0)$

C. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ y $(0, -2)$

D. $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ y $(0, 2)$

E. $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ y $(2, 0)$

10. El vértice de la parábola cuya ecuación es $y = x^2 - 2x - 24$ tiene por coordenadas:

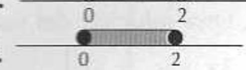
A. $(1, -25)$
B. $(1, 25)$
C. $(-1, 25)$
D. $(-1, -25)$
E. $(0, -24)$

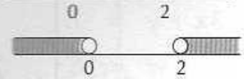
11. La función $y = -x^2 + 2x + 15$ alcanza su máximo valor para:

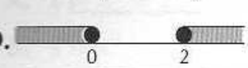
A. $x = 5$
B. $x = -3$
C. $x = -1$
D. $x = 1$
E. $x = -5$

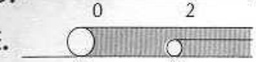
12. La solución de la inecuación $x^2 - 2x > 0$ está representada por:

A.


B.


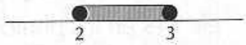
C.


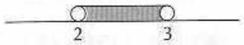
D.


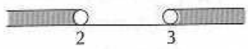
E.


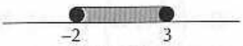
Prueba de selección múltiple

13. La solución de la inecuación $x^2 - 5x + 6 \leq 0$ está representada por:

A. 

B. 

C. 

D. 

E. 

14. La solución de la inecuación $x^2 - 1 \geq 0$ es:

A. $x \geq 1$

B. $x \leq -1$

C. $]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$

D. $[-1, 1]$

E. $]-1, 1[$

15. El conjunto $[-3, 3]$ es solución de la inecuación:

A. $x^2 + 9 < 0$

B. $x^2 - 9 \geq 0$

C. $x^2 - 6x + 9 \geq 0$

D. $x^2 - 9 \leq 0$

E. $x^2 + 6x + 9 < 0$

16. La solución de la inecuación $x^2 - 4 < 0$ está dada por:

A. $[-2, 2]$

B. $]-\infty, -2[$

C. $]-\infty, -2[\cup]2, \infty[$

D. $]-2, 2[$

E. $]-2, \infty[$

17. Una solución del sistema

$$\begin{array}{l|} 3x + y = 6 \\ x^2 + y^2 = 18 \\ \hline \end{array}$$

es:

A. $x = 3 \quad y = -3$

B. $x = 3 \quad y = 3$

C. $x = -3 \quad y = 3$

D. $x = -3 \quad y = -3$

E. $x = 6 \quad y = 0$

18. Dado el sistema:

$$\begin{array}{l|} x + y = 9 \\ x - y = 1 \\ \hline \end{array}$$

el valor de $2x$ es:

A. 10

B. 5

C. 8

D. 4

E. otro.

19. Dado el sistema:

$$\begin{array}{r|} 2x + y = 7 \\ x + y = 4 \\ \hline \end{array}$$

el valor de $-x$ es:

A. 3

B. -3

C. 1

D. -1

E. 4

20. Si $\begin{array}{r|} x^2 + y^2 = 26 \\ x + y \;\; = 6 \\ \hline \end{array}$

entonces son soluciones del sistema:

I. $x = 5, \; y = 1$

II. $x = 1, \; y = 5$

III. $x = y = 5$

Son verdaderas:

A. Sólo I

B. Sólo II

C. I y II

D. I y III

E. Todas.

21. Si $x = 5$ es solución de la ecuación

$x^2 - 7x + k = 0$

entonces la otra solución es:

A. 2

B. -2

C. -5

D. 7

E. -7

22. $x = -3$ es solución de la ecuación $x^2 - 9 = 0$. La otra solución es:

A. 9

B. -9

C. 3

D. -3

E. 0

23. La suma de las soluciones de la ecuación $2x^2 + 5x - 1 = 0$ es:

A. $\frac{1}{5}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $-\frac{1}{2}$

D. $\frac{5}{2}$

E. $-\frac{5}{2}$

24. El producto de las soluciones de la ecuación $x^2 + ax + b = 0$ es:

A. a

B. b

C. $-a$

D. $-b$

E. $-\frac{b}{a}$

25. La condición para que las soluciones de la ecuación

$kx^2 + 3x + 2 = 0$ sean complejas conjugadas es:

A. $k > \frac{9}{8}$

B. $k > \frac{8}{9}$

C. $k < -\frac{9}{8}$

D. $k < \frac{9}{8}$

E. $k < -\frac{8}{9}$

26. Para que las soluciones de la ecuación

$12x^2 + kx + 3 = 0$

sean iguales se debe cumplir:

A. $k > 12$
B. $k < 12$
C. $k > -12$
D. $k < -12$
E. $k = \pm 12$

27. La suma y el producto de las raíces de una ecuación cuadrática son 3 y –10 respectivamente. La ecuación es:

A. $x^2 - 3x - 10 = 0$
B. $x^2 - 3x + 10 = 0$
C. $x^2 + 3x - 10 = 0$
D. $-x^2 - 3x + 10 = 0$
E. $x^2 + 3x + 10 = 0$

28. Las raíces de una ecuación de segundo grado están en la razón 3:1 y son ambas positivas. Si la ecuación es:

$x^2 + ax + 12 = 0$

el valor de "a" es:

A. 2
B. 4
C. 8
D. – 8
E. no se puede determinar.

29. ¿Qué valor debe tener k en la función

$y = 2x^2 - 3x + k - 1$

para que el punto (0, 0) pertenezca a ella?

A. 0
B. 1
C. – 1
D. $\frac{3}{2}$
E. $-\frac{1}{2}$

30. Una de las raíces de la ecuación

$2x^2 + 17x - 9 = 0$

es – 9

¿Cuál es la otra raíz?

A. 9
B. – 2
C. 2
D. $\frac{1}{2}$
E. $-\frac{1}{2}$

31. La suma de dos números es 21 y su producto es 90. ¿Cuál es el número mayor?

A. 15
B. 18
C. 9
D. 6
E. 12

32. Dos números están en la razón 3:2 y la diferencia de sus cuadrados es 20. ¿Cuál es el número mayor?

A. 4
B. 6
C. 8
D. 10
E. 2

33. La superficie de una jaula rectangular es de 48 cm^2. Si los lados están en la razón 3:4. ¿Cuál es su perímetro?

A. 14 cm
B. 28 cm
C. 42 cm
D. 56 cm
E. 70 cm

34. El área de un triángulo rectángulo es 24 cm^2 y la hipotenusa mide 10 cm. ¿Cuál es el perímetro?

A. 24 cm
B. 34 cm
C. 40 cm
D. 60 cm
E. 30 cm

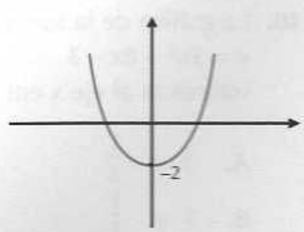
35. El perímetro de un rectángulo es 28 cm y su área mide 33 cm^2. El lado menor mide:

A. 11 cm
B. 5 cm
C. 3 cm
D. 6 cm
E. 7 cm

36. La suma de dos números es 28 y la diferencia de sus cuadrados es 56. La diferencia de ellos es:

A. 2
B. 1
C. 4
D. 8
E. 6

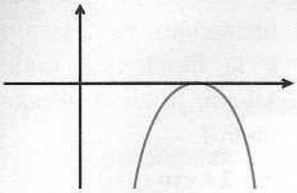
37. La función que representa la curva dada es:



A. $y = x^2 + 2$
B. $y = x^2 - 2$
C. $x = y^2 + 2$
D. $x = y^2 - 2$
E. $y = -x^2 - 2$

Prueba de selección múltiple

38. A partir del siguiente gráfico, podemos afirmar que la ecuación cuadrática asociada:



A. Tiene solución imaginaria.

B. Tiene una raíz negativa.

C. Tiene raíces reales iguales.

D. Tiene raíces reales y distintas.

E. No tiene solución.

39. La gráfica de la función cuadrática $y = 3x^2 - 2x - 5$ intersecta al eje y en:

A. -3

B. -2

C. 2

D. -5

E. 5

40. La gráfica de la función $y = 3x^2 - 8x - 3$ intersecta al eje x en:

A. 3 y $-\frac{1}{3}$

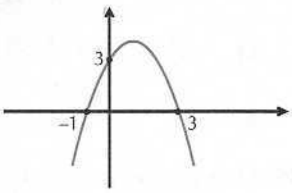
B. -3 y $\frac{1}{3}$

C. -3 y $-\frac{1}{3}$

D. 3 y $\frac{1}{3}$

E. 3 y -3

41. La función asociada al gráfico es:



A. $y = -x^2 - 2x + 3$

B. $y = -x^2 - 2x - 3$

C. $y = -x^2 + 2x + 3$

D. $y = -x^2 + 2x - 3$

E. $y = x^2 + 2x + 3$

42. El recorrido de la función $y = 16x^2 - 1$ es:

A. $]-\infty, 1]$

B. $]-\infty, -1]$

C. $[1, \infty[$

D. $[-1, \infty^+[$

E. $[-1, 1]$

43. El recorrido de la función $y = -x^2 + 2x + 15$ es:

A. $[16, \infty^+[$

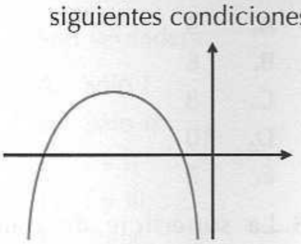
B. $[-16, \infty^+[$

C. $]-\infty, -16]$

D. $]-\infty, 16]$

E. $[-16, 16]$

44. La función cuya gráfica es la siguiente cumple las siguientes condiciones:



A. $\Delta > 0$; $a > 0$

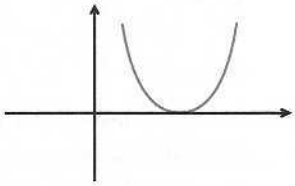
B. $\Delta = 0$; $a < 0$

C. $\Delta > 0$; $a < 0$

D. $\Delta < 0$; $a < 0$

E. $\Delta = 0$; $a > 0$

45. La función cuya gráfica es la siguiente cumple las siguientes condiciones:



A. $\Delta = 0$ $a > 0$

B. $\Delta = 0$ $a < 0$

C. $\Delta = 0$ $a = 0$

D. $\Delta > 0$ $a > 0$

E. $\Delta < 0$ $a < 0$

46. La gráfica de la función $y = 3x^2 - 2x$ intersecta al eje x en:

A. 0 y 2

B. 0 y 3

C. 0 y $\frac{2}{3}$

D. 0 y $\frac{3}{2}$

E. 0 y $-\frac{2}{3}$

47. La gráfica de la función $y = x^2 - x + 1$ intersecta al eje x en:

A. $x = 1$

B. $x = 0$

C. $x = -1$

D. $x = -2$

E. No lo intersecta.

48. Las coordenadas del vértice de la parábola cuya función es $y = 9x^2 + 6x - 8$ son:

A. $\left(\frac{1}{3}, 9\right)$

B. $\left(-\frac{1}{3}, 9\right)$

C. $\left(\frac{1}{3}, -9\right)$

D. $\left(-\frac{1}{3}, -9\right)$

E. $(-3, -9)$

Soluciones

1. B	7. C	13. A	19. B	25. A	31. A	37. B	43. D
2. A	8. D	14. C	20. C	26. E	32. B	38. C	44. C
3. D	9. B	15. D	21. A	27. A	33. B	39. D	45. A
4. B	10. A	16. D	22. C	28. D	34. A	40. A	46. C
5. E	11. D	17. A	23. E	29. B	35. C	41. C	47. E
6. E	12. C	18. A	24. B	30. D	36. A	42. D	48. D

CAPÍTULO 5

Polinomios y Teoría de ecuaciones

5.1 Definición y operaciones con polinomios

Definición: Decimos que P es un polinomio en el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ si y sólo si P es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, tal que P(x) admite una representación de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

donde $a_n, a_{n-1}, \ldots\ldots a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$

y se denominan coeficientes del polimonio, y $n \in \mathbb{N}$

Ejemplo:
$$\begin{aligned} P(x) &= 2x^2 - 3x + 1 \\ Q(x) &= -5x^3 - 2x^2 + x - 1 \\ R(x) &= x^5 - 3x + 2 \\ C(x) &= 4x^2 - 1 \end{aligned}$$
son polinomios.

Definición: Llamamos grado de un polinomio P al mayor exponente que presenta la variable (frecuentemente x) con coeficiente distinto de cero.

En el ejemplo anterior:

grado P (x) = 2
grado Q (x) = 3
grado R (x) = 5
grado C (x) = 2

• **Observación 1**: Un número real puede entenderse como un polinomio de grado 0.

• **Observación 2**: Al coeficiente del término de mayor grado del polinomio se le llama coeficiente principal.

• **Observación 3**: Dos polinomios P(x) y Q(x) son iguales si y sólo si $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = Q(x)$.

OPERACIONES CON POLINOMIOS.

Sean $P(x) = a_n x^n + a_m x^m + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

y $\quad Q(x) = b_m x^m + ... + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$

dos polinomios de grados n y m, $\in \mathbb{N}$, con $n > m$.
Estos polinomios podemos escribirlos usando sumatoria

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \; ; \; Q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$$

5.1.1 Suma. (Ver problema 2, pág. 275)

$$P(x) + Q(x) = a_n x^n + ... + (a_m + b_m) x^m + ... + (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0)$$

o bien, usando sumatoria:

$$P(x) + Q(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i$$

5.1.2 Resta. (Ver problema 2, pág. 275)

Previo:

$$(-1) P(x) = - a_n x^n - ... a_m x^m - ... - a_2 x^2 - a_1 x - a_0$$

luego

$$P(x) - Q(x) = P(x) + (-1) Q(x)$$

5.1.3 Producto. (Ver problema 3, pág. 275)

$P(x) \cdot Q(x)$ = este producto se obtiene aplicando la propiedad distributiva del producto sobre la suma en forma reiterada y considerando las leyes de multiplicación de potencias de igual base.

$$P(x) \cdot Q(x) = \sum_{i=0}^{m+n} c_i x^i, \text{ donde } c_i = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}$$

Teorema 1: El conjunto de los polinomios con coeficientes reales para la suma y el producto de polinomios tiene una estructura de anillo:

Es decir:

$$(P,+) \text{ es grupo abeliano } \begin{cases} + \text{ es cerrada} \\ + \text{ es asociativa} \\ + \text{ es conmutativa} \\ + \text{ tiene elemento neutro} \\ + \text{ tiene elemento inverso} \end{cases}$$

- es asociativa
- es distributiva sobre la suma.

Teorema 2. Sean P(x) y Q(x) dos polinomios con coeficientes reales.

Si $P(x) \cdot Q(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$,
entonces $P(x) = 0 \vee Q(x) = 0$

Teorema 3. Sean P(x), Q(x) y R(x) tres polinomios en $\mathbb{R}$, tales que $P(x) \neq 0$.

Si $P(x) \cdot Q(x) = P(x) \cdot R(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$,
entonces $Q(x) = R(x)$.

5.1.4 División. (Problemas 4 y 5, pág. 276)

En toda división de dos polinomios se verifica que
Dividendo = Divisor • cociente + resto.
$P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$,
lo que también se puede escribir como

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

• **Observación 1**: Para efectuar la división de P(x) por Q(x), Q(x) debe tener grado inferior o igual a P(x).

• **Observación 2**: La división de polinomios se termina cuando el resto es de grado inferior al divisor.

Regla de Ruffini o división sintética: Para efectuar la división de polinomios por un divisor de la forma $x-a$ es posible trabajar sólo con los coeficientes y mediante este procedimiento determinar el cociente y el resto. Ver problema 7, pág. 277.

Teorema 4. (Teorema del Resto) Al dividir un polinomio P(x) por $(x-a)$, el resto es P(a).

Demostración: Recordemos que al dividir un polinomio se obtiene un cociente C(x) y un resto R(x), donde el resto tiene grado inferior que el grado del divisor. En este caso el grado del divisor $(x-a)$ es 1, por lo tanto el grado del resto es cero, es decir, el resto es una constante real que denotaremos por r, $R(x) = r$.

$$\frac{P(x)}{x-a} = C(x) + \frac{r}{x-a} \text{ o bien}$$

$P(x) = C(x) \cdot (x-a) + r$

Si hacemos $x = a$ nos queda $P(a) = C(a) \cdot 0 + r$

$$P(a) = r.$$

Es decir, al dividir $P(x)$ por $(x - a)$ el resto está expresado por $P(a)$.

Ejercicios resueltos

1. Dado el polinomio $P(x) = 5x^4 - 3x^2 + x - 3$

determinar su grado y hallar su valor para $x = 1$, $x = -1$ y $x = 0$.

Solución:

El grado de $P(x)$ es 4.

Como $P(x) = 5x^4 - 3x^2 + x - 3$

Se tiene que

$$\begin{aligned} P(1) &= 5 \cdot 1^4 - 3 \cdot 1^2 + 1 - 3 \\ &= 5 - 3 + 1 - 3 = 0 \\ P(-1) &= 5 \cdot (-1)^4 - 3 \cdot (-1)^2 + (-1) - 3 \\ &= 5 - 3 - 1 - 3 = -2 \\ P(0) &= 5 \cdot 0^4 - 3 \cdot 0^2 + 0 - 3 = -3 \end{aligned}$$

Observar que el valor de un polinomio en $x = 0$ es equivalente al término independiente de la variable que presente el polinomio.

2. Dados los polinomios $P(x) = 6x^5 - 3x^2 + x - 2$

y $Q(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 3$.

Hallar $P(x) + Q(x)$; $P(x) - Q(x)$.

Solución:

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= (6x^5 - 3x^2 + x - 2) + (x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 3) \\ &= 6x^5 + x^4 - x^3 - x^2 + 1 \\ P(x) - Q(x) &= P(x) + (-1)\, Q(x) \\ &= (6x^5 - 3x^2 + x - 2) + (-x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 3) \\ &= 6x^5 - x^4 + x^3 - 5x^2 + 2x - 5 \end{aligned}$$

Observar que para obtener $(-1)\, Q(x)$ se cambia el signo de todos los términos de $Q(x)$.

3. Dados los polinomios $P(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1$

y $Q(x) = x^2 - x + 3$.

Hallar $P(x) \cdot Q(x)$.

Solución:

Para obtener el producto de ambos polinomios debemos multiplicar cada término de $P(x)$ por cada término de $Q(x)$ y luego reducir términos semejantes.

$$P(x) \cdot Q(x) = (x^3 - x^2 + 2x - 1) \cdot (x^2 - x + 3)$$
$$= x^5 - x^4 + 2x^3 - x^2 - x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 3x^3 - 3x^2 + 6x - 3$$
$$= x^5 - 2x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 7x - 3$$

4. Si $P(x) = 2x^4 - x^3 + 3x - 1$
y $Q(x) = x^2 - x + 3$

Hallar el cociente $C(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ y el resto $R(x)$

Solución:

Para realizar una división de polinomios, primero se deben ordenar dividendo y divisor de acuerdo al grado de sus términos. Seguidamente buscamos el primer término del cociente, que es el que multiplicado por el primer término del divisor da el primer término del dividendo. Este término se multiplica por cada término del divisor y ese producto se resta del dividendo.

Se obtiene así un nuevo polinomio, el cual se divide nuevamente por el divisor, con el mismo procedimiento, obteniendo el segundo término del cociente. Análogamente se obtienen los demás términos del cociente.

La división se termina cuando al restar aparece un polinomio cuyo grado es inferior al grado del divisor.

$$
\begin{array}{l}
(2x^4 - x^3 + 3x - 1) : (x^2 - x + 3) = 2x^2 + x - 5 \\
-)\ \underline{2x^4 - 2x^3 + 6x^2} \\
\qquad\qquad x^3 - 6x^2 + 3x - 1 \\
\qquad\quad -)\ \underline{x^3 - \ x^2 + 3x} \\
\qquad\qquad\quad - 5x^2 - 1 \\
\qquad\quad -)\ \underline{- 5x^2 + 5x - 15} \\
\qquad\qquad\qquad - 5x + 14
\end{array}
$$

Luego $C(x) = 2x^2 + x - 5$ es el cociente y
$R(x) = -5x + 14$ es el resto.

5. Sea $P(x) = x^6 - 64$
y $Q(x) = x^3 - 8$

Hallar el cociente $C(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ y el resto $R(x)$.

Solución: (Ver explicación ejercicio anterior)

$$
\begin{array}{l}
(x^6 - 64) : (x^3 - 8) = x^3 + 8 \\
\underline{-)\ x^6 - 8x^3} \\
\qquad\quad 8x^3 - 64 \\
\quad \underline{-)\ 8x^3 - 64} \\
\qquad\quad 0 \qquad 0
\end{array}
$$

$C(x) = x^3 + 8$

$R(x) = 0$

6. Realizar el cociente entre $x^5 - 243$ y $x - 3$

Solución: (Ver explicación ejercicio 4)

$$
\begin{array}{l}
(x^5 - 243) : (x - 3) = x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 27x + 81 \\
-)\ \underline{x^5 - 3x^4} \\
\qquad 3x^4 - 243 \\
\quad -)\ \underline{3x^4 - 9x^3} \\
\qquad\qquad 9x^3 - 243 \\
\qquad\quad -)\ \underline{9x^3 - 27x^2} \\
\qquad\qquad\qquad 27x^2 - 243 \\
\qquad\qquad\quad -)\ \underline{27x^2 - 81x} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 81x - 243 \\
\qquad\qquad\qquad\quad -)\ \underline{81x - 243} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\ \ 0 \quad\ 0
\end{array}
$$

Luego $(x^5 - 243) : (x - 3) = x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 27x + 81$

7. Efectuar el cociente entre $P(x) = 6x^4 - 10x^3 - 4x^2 - 3x + 6$ y $Q(x) = x - 2$.

Solución:

Efectuaremos la división aplicando la regla de Ruffini o división sintética.

– Copiamos los coeficientes del dividendo teniendo especial cuidado de anotar 0 si algún término no aparece.

– Copiamos al margen derecho el término independiente del divisor con signo contrario (2).

– Al dividir un polinomio por $(x - a)$ el cociente tendrá como grado una unidad inferior al dividendo y el coeficiente principal del cociente será el mismo del dividendo. Copiamos, según muestra el diagrama el coeficiente principal (6) bajo la línea horizontal.

$$
\begin{array}{ccccc|c}
6 & -10 & -4 & -3 & 6 & 2 \\
\hline
6 & & & & &
\end{array}
$$

– Este número (6) es el coeficiente principal del cociente. Ahora este coeficiente principal se multiplica por el factor (2) que está al margen y su resultado se escribe sobre la línea horizontal bajo el coeficiente del segundo término del dividendo. Se suman estos dos números obteniendo así el coeficiente del segundo término del cociente (2).

$$
\begin{array}{ccccc|c}
6 & -10 & -4 & -3 & 6 & 2 \\
 & 12 & & & & \\
\hline
6 & 2 & & & &
\end{array}
$$

– Este número (2) se multiplica por el factor (2) que está al margen y se procede en la misma forma anterior hasta llegar al último número (0).

$$\begin{array}{rrrrr|r}
6 & -10 & -4 & -3 & 6 & 2 \\
 & 12 & 4 & 0 & -6 & \\
\hline
6 & 2 & 0 & -3 & 0 &
\end{array}$$

Bajo la línea horizontal se obtienen los coeficientes del cociente, cuyo grado es inferior en una unidad al grado del dividendo y el último número representa el resto de la división. En este caso es 0.

Así, el cociente es $6x^3 + 2x^2 - 3$ y el resto es 0.

8. Efectuar la división entre los siguientes polinomios:

$P(x) = 5x^5 - 3x^2 + 6x + 12$ y $Q(x) = x + 1$

Solución:

Usaremos división sintética (ver explicaciones del ejercicio anterior).

Dividendo $P(x) = 5x^5 - 3x^2 + 6x + 12$

Divisor $Q(x) = x + 1$

Coeficientes del dividendo

$$\begin{array}{rrrrrr|r}
5 & 0 & 0 & -3 & 6 & 12 & -1 \\
 & -5 & 5 & -5 & 8 & -14 & \\
\hline
5 & -5 & 5 & -8 & 14 & -2 &
\end{array}$$

← término independiente del divisor con signo contrario.

coeficientes del cociente resto

Luego cociente $C(x) = 5x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 8x + 14$
y el resto $R(x) = -2$

Observar que el resto es independiente de x pues su grado debe ser menor que el del divisor que en este caso es uno.

9. Determinar el resto que se produce al dividir

$P(x) = x^6 - 3x^2 + 2x - 5$ por $x - 1$

Solución:

Para hallar la solución basta con evaluar P(1). (Solución de la ecuación $x - 1 = 0$, divisor igual a cero).

$$\begin{aligned} P(1) &= 1^6 - 3(1)^2 + 2(1) - 5 \\ &= 1 - 3 + 2 - 5 = -5 \end{aligned}$$

10. Sean $P(x) = x^3 - ax^2 + x - b$
y $Q(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b$
dos polinomios. Determinar a y b para que $P(x) + 2$ sea divisible por $x - 1$ y $Q(x) - 3$ sea divisible por $x + 1$.

Solución:

$P(x) + 2 = x^3 - ax^2 + x - b + 2$

Dividiendo $P(x) + 2$ por $x - 1$:

1	–a	1	–b + 2	1
	1	1 – a	2 – a	
1	1 – a	2 – a	– a – b + 4	

$-a - b + 4 = 0$ (1) El resto debe ser cero.

$Q(x) - 3 = x^3 - 2x^2 + ax + b - 3$

Dividiendo $Q(x) - 3$ por $x + 1$

1	–2	a	b – 3	–1
	–1	3	– a – 3	
1	–3	a + 3	– a + b – 6	

$-a + b - 6 = 0$ (2) El resto debe ser cero.

Resolviendo el sistema (1) y (2).

$$\left.\begin{array}{l} a + b = +4 \\ a - b = -6 \end{array}\right| \Rightarrow \quad a = -1 \text{ y } b = 5$$

Ejercicios

1. Dados los siguientes polinomios, determine su valor para el número real indicado:

a) $P(x) = 5x^6 - 3x^4 + 2x^2 - 1$ $\quad x = 2$

b) $P(x) = -x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2 - 3x - 1$ $\quad x = -1$

c) $P(x) = 4x^4 - 3x + 4$ $\quad x = 0$

d) $P(x) = 36x^6 - 2x^5 - x - 3$ $\quad x = \frac{1}{2}$

e) $P(x) = 2x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 2$ $\quad x = 4$

f) $P(x) = x^3 - x + 2$ $\quad x = -3$

g) $P(x) = 3x^3 + x^2 + 5x$ $\quad x = -2$

h) $P(x) = 2x^2 - x + \sqrt{5}$ $\quad x = \sqrt{5}$

i) $P(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^2 + \frac{2}{3}x - 1$ $\quad x = \sqrt{2}$

j) $P(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x^2 + x - 1$ $\quad x = 1$

k) $P(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$ $\quad x = -1$

l) $P(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ $\quad x = 1$

m) $P(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ $\quad x = -1$

Ejercicios

2. Dados los polinomios $P(x) = x^2 + 2x - 1$ y $Q(x) = x^3 - x + 2$
Determine:

a) $P(x) + Q(x)$ **b)** $P(x) - Q(x)$ **c)** $2P(x) - 3\,Q(x)$

d) $P(x) \cdot Q(x)$ **e)** $P(x) + 2Q(x)$

3. Dados los polinomios $P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ y $Q(x) = x - 3$
Encuentre:

a) $P(x) + Q(x)$ **b)** $P(x) - Q(x)$ **c)** $P(x) + [Q(x)]^2$

d) $P(x) + x\,Q(x)$ **e)** $P(x) + P(x) \cdot Q(x)$

4. Dar ejemplos de sumas y productos de polinomios donde se verifiquen todas las propiedades del teorema 1.

5. Si $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 5$ $Q(x) = x^3 + 3x$
$R(x) = x^2 - x + 2$ $S(x) = -x^3 + 2x^2 - 3$.
Determine:

a) $[P(x) + Q(x)] - [R(x) + S(x)]$

b) $P(x) - [Q(x) + R(x) + S(x)]$

c) $[P(x) - Q(x)] + [R(x) - S(x)]$

6. Realice la división de los siguientes polinomios; obtenga cociente C(x) y resto R(x).

a) $(5x^3 + 2x - 3) : (x^2 - x + 1) =$

b) $(x^5 - 2x^4 + x^3 - 3x^2 + 5) : (2x^3 - 2x^2 + x - 1) =$

c) $(4x^5 + x^3 - 6x + 1) : (x^3 - 2x + 3) =$

d) $(x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 4) : (x^2 - 2x + 1) =$

e) $(x^5 + x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 3) : (x^2 + 2x - 3) =$

f) $(2x^6 - 2x^5 + x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 6x - 5) : (2x^3 - x + 5) =$

g) $(x^7 - 3x^6 + 2x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 3x - 3) : (x^3 - 3x^2 + x - 1) =$

h) $(x^7 - 3x^5 + x^4 - 2) : (x^5 + x^2 - 3) =$

7. Realice la división de los siguientes polinomios obteniendo cociente C(x) y resto R(x).

a) $(x^4 - 14x^2 + 17x - 6) : (x - 3)$

b) $(x^3 + 3x^2 - 5x + 2) : (x - 1)$

c) $(x^5 + 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 7x - 2) : (x + 2)$

d) $(x^4 + x^3 - 3x - 1) : (x + 1)$

e) $(x^6 + 3x^5 - 2x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 3x) : (x + 3)$

f) $(x^5 - 2x^3 + x^2 - x) : (x - 1) =$

g) $(x^4 + x^3 - x^2) : (x^2) =$

h) $(x^5 - 2x^3 + x^2 - x) : (x + 1) =$

i) $(x^5 - 3x^4 - 4x^3 - 3x + 12) : (x - 4) =$

j) $(x^5 - 2x^4 - 4x^3 - 3x + 12) : (x - 3) =$

k) $(x^5 - 3x^4 - 4x^3 - 3x + 12) : (x - 1) =$

l) $(x^4 - 2x^3 - 34x^2 + 4x - 5) : (x + 5) =$

m) $(x^3 - 3x^2 + x - 1) : (x - 1) =$

8. Encuentre el resto que se produce al dividir cada uno de los polinomios dados por $x + 3$.

a) $x^4 - 2x^3 + x^2 - 1$

b) $3x^5 - x + 6$

c) $x^3 + x^2 - 8$

d) $-3x^3 + 4x^2 - 9$

9. Determine el resto que se produce al realizar las siguientes divisiones.

a) $x^5 - 2x + 3$ por $x + 1$

b) $x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 3$ por $x - 1$

c) $4x^3 - 2x^2 + x - 5$ por $x + 2$

d) $-2x^2 - 4x + 6$ por $x - 3$

10. ¿Qué valor debe tomar a, para que al dividir $x^4 - 6x^2 + x - a$ por $x - 2$, el resto sea cero?

11. ¿Qué valor debe tomar a, para que al dividir $x^3 - 4x^2 + ax - 3$ por $x + 2$, la división sea exacta?

12. ¿Qué valor debe tomar a, para que al dividir $3x^4 - x^3 + 2x^2 - ax + 1$ por $x - 1$, la división dé como resto 5?

13. Encuentre un polinomio P(x) tal que dividido por $x^2 - x + 1$ dé como cociente $x + 2$ y como resto $x - 3$.

14. Determine los valores de a, b y c para que

$$\frac{ax^2 + bx - c}{3x^2 + 5x - 1} = 3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

15. Determine el valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que los polinomios

$P(x) = x^4 - 2\alpha x^3 + 3x^2 - 2\alpha x + 1$ y

$Q(x) = x^2 - x + 1$

verifiquen la condición $P(x) = [Q(x)]^2$

16. Determine un polinomio P de segundo grado de modo que $P(0) = 1$, $P(-1) = 0$, $P(-2) = 1$

Ejercicios

17. Pruebe que si $x^3 + ax - b$ es divisible por $x^2 - x - b$, entonces $a + b = -1$.

18. Sea $P(x) = x^3 + 2x^2 + ax + b$. Determine a y b tales que $P(x) + 1$ sea divisible por $x + 1$ y $P(x) - 1$ sea divisible por $x - 1$.

19. Sea $P(x) = x^3 - 2x^2 + ax - b$. Determine a y b tales que $P(x) + 2$ sea divisible por $x - 2$ y $P(x) + 1$ sea divisible por $x - 1$.

20. Determine a y b para que $P(x) = x^3 - (a + b)x + 2$ y $Q(x) = x^2 - x + (a - b)$ sean ambos divisibles por $1 - x$.

21. Determine un polinomio P de segundo grado de modo que $P(1) = 0$, $P(-1) = 6$ y $P(0) = 1$.

22. Encuentre un polinomio de segundo grado P de modo que $P(1) = -1$, $P(2) = -8$ y $P(-1) = -5$.

23. Encuentre los valores de a y b en el polinomio $4x^3 - 3x^2 + ax + b$ para que éste sea divisible por $x^2 - 1$.

24. Al dividir $ax^4 + bx^3 - 12x^2 + 16x - 5$ por $x^2 + 2x - 3$ se obtiene como resto $-32x + 40$. Pruebe que $a = 5$ y $b = 4$.

Soluciones

1. a) 279 b) 1 c) 4 d) -3 e) 494 f) -22 g) -30 h) 10
   i) $\frac{2\sqrt{2-3}}{3}$ j) 0 k) -6 l) 6 m) 0

2. a) $P(x) + Q(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ b) $P(x) - Q(x) = -x^3 + x^2 + 3x - 3$
   c) $2P(x) - 3Q(x) = -3x^3 + 2x^2 + 7x - 8$ d) $P(x) \cdot Q(x) = x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 5x - 2$
   e) $P(x) + 2Q(x) = 2x^3 + x^2 + 3$

3. a) $P(x) + Q(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 5$ b) $P(x) - Q(x) = x^3 - 2x^2 + 1$
   c) $P(x) + [Q(x)]^2 = x^3 - x^2 - 5x + 7$ d) $P(x) + x\,Q(x) = x^3 - x^2 - 2x - 2$
   e) $P(x) + P(x) \cdot Q(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4$

5. a) $5x^3 - 5x^2 + 5x - 4$ b) $3x^3 - 5x^2 - x - 4$ c) $3x^3 - 3x^2 - 3x$

6. a) $C(x) = 5x + 5$ $R(x) = 2x - 8$
   b) $C(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ $R(x) = \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{19}{4}$
   c) $C(x) = 4x^2 + 9$ $R(x) = -12x^2 + 12x - 26$
   d) $C(x) = x^2 - x - 1$ $R(x) = -2x + 5$
   e) $C(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ $R(x) = 0$
   f) $C(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ $R(x) = 0$
   g) $C(x) = x^4 - x^2 + 3$ $R(x) = 0$
   h) $C(x) = x^2 - 3$ $R(x) = 6x^2 - 11$

7. a) $C(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 2$ $\quad R(x) = 0$
   b) $C(x) = x^2 + 4x - 1$ $\quad R(x) = 1$
   c) $C(x) = x^4 + x^3 - 3x - 1$ $\quad R(x) = 0$
   d) $C(x) = x^3 - 3$ $\quad R(x) = 2$
   e) $C(x) = x^5 - 2x^3 + x^2 - x$ $\quad R(x) = 0$
   f) $C(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 1$ $\quad R(x) = -1$
   g) $C(x) = x^2 + x - 1$ $\quad R(x) = 0$
   h) $C(x) = x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 3$ $\quad R(x) = 3$
   i) $C(x) = x^4 + x^3 - 3$ $\quad R(x) = 0$
   j) $C(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 3x - 12$ $\quad R(x) = -24$
   k) $C(x) = x^4 - 2x^3 - 6x^2 - 6x - 9$ $\quad R(x) = 3$
   l) $C(x) = x^3 - 7x^2 + x - 1$ $\quad R(x) = 0$
   m) $C(x) = x^2 - 2x - 1$ $\quad R(x) = -2$

8. a) 143 $\quad$ b) -720 $\quad$ c) -26 $\quad$ d) 108

9. a) 4 $\quad$ b) 4 $\quad$ c) -47 $\quad$ d) -24

10. $a = -6$ $\quad$ 11. $a = -\dfrac{27}{2}$ $\quad$ 12. $a = 0$ $\quad$ 13. $x^3 + x^2 - 1$

14. $a = 9$ $\quad b = 15$ $\quad c = 3$

15. $\alpha = 1$ $\quad$ 16. $x^2 + 2x + 1$ $\quad$ 18. $a = 0$, $b = -2$

19. $a = b = 2$ $\quad$ 20. $a = b = \dfrac{3}{2}$ $\quad$ 21. $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$

22. $P(x) = -3x^2 + 2x$ $\quad$ 23. $a = -4$ y $b = 3$

Teoría de ecuaciones 5.2

5.2.1 Cálculo de las raíces de un polinomio. Factorización.

Definición: Un número a es raíz de un polinomio P(x) si y sólo si P(a) = 0.

Teorema 5: Si a es una raíz de la ecuación polinómica P(x) = 0, es decir, P(a) = 0, entonces (x – a) es divisor de P(x).

Si (x – a) es divisor de P(x), entonces a es una raíz de la ecuación P(x) = 0.

Ver ejercicio 2, (pág. 285).

Teorema 6: Sea P(x) un polinomio no constante, entonces, P(x) tiene a lo menos una raíz, real o compleja.

Teorema 7: Sea P(x) un polinomio de grado $n \geq 1$, entonces P(x) tiene a lo más n raíces distintas.

Algunas raíces de una ecuación polinómica pueden ser iguales; esto es, tienen multiplicidad mayor que 1.

Por ejemplo:

La ecuación de 6° grado $P(x) = (x-2)^3 (x-1)(x+3)^2 = 0$
tiene por raíces 2 de multiplicidad 3,
1 de multiplicidad 1
– 3 de multiplicidad 2,
luego las 6 raíces son 2, 2, 2, 1, –3 y –3.

RAÍCES COMPLEJAS Y RAÍCES IRRACIONALES.

Si un número complejo a + bi es raíz de un polinomio P(x) de coeficientes reales, el complejo conjugado a – bi también es raíz de P(x).

De aquí se deduce que una ecuación P(x) = 0 de grado impar tiene por lo menos una raíz real.

Si un número real de la forma $a + \sqrt{b}$, con $\sqrt{b}$ irracional, es raíz de una ecuación P(x) = 0 con coeficientes racionales, entonces el número $a - \sqrt{b}$ también es raíz de la ecuación P(x) = 0.

RAÍCES RACIONALES.

Si $\frac{p}{q}$ es una fracción irreducible que es raíz de la ecuación

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$

entonces p es divisor de a_0 y q es divisor de a_n.

Ejemplo:

Dada la ecuación $2x^4 + 5x^5 + x^2 + 10x - 6 = 0$ pueden ser raíces racionales de ellas los números formados por un divisor de 6 (± 1, ± 2, ± 3, ± 6) partido por un divisor de 2 (± 1, ± 2).

Así pueden ser solución o raíz los números

$\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 2, \pm 3, \pm \frac{3}{2}, \pm 6.$

En efecto, son soluciones racionales $\frac{1}{2}$ y -3.

5.2.2 Relación entre los coeficientes de una ecuación p(x) = 0 y sus raíces

Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_o = 0, \; a_n \neq 0$

dividiendo la ecuación por a_n tenemos:

$$x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{n-1} + \ldots\ldots + \frac{a_2}{a_n} x^2 + \frac{a_1}{a_n} x + \frac{a_0}{a_n} = 0$$

donde:

$-\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$ = suma de las raíces.

$\dfrac{a_{n-2}}{a_n}$ = suma de los productos de las raíces tomadas de dos en dos.

$-\dfrac{a_{n-3}}{a_n}$ = suma de los productos de las raíces tomadas de tres en tres y así sucesivamente hasta

$(-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}$ = producto de todas las raíces.

Un caso particular:

Si $P(x) = ax^2 + bx + c = 0$

y sus raíces son r_1 y r_2

entonces: $r_1 + r_2 = -\dfrac{b}{a}$

$r_1 \cdot r_2 = \dfrac{c}{a}$

Si $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

y sus raíces son r_1, r_2 y r_3

entonces: $r_1 + r_2 + r_3 = -\dfrac{b}{a}$

$r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = \dfrac{c}{a}$

$r_1 r_2 r_3 = -\dfrac{d}{a}$

Ver ejercicios 6 y 7, (págs. 287, 288).

Ejercicios resueltos

1. Determinar si 3, – 2, 1 son o no raíces del polinomio

$x^4 + x^3 - 7x^2 - 13x - 6$

Solución:

a es raíz de P(x) si $P(a) = 0$

$P(3) = 3^4 + 3^3 - 7 \cdot 3^2 - 13 \cdot 3 - 6 = 0$

luego 3 es raíz del polinomio.

$P(-2) = (-2)^4 + (-2)^3 - 7(-2)^2 - 13(-2) - 6 = 0$

luego – 2 es raíz del polinomio

$P(1) = (1)^4 + 1^3 - 7 \cdot 1^2 - 13 \cdot 1 - 6 = -24$

luego 1 no es raíz del polinomio.

2. Demostración teorema 5.

a) $P(a) = 0 \Rightarrow x - a$ divisor de P(x)

$P(x) = (x - a) \cdot Q(x) + P(a)$ (5. 1. 4)

como $P(a) = 0$

$P(x) = (x - a) \cdot Q(x)$

Luego, $(x - a)$ es divisor de $P(x)$.

b) $x - a$ divisor de $P(x) \Rightarrow P(a) = 0$

$P(x) = (x - a)\, Q(x) + P(a)$

como $(x - a)$ es divisor de $P(x)$, al dividir se tiene resto 0,

luego $P(a) = 0$

3. Escribir un polinomio que tenga por raíces 2, 3 y –1 de multiplicidad 2.

Solución:

Como este polinomio tiene cuatro raíces; 2, 3, –1, –1, su grado debe ser a lo menos cuatro y $(x - 2)$, $(x - 3)$ y $(x + 1)^2$ son factores del polinomio pedido.

Luego un polinomio que cumple las exigencias es

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - 2)(x - 3)(x + 1)^2 \\ &= (x^2 - 5x + 6)(x^2 + 2x + 1) \\ P(x) &= x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6 \end{aligned}$$

4. Determinar las raíces racionales de la ecuación

$2x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 18x - 9 = 0$

Solución:

Divisores de $9 = \{\pm 1, \pm 3, \pm 9\}$

Divisores de $2 = \{\pm 1, \pm 2\}$

Posibles soluciones racionales de la ecuación propuesta:

$$\left\{\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 3, \pm \frac{3}{2}, \pm 9, \pm \frac{9}{2}\right\}$$

Para determinar cuáles son las soluciones debemos probar ya sea usando división sintética o evaluando la ecuación para los distintos valores posibles.

Para $\left(-\frac{1}{2}\right)$: $2\left(-\frac{1}{2}\right)^4 - 3\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 18\left(-\frac{1}{2}\right) - 9 = 0$

luego $-\frac{1}{2}$ es raíz y $\left(x + \frac{1}{2}\right)$ es factor de

$2x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 18x - 9$

para 3: $2(3)^4 - 3(3)^3 - 2(3)^2 - 18(3) - 9 = 0$

luego 3 es raíz y $(x - 3)$ es factor del polinomio.

La ecuación $2x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 18x - 9 = 0$ no tiene más raíces racionales.

5. Factorizar el polinomio $x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 7x - 10$.

Solución:

Son posibles raíces racionales del polinomio los divisores de

$10 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\}$

Si aplicamos división sintética y probamos con 5 obtenemos:

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & -4 & -6 & 7 & -10 & 5 \rightarrow (x-5) \text{ es factor} \\ & 5 & 5 & -5 & 10 & \\ \hline \underbrace{1 \quad 1 \quad -1 \quad 2}_{} & & & & 0 & \rightarrow \quad \text{resto} \end{array}$$

$x^3 + x^2 - x + 2$ es el cociente que se obtiene al dividir el polinomio dado por $(x - 5)$ y resto 0.

Luego podemos escribir:

$x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 7x - 10 = (x^3 + x^2 - x + 2)\,(x - 5)$

Ahora buscamos algún factor del polinomio $x^3 + x^2 - x + 2$.

Son posibles soluciones los divisores de $2 = \{\pm 1, \pm 2\}$.

Aplicando división sintética y probando con -2 obtenemos

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & 1 & -1 & 2 & -2 \rightarrow (x+2) \\ & - & 2 & 2 & \\ \hline \underbrace{1 \quad -1 \quad 1}_{} & & & 0 & \rightarrow \text{resto} \end{array}$$

$x^2 - x + 1$ es el cociente que se obtiene al dividir $x^3 + x^2 - x + 2$ por $x + 2$ y resto 0.

luego:

$x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 7x - 10 = (x^2 - x + 1)\,(x + 2)\,(x - 5)$

Observamos que $x^2 - x + 1$ no es factorizable en $\mathbb{R}$ ya que sus raíces son complejas conjugadas (discriminante menor que cero).

Así podemos decir que: $(x^2 - x + 1)\,(x + 2)\,(x - 5)$ es la factorización del polinomio $x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 7x - 10$

6. Resolver la ecuación $x^3 - 16x^2 + 79x - 120 = 0$ sabiendo que una de sus raíces es 7 unidades menor que el producto de las otras dos y que las tres raíces son racionales.

Solución:

De acuerdo con la relación entre coeficientes y raíces de una ecuación sabemos que:

$$r_1 + r_2 + r_3 = 16$$
$$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = 120$$

y por dato del problema podemos decir que:

$$r_3 = r_1 \cdot r_2 - 7$$

así resolviendo el sistema:

$$\boxed{\begin{array}{l} r_1 + r_2 + r_3 = 16 \\ r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = 120 \\ r_3 + 7 = r_1 \cdot r_2 \end{array}}$$

$$r_3^2 + 7r_3 - 120 = 0$$
$$(r_3 + 15)(r_3 - 8) = 0$$
$$r_3 = -15 \quad \text{o} \quad r_3 = 8$$

Si $r_3 = -15$

$$\left.\begin{aligned} r_1 + r_2 &= 31 \\ r_1 \cdot r_2 &= -8 \end{aligned}\right| \quad \Rightarrow r_1 = \frac{31 + \sqrt{993}}{2} \quad \text{y} \quad r_2 = \frac{31 - \sqrt{993}}{2}$$

que no son racionales.

Si $r_3 = 8$

$$\left.\begin{aligned} r_1 + r_2 &= 8 \\ r_1 \cdot r_2 &= 15 \end{aligned}\right| \quad \Rightarrow r_1 = 3 \quad \text{y} \quad r_2 = 5$$

Por lo tanto, la solución es $r_1 = 3$, $r_2 = 5$ y $r_3 = 8$

7. Si la ecuación $x^3 - 3x^2 - x - 6 = 0$ tiene como raíces los valores α, β y γ. Hallar el valor de las siguientes relaciones:

a) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$

b) $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$

c) $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\gamma}$

Solución:

Sabemos que:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 3 \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma &= -1 \\ \alpha\beta\gamma &= 6 \end{aligned} \qquad \text{(Relación entre coeficientes y raíces de una ecuación)}$$

a) $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma = 9$

$$= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\,\underbrace{(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)}_{-1} = 2$$

$$= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2 = 2$$

Luego: $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 4$

b) La ecuación es $x^3 - 3x^2 + x - 6 = 0$ y se satisface para todas sus raíces, luego:

$$\begin{aligned} \alpha:&\quad \alpha^3 - 3\alpha^2 + \alpha - 6 = 0 \\ \beta:&\quad \beta^3 - 3\beta^2 + \beta - 6 = 0 \\ \gamma:&\quad \gamma^3 - 3\gamma^2 + \gamma - 6 = 0 \end{aligned}$$

Sumando:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\,\underbrace{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}_{4} + \underbrace{(\alpha + \beta + \gamma)}_{3} - 18 = 0$$

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 12 + 3 - 18 = 0$$

Luego:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 27$$

c) Sabemos que:

$$\underbrace{\alpha\,\beta\,\gamma}_{6}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)=\underbrace{\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta}_{-1}$$

$$6\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)=-1$$

luego: $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=-\frac{1}{6}$

Ejercicios

1. Dados los polinomios y los números siguientes, determine cuál de ellos es (o son) raíz(ces).

a) x^3-2x^2-5x+6 $-2, 3, 0$

b) $x^2+3x-10$ $2, 3, 5$

c) $x^4+x^3-7x^2-x+6$ $2, -3, 1$

d) $x^4+x^3-6x^2-x+5$ $1, 2, -1$

e) x^4-1 $1, -1, 2$

2. Escriba un polinomio con coeficientes enteros cuyas raíces sean:

a) $2, 3, 1$

b) $3, -1, 2$ de multiplicidad 2

c) 1 de multiplicidad 2 y -1 de multiplicidad 3

d) $\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 5$

e) $1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}, -1$

f) $0, \frac{1}{2}$, 2 de multiplicidad 3

g) $3-2i, 5, 3+2i$

3. Determine las raíces racionales de las siguientes ecuaciones:

a) $x^4-6x^2+7x-6=0$

b) $2x^5+7x^4+6x^3+3x^2+4x-4=0$

c) $x^4-8x^2-4x+3=0$

d) $3x^4-7x^3+5x^2-7x+2=0$

e) $2x^4+x^3-8x^2-x+6=0$

f) $x^3+x^2-5x+3=0$

4. Factorice los siguientes polinomios:

a) $x^4+10x^3+35x^2+50x+24$

b) $x^4+2x^3-7x^2-8x+12$

c) $4x^4-28x^3+47x^2+7x-12$

d) $x^5+x^4+5x^2-x-6$

e) $2x^4-5x^3-20x^2-22x-15$

f) x^3-6x^2+8x-3

g) $36x^4-13x^2+1$

h) $x^4+2x^3-3x^2-4x+4$

i) $x^4-5x^3+6x^2+4x-8$

j) $-x^5+3x^4-5x^3+7x^2-6x+2$

5. Encuentre las soluciones de la ecuación $x^3-7x+6=0$, sabiendo que el producto de dos de ellas es 2.

6. Resuelva la ecuación $x^3-19x^2+114x-216=0$, sabiendo que el cuadrado de una de sus raíces es igual al producto de las otras dos.

7. Resuelva la ecuación $2x^3-x^2-18x+9=0$, sabiendo que la suma de dos de sus raíces es cero.

8. Resuelva la ecuación $x^3-4x^2-17x+60=0$, sabiendo que la suma de dos de sus raíces es 1.

9. Resuelva la ecuación $x^3-4x^2-11x+30=0$, sabiendo que la suma de dos de sus raíces es igual a la tercera.

Ejercicios

10. Resuelva la ecuación $x^3 - 15x^2 + 71x - 105 = 0$, sabiendo que una de sus raíces es la mitad de la suma de las otras dos.

11. Encuentre las soluciones de la ecuación $x^3 - 6x^2 - 37x + 90 = 0$, sabiendo que una de sus raíces es dos unidades menor que la suma de las otras dos.

12. Resuelva la ecuación $x^3 - 17x^2 + 82x - 120 = 0$, sabiendo que el producto de dos de sus raíces es 2 unidades mayor que la tercera y que las tres raíces son racionales.

13. Si α, β y γ son las raíces de la ecuación $x^3 - 2x^2 - 6x - 8 = 0$, encuentre el valor de:

a) $\alpha + \beta + \gamma$

b) $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$

c) $\alpha\beta\gamma$

d) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$

e) $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$

f) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$

g) $\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha\gamma} + \frac{1}{\beta\gamma}$

14. Encuentre la suma y el producto de las raíces de la ecuación $3x^3 - 4x^2 + x - 6 = 0$

15. Encuentre la suma y el producto de las raíces de la ecuación $5x^5 - 2x^4 + 3x + 20 = 0$

16. Determine la suma y el producto de las raíces de la ecuación $3x^6 - 2x^5 + x - 1 = 0$

17. Escriba la ecuación de menor grado de coeficientes reales que tengan por solución $1 + i$, $\sqrt{2}$ y 5

18. Encuentre la ecuación de menor grado que tenga una raíz igual a $\sqrt{2} - \sqrt{3}$

19. Determine el valor de k en la ecuación $x^3 - 11x^2 + 38x + k = 0$, para que una solución sea el doble de otra.

20. Determine el valor de k en la ecuación $x^3 - 3x^2 + k = 0$, para que tenga una raíz de multiplicidad 2.

21. Determine el valor de k en la ecuación $x^3 - 2x^2 - 4x + k = 0$, para que tenga dos raíces opuestas.

22. Pruebe que si $a + bi$ es raíz de un polinomio $P(x)$, entonces $(x - a)^2 + b^2$ divide a ese polinomio.

23. Sabiendo que $2 - i$ es raíz del polinomio $x^3 - 7x^2 + 15x - 9$, encuentre un polinomio de grado 2 que lo divida (que sea factor). (Aplique ejercicio anterior.)

24. Si $1 + 3i$ es raíz del polinomio $P(x) = x^4 - x^3 + 6x^2 + 14x - 20$, encuentre un polinomio primo de segundo grado que lo divida (Aplique ejercicio 22).

NOTA: Polinomio primo es aquel no factorizable en $\mathbb{R}$.

25. Si i es raíz del polinomio $P(x) = x^5 - 4x^4 + 7x^3 - 8x^2 + 6x - 4$, factorice este polinomio en sus factores primos. (Aplique ejercicio 22.)

26. Determine k en la ecuación $x^3 - kx^2 + 72x - 108 = 0$ sabiendo que dos raíces son iguales y todas son enteras.

27. Determine la multiplicidad de la raíz r dada en la ecuación:

a) $x^8 + 5x^6 - 6x^2 = 0$; $r = 0$

b) $2x^5 - 17x^4 + 51x^3 - 69x^2 + 47x - 14 = 0$; $r = 1$

Soluciones

1. a) $-2, 3$ b) 2 c) $2, -3, 1$ d) $1, -1$ e) $1, -1$

2. a) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ b) $x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 4x - 12$
   c) $x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1$ d) $x^3 - 5x^2 - 2x + 10$
   e) $x^3 - x^2 - 3x - 1$ f) $2x^5 - 13x^4 + 30x^3 - 28x^2 + 8x$
   g) $x^3 - 11x^2 + 43x - 65$

3. a) $2, -3$ b) $\frac{1}{2}, -2$ de multiplicidad 2 c) $-1, 3$ d) $-$[illegible]$, 2$
   e) $-1, 1, -2, \frac{3}{2}$ f) $-3, 1$ de multiplicidad 2

4. a) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4)$ b) $(x - 1)(x + 2)(x + 3)(x - 2)$
   c) $(x - 3)(x - 4)(2x + 1)(2x - 1)$ d) $(x + 1)(x - 1)(x + 2)(x^2 - x + 3)$
   e) $(x - 5)(2x + 3)(x^2 + x + 1)$ f) $(x - 1)(x^2 - 5x + 3)$
   g) $(2x + 1)(2x - 1)(3x + 1)(3x - 1)$ h) $(x - 1)^2 (x + 2)^2$
   i) $(x - 2)^3 (x + 1)$ j) $(x^2 - 2)(1 - x)^3$

5. $1, 2$ y -3 6. $4, 6$ y 9 7. $3, -3$ y $\frac{1}{2}$ 8. $5, 3$ y -4 9. $5, 2$ y -3
10. $7, 5$ y 3 11. $2, 9$ y -5 12. $3, 4$ y 10

13. a) 2 b) -6 c) 8 d) 16 e) 68 f) $-$[illegible] g) $\frac{1}{4}$

14. Suma $= \frac{4}{3}$ producto $= 2$ 15. Suma $= \frac{2}{5}$ producto $= -4$

16. Suma $= \frac{2}{3}$ producto $= -$[illegible] 17. $x^5 - 7x^4 + 10x^3 + 4x^2 - 24x + 20 = 0$
18. $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$ 19. $k = -40$ 20. $k = 4$ 21. $k = 8$
23. $x^2 - 4x + 5$ 24. $x^2 - 2x + 10$ 25. $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 1)(x - 2)$
26. $k = 15$ 27. a) 2 b) 1

Prueba de selección múltiple

1. Si $P(x) = 4x^5 - 6x^2 - x + 3$ es un polinomio, su grado es:

A. -1
B. 3
C. 4
D. 5
E. 6

2. En el polinomio $Q(x) = 25x^6 - 14x^4 + x^2 - 1$ el coeficiente principal es:

A. 25
B. 14
C. 6
D. 4
E. -1

3. Dados $P(x) = 4x^2 - 5x + 3$ y $Q(x) = 2x^3 - x^2 + 5$, entonces $P(x) + Q(x)$ es:

A. $6x^5 - 6x^3 + 8$
B. $2x^4 + 3x^3 - 5x + 8$
C. $2x^3 + 3x^2 - 5x + 8$
D. $2x^3 + 4x^2 - 5x + 8$
E. $2x^3 - 3x^2 - 5x + 8$

4. Sean $P(x) = 5x^4 - 3x + 1$ y $Q(x) = x^4 - 3$, entonces $P(x) - Q(x) =$

A. $6x^4 - 3x - 2$
B. $4x^4 - 3x + 4$
C. $4x^4 - 3x - 2$
D. $4x^4 + 3x - 2$
E. $4x^4 + 3x + 4$

5. Si $P(x) = x^4 - x^3 + 3$ y $Q(x) = x^4 + x^3 - 3$, entonces $2\,P(x) - Q(x)$ es:

A. $2x^4$
B. $-2x^3 + 6$
C. $x^4 - 3x^3 + 9$
D. $x^4 - 3x^3 - 9$
E. $x^4 - 3x^3 + 6$

6. Si $P(x) = 6x^5 - x^4 + 2x^3 - x^2 - 1$, entonces $P(-1)$ es:

A. 1
B. -1
C. 11
D. -11
E. 6

7. Si $P(x) = x^5 + 2x^4 - x - 2$ son soluciones o raíces del polinomio

I) i **II)** $-i$ **III)** -2

A. Sólo I
B. Sólo II
C. Sólo III
D. Sólo I y II
E. I, II y III

8. Si $P(x) = 6x^3 - x^2 + 2x - 1$, entonces $P(3)$ es:

A. 156
B. 158
C. 80
D. 84
E. 152

9. Si $Q(x) = 4x^4 - 3x^2 + 2$, entonces $Q(\sqrt{2})$ es:

A. 10
B. 12
C. 14
D. 16
E. 18

10. Cuál (o cuáles) de las siguientes expresiones es(son) polinomio(s) en $\mathbb{R}$.

I) $x^{-2} - x^{-1} + 1$ **II)** $3x^2 - x^{-1}$
III) $x^{\frac{1}{2}} - 2x + 3$

A. Sólo I
B. Sólo II
C. Sólo III
D. Todas
E. Ninguna

11. Al dividir $x^4 - 2x^2 - 6$ por $x + 3$, el resto es:

A. 69
B. 62
C. 59
D. 57
E. 54

12. Al dividir $x^5 - 6x^4 - 2x^3 - x + 1$ por $x^3 - 3x^2 + 1$ el cociente y el resto son respectivamente:

A. $x^2 + 3x - 11$ y $-34x^2 - 2x + 12$
B. $x^2 - 3x + 11$ y $-34x^2 + 2x - 12$
C. $x^2 - 3x - 11$ y $-34x^2 + 2x + 12$
D. $x^2 + 3x + 11$ y $-34x^2 - 2x - 12$
E. $-x^2 + 3x - 11$ y $34x^2 - 2x - 12$

13. Cuál es el polinomio que dividido por $x^2 + 1$ da como cociente $x + 2$ y resto $x - 3$.

A. $x^3 - 2x^2 + 2x - 1$
B. $x^3 + 2x^2 + 2x - 1$
C. $x^3 + 2x^2 - 2x - 1$
D. $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$
E. $x^3 - 2x^2 + 2x + 1$

14. Al dividir $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - x + 1$ por $x - 2$ el resto es:

A. 3
B. 9
C. 15
D. 51
E. 61

15. ¿Cuál es el valor que debe tener k en el polinomio $4x^5 - 2x^3 + kx - 2$ para que sea divisible por $x - 2$?

A. 5
B. 25
C. 50
D. –50
E. –55

16. ¿Qué valor debe tener k en el polinomio $6x^3 - kx^2 + x - 1$ para que al dividirlo por $x^2 - 3$, el resto sea $19x - 7$?

A. –1
B. 0
C. 1
D. 2
E. 3

17. Qué valores deben tomar a y b para que se verifique la igualdad
$2ax^3 - bx^2 + 1 = 2\,(bx^3 - 2x^2 + \frac{1}{2})$
$\forall\, x \in \mathbb{R}$.

A. $a = 4$ $b = -4$
B. $a = 2$ $b = 2$
C. $a = 4$ $b = 4$
D. $a = -4$ $b = -4$
E. $a = -2$ $b = -2$

18. Para que $x^3 - ax - x + b$ sea divisible por $x^2 + x - a$ debe ser:

A. $a = -b$
B. $a = b$
C. $a + b = 1$
D. $a - b = 1$
E. $a + b = -1$

19. Sea $P(x) = x^3 + 2x^2 - ax + b - 3$.
Determinar la relación que debe cumplirse entre a y b para que $P(x) + 6$ sea divisible por $x + 1$.

A. $a + b - 3 = 0$
B. $a + b - 4 = 0$
C. $a + b + 3 = 0$
D. $a + b + 4 = 0$
E. $a - b + 4 = 0$

20. Qué valores deben tener a y b para que $5x^3 - 2x^2 + ax - b$ sea divisible por $x^2 + 1$.

A. 5 y 2
B. 5 y –2
C. –5 y 2
D. –5 y –2
E. 4 y 2

21. El polinomio de segundo grado tal que $P(1)^1 = 6$, $P(2) = 14$ y $P(-2) = 18$ es:

A. $3x^2 - x + 4$
B. $3x^2 - x - 4$
C. $3x^2 + x + 4$
D. $-3x^2 + x + 4$
E. $-3x^2 + x - 4$

22. El polinomio con coeficientes reales de menor grado cuyas raíces son 3, 4 y 5 es:

A. $x^3 - 12x^2 + 47x + 60$
B. $x^3 - 12x^2 - 47x - 60$
C. $x^3 + 12x^2 + 47x + 60$
D. $x^3 + 12x^2 - 47x - 60$
E. $x^3 - 12x^2 + 47x - 60$

Prueba de selección múltiple

23. El polinomio con coeficientes reales de menor grado cuyas raíces son 1 y $\sqrt{2}$ es:

A. $x^3 - x^2 + 2x + 2$
B. $x^3 - x^2 - 2x - 2$
C. $x^3 + x^2 + 2x - 2$
D. $x^3 - x^2 - 2x + 2$
E. $x^3 + x^2 + 2x + 2$

24. El polinomio con coeficientes reales de menor grado cuyas raíces son
$1 - \sqrt{3}$, i y 2 es:

A. $x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 2x + 4$
B. $x^5 - 4x^4 - 3x^3 + 2x + 4$
C. $x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 2x + 4$
D. $x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 2x - 4$
E. $x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 2x + 4$

25. Las raíces racionales del polinomio $x^5 - 2x^4 + x - 4$ son:

A. 2, –2 y 4
B. 1, 2 y –2
C. 1, 4 y –4
D. 1, –1 y 4
E. no tiene

26. Las raíces racionales del polinomio $x^5 - 4x^4 - 5x^3 + 20x^2 + 4x - 16$ son:

A. 1, –1, 2, –2 y 4
B. 1, –1, 2, 4 y –4
C. 1, –1, –2, 4 y –4
D. 1, 2, –2, 4 y –4
E. –1, 2, –2, 4 y –4

27. El polinomio $x^3 - 7x - 6$ es equivalente a:

A. $(x + 2)(x - 3)(x - 1)$
B. $(x + 2)(x - 3)(x + 1)$
C. $(x - 2)(x + 3)(x + 1)$
D. $(x - 2)(x + 3)(x - 1)$
E. $(x + 2)(x + 3)(x + 1)$

28. Si las raíces de la ecuación
$x^3 - 2x^2 + x - 3 = 0$ son
α, β y γ, entonces el valor de
$\alpha + \beta + \gamma =$

A. 1
B. 2
C. 3
D. –3
E. –2

29. Si las raíces de la ecuación
$2x^3 - 6x^2 + 8x - 10 = 0$
son α, β y γ, entonces el valor de la expresión $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ es:

A. 3
B. 4
C. 5
D. 1
E. $\frac{8}{9}$

30. El valor de k en la ecuación
$x^3 - kx^2 + 48x - 36 = 0$
para que ésta tenga una raíz de multiplicidad 2 es:

A. 10
B. 12
C. 13
D. 24
E. 32

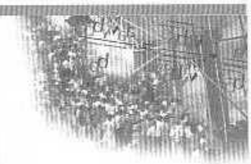
Soluciones

1. D	2. A	3. C	4. B	5. C	6. D	7. E	8. B
9. B	10. E	11. D	12. C	13. B	14. C	15. E	16. D
17. C	18. B	19. D	20. A	21. A	22. E	23. D	24. E
25. E	26. A	27. B	28. B	29. D	30. C		

CAPÍTULO 6

Potencias y Raíces

Potencias 6.1



6.1.1. Potencias de exponente natural

Definimos $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a$ (n veces)
La expresión a^n se llama potencia n-ésima de a.
"a" es la base de la potencia.
"n" es el exponente de la potencia.

6.1.2. Potencias de exponente cero y exponente entero negativo

De las propiedades que estudiaremos más adelante se deduce que:

$a^0 = 1$ para todo valor de "a". (con $a \neq 0$)

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ para todo valor de a : $a \neq 0$; $n \in \mathbb{N}$

Ejercicios resueltos

1. Calculemos el valor de $(-2)^3$

   Aplicando la definición tenemos:

   $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

2. Calculemos el valor de -3^4

   Observamos aquí que la base de la potencia es 3 (y no -3), expresándola en forma de producto nos queda:

   $-3^4 = -3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = -81$

3. Calculemos $(-3)^4$

   Aquí la base es (-3) y por lo tanto:

   $(-3)^4 = (-3)\,(-3)\,(-3)\,(-3) = 81$

4. Calculemos 2^{-5}

Ejercicios resueltos

Aplicando la definición (exponente negativo):

$$2^{-5}=\frac{1}{2^5}=\frac{1}{2\bullet 2\bullet 2\bullet 2\bullet 2}=\frac{1}{32}$$

5. Calculemos $\left(2\frac{1}{2}\bullet\left(-\frac{17}{4}\right)^5\bullet(-3)^{-7}\right)^0$

Como el exponente es cero (y la base es distinta de cero), aquí no es necesario hacer ningún cálculo. El valor es 1.

Ejercicios

I. Aplique la definición de potencias para calcular :

1. 2^2
2. 3^2
3. 5^2
4. $(-2)^3$
5. 3^3
6. 4^2
7. 10^1
8. 12^2
9. $(-3)^2$
10. $(-3)^3$
11. $(8)^3$
12. $(-12)^3$
13. $(-11)^2$
14. $(-5)^4$
15. $(3)^5$
16. $(-3)^5$
17. 6^3
18. $(-6)^3$
19. 2^5
20. $(-2)^5$
21. $(0,5)^2$
22. $(-1,1)^3$
23. $(0,3)^3$
24. $(-2)^2$
25. $(3,5)^0$
26. $(-1,7)^0$
27. $(2,1)^1$
28. $-(0,8)^2$
29. $(-0,8)^2$
30. $(2,5)^3$
31. $\left(\frac{2}{3}\right)^3$
32. $\left(\frac{3}{2}\right)^3$
33. $\left(\frac{2}{5}\right)^2$
34. $\left(-\frac{3}{4}\right)^4$
35. $\left(\frac{3}{4}\right)^4$
36. $\left(\frac{-3}{4}\right)^6$
37. $\left(\frac{3}{5}\right)^2$
38. $\left(\frac{11}{2}\right)^4$
39. $\left(3\frac{2}{3}\right)^2$
40. $\left(1\frac{1}{5}\right)^4$
41. $\left(2\frac{1}{3}\right)^3$
42. $\left(3\frac{2}{5}\right)^2$
43. $\left(-1\frac{1}{2}\right)^4$
44. $\left(2\frac{5}{7}\right)^3$
45. $\left(-3\frac{3}{4}\right)^3$
46. $(-0,27)^1$
47. $(0,08)^2$
48. $\left(-1\frac{1}{16}\right)^3$
49. $\left(-2\frac{3}{4}\right)^4$
50. $\left(-1\frac{1}{4}\right)^3$

II. Aplique la definición para calcular :

1. 2^{-1}
2. 2^{-2}
3. $(-2)^{-2}$
4. $-(-2)^{-2}$
5. $(-5)^{-3}$
6. $(5)^{-4}$
7. $-(5)^{-3}$
8. 2^{-3}
9. $(-1)^{-5}$
10. $(-1)^{-6}$
11. $(-0,5)^{-4}$
12. $(0,5)^{-3}$
13. $(1,7)^{-2}$
14. $-(0,2)^{-2}$
15. $-(2,1)^{-3}$
16. $(2,05)^0$
17. $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$
18. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$
19. $\left(\frac{-3}{2}\right)^{-2}$
20. $-\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$
21. $\left(2\frac{3}{4}\right)^{-3}$
22. $\left(1\frac{1}{3}\right)^{-4}$
23. $-(-0,25)^0$
24. $(-0,25)^0$
25. $-\left(5\frac{4}{3}\right)^{-2}$
26. $\left(3\frac{1}{4}\right)^{-4}$
27. $\left(2\frac{4}{5}\right)^{-3}$
28. $(0,06)^{-1}$
29. $-(0,04)^{-2}$
30. $-\left(-2\frac{3}{4}\right)^{-1}$
31. $-\left(1\frac{1}{15}\right)^{-2}$
32. $-(-0,06)^{-1}$
33. $\left(-3\frac{3}{5}\right)^{-2}$
34. $-(0,71)^{-2}$

35. $-\left(-1\frac{1}{2}\right)^{-2}$

36. $(0{,}04)^{-1}$

37. $(-0{,}04)^{-1}$

38. $\left(2\frac{3}{2}\right)^{-6}$

39. $\left(-6\frac{1}{16}\right)^{0}$

40. $\left(2\frac{3}{5}\right)^{0}$

III. Calcule el valor de:

1. $3 + 3^2$
2. $2^3 - 2^2$
3. $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3$
4. $3 \cdot 3^5$
5. $(2 \cdot -3)^2$
6. $2 \cdot (-3)^2$
7. $-(-2)^2 + (-3)^2$
8. $(0{,}2)^2 - (0{,}1)^2$
9. $-5 \cdot (-3)^2$
10. $-5 \cdot (-3)^3$
11. $(-5)^2 \cdot (-2)^3$
12. $(-3)^1 + (-3)^3$
13. $3 \cdot 4^3$
14. $2^3 \cdot 3^2 \cdot 4^1$
15. $2^6 \cdot 3^2 - 2^5 \cdot 3^2 - 1$
16. $(12)^{-1} + (-12)^{-1}$
17. $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} - \left(\frac{4}{3}\right)^{3} + \frac{2}{3}$
18. $1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3$
19. $1 - 2^{-1} + 2^{-2} - 2^{-3}$
20. $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} - \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} + \left(\frac{4}{3}\right)^{3}$
21. $(0{,}02)^2 + (0{,}02)^{-2}$
22. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$
23. $\left(\frac{3}{2}\right)^{2} + \left(-\frac{3}{2}\right)^{2}$
24. $\left(\frac{3}{2}\right)^{2} - \left(-\frac{3}{2}\right)^{2}$
25. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} + \left(2\frac{3}{2}\right)^{-2} - \left(1\frac{1}{5}\right)^{-1}$
26. $\left(\frac{4}{7}\right)^{-3} - \left(\frac{7}{4}\right)^{3}$
27. $\left(\frac{3}{2}\right)^{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{4}$
28. $3^{-2} : 2^{-3}$
29. $\left\{\left[\left(3\frac{4}{5}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right]^{0}\right\}^{-3}$
30. $\left[\left[\left(11\frac{3}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}\right]^{0}$
31. $\left(3\frac{4}{3} + 2\frac{1}{2}\right)^{0}$
32. $\frac{2}{3^{-2}} + \frac{3}{2^{-1}}$
33. $\left[\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{7}\right)^{2}\right]^{0}$
34. $\left(3\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(2\frac{1}{2}\right)^{-2}$
35. $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1} + \left(\frac{5}{2}\right)^{-1}$
36. $\left(\frac{1}{2}\right)^{0} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + 2^{-1}$
37. $3^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{2}$
38. $\left[1 + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{3}\right]^{2}$
39. $\left[\left(3\frac{1}{5}\right) - \left(2\frac{1}{7}\right)^{-3} + 2\frac{1}{5}\right]^{0}$
40. $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{3}$

IV. Determine el valor numérico de las siguientes expresiones para los valores de las variables indicadas:

1. $x^2 + y^2$ si $x = 1$ e $y = 2$
2. $x^3 - 3y^2 + 2x$ si $x = 2$ e $y = -1$
3. $2a^2b - 3b^2$ si $a = 3$ y $b = 2$
4. $5^a - 5^b$ si $a = -2$ y $b = -3$
5. $3\,(a^2 + 2ab + b^2)$ si $a = 4$ y $b = 3$
6. $-2\,(1 - x + x^2 - x^3)$ si $x = -2$
7. $x^{-3} + y^{-3}$ si $x = -1$ e $y = -2$

Ejercicios

8. $2x^{-4} - 3y^{-5}$	si $x = -1$	e $y = -2$
9. $a(2a^2 - a^{-2})$	si $a = -3$	
10. $(2 + x - y)^{-2}$	si $x = -2$	e $y = -3$
11. $(-3x^2y^4)^{-1}$	si $x = -3$	e $y = -3$
12. $(3xy)^{-x} + y^{-2}$	si $x = -2$	e $y = -1$
13. $(2^2 + 3^3)^{-x}$	si $x = -3$	
14. $(a^{-b} + b^{-a})^{-1}$	si $a = -2$	y $b = 3$
15. $2a(2a^3 - 3a^4)^{-2}$	si $a = -2$	
16. $(3x^{-2} + y^{-3} - 2y^{-4})^{-1}$	si $x = -2$	e $y = -1$
17. $2^{a-b} + a^2 - b^2$	si $a = 5$	y $b = 3$
18. $x^{-4} + 4^{-x}$	si $x = -1$	
19. $2x^{-1} - 3y^{-3} + xy$	si $x = -1$	e $y = -1$
20. $x^{-2} + y^{-3}$	si $x = -2$	e $y = -3$

Soluciones

I. 1. 4 2. 9 3. 25 4. –8 5. 27 6. 16 7. 10 8. 144 9. 9 10. –27 11. 512 12. –1.728 13. 121 14. 625 15. 243 16. –243 17. 216 18. –216 19. 32 20. –32 21. 0,25 22. –1,331 23. 0,027 24. 4 25. 1 26. 1 27. 2,1 28. –0,64 29. 0,64 30. 15,625 31. $\frac{8}{27}$ 32. $3\frac{3}{8}$ 33. $\frac{4}{25}$ 34. $\frac{81}{256}$ 35. $\frac{81}{256}$ 36. $\frac{729}{4.096}$ 37. $\frac{9}{25}$ 38. $915\frac{1}{16}$ 39. $13\frac{4}{9}$ 40. $2\frac{46}{625}$ 41. $12\frac{19}{27}$ 42. $11\frac{14}{25}$ 43. $5\frac{1}{16}$ 44. $19\frac{342}{343}$ 45. $-52\frac{47}{64}$ 46. –0,27 47. 0,0064 48. $-1\frac{817}{4.096}$ 49. $57\frac{49}{256}$ 50. $-1\frac{61}{64}$

II. 1. $\frac{1}{2}$ 2. $\frac{1}{4}$ 3. $\frac{1}{4}$ 4. $-\frac{1}{4}$ 5. $-\frac{1}{125}$ 6. $\frac{1}{625}$ 7. $-\frac{1}{125}$ 8. $\frac{1}{8}$ 9. –1 10. 1 11. 16 12. 8 13. $\frac{100}{289}$ 14. –25 15. $-\frac{1.000}{9.261}$ 16. 1 17. $\frac{4}{3}$ 18. $\frac{9}{4}$ 19. $\frac{4}{9}$ 20. $-\frac{4}{9}$ 21. $\frac{64}{1.331}$ 22. $\frac{81}{256}$ 23. –1 24. 1 25. $-\frac{9}{361}$ 26. $\frac{256}{28.561}$ 27. $\frac{125}{2.744}$ 28. $\frac{50}{3}$ 29. –625 30. $\frac{4}{11}$ 31. $\frac{-225}{256}$ 32. $\frac{50}{3}$ 33. $\frac{25}{324}$ 34. $-\frac{10.000}{5.041}$ 35. $-\frac{4}{9}$ 36. 25 37. –25 38. $\frac{64}{117.649}$ 39. 1 40. 1

III. 1. 12 2. 4 3. 15 4. 729 5. 36 6. 18 7. 5 8. 0,03 9. –45 10. 135 11. –200 12. –30 13. 192 14. 288 15. 287 16. 0 17. $\frac{2}{3}$ 18. $\frac{5}{8}$ 19. $\frac{5}{8}$ 20. $\frac{52}{27} = 1\frac{25}{27}$ 21. 2.500,0004 22. $5\frac{1}{2}$ 23. $4\frac{1}{2}$ 24. 0 25. $\frac{110}{147}$ 26. 0

27. 1   28. $\frac{8}{9}$ 29. 1   30. 1   31. 1   32. 24   33. 1   34. $\frac{78}{175}$ 35. $2\frac{9}{10}$ 36. $3\frac{1}{2}$

37. $9\frac{2}{9}$ 38. $1\frac{57}{64}$ 39. 1   40. $\frac{16}{625}$

IV. 1. 5   2. 9   3. 24   4. $\frac{4}{125}$ 5. 147   6. -30 7. $-1\frac{1}{8}$ 8. $2\frac{3}{32}$ 9. $-53\frac{2}{3}$ 10. $\frac{1}{9}$

11. $-\frac{1}{2.187}$ 12. 37   13. 29.791   14. $\frac{8}{71}$ 15. $-\frac{1}{1.024}$ 16. $-\frac{4}{9}$ 17. 20   18. 5

19. 2   20. $\frac{23}{108}$

Propiedades de las potencias 6.2

6.2.1 Multiplicación de potencias de igual base

Para multiplicar potencias de igual base mantenemos la base y sumamos los exponentes, es decir:

$$a^n \cdot a^m = a^{m+n}$$

6.2.2 División de potencias de igual base

En este caso, mantenemos la base y restamos los exponentes, es decir:

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

6.2.3 Elevación de potencia a potencia

Aquí debemos elevar la base a la multiplicación de los exponentes.

$$(a^m)^n = a^{n \cdot m}$$

6.2.4 Multiplicación de potencias de igual exponente

Elevamos el producto de las bases al exponente común.

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n$$

6.2.5 División de potencias de igual exponente

Elevamos el cociente de las bases al exponente común.

$$a^n : b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Los recíprocos de las propiedades 6.2.4 y 6.2.5 también son válidos, es decir:

6.2.6 Potencia de un producto

Se eleva cada factor del producto al exponente:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

6.2.7 Potencia de un cociente

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Ejercicios resueltos

1. Expresemos en forma de potencias:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)$$

Aquí tenemos el producto del término $\left(-\frac{1}{2}\right)$ cinco veces (el término se repite 5 veces).

Así es que :

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^5$$

2. Efectuemos los productos:

$$\frac{3}{4}a^5 \cdot \frac{2}{5}a^6 \cdot 15\,a^{11}$$

La multiplicación es una operación conmutativa, por lo tanto :

$$\frac{3}{4}a^5 \cdot \frac{2}{5}a^6 \cdot 15\,a^{11} = \frac{3}{\cancel{4}_{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{5}} \cdot \cancel{15}^{3} a^5 \cdot a^6 \cdot a^{11}$$

$$= \frac{9}{2}a^{22}$$

3. Desarrollemos $(a^2 + a^6)^2$

Se trata de un cuadrado de binomio, por lo tanto,

$$(a^2 + a^6)^2 = a^4 + 2a^8 + a^{12}$$

4. Efectuemos los productos indicados :

$$a^{m-3} \cdot b^2 \cdot a^4 \cdot b^{n+2}$$

conmutamos los términos agrupando bases iguales y luego multiplicamos.

$a^{m-3} \cdot a^4 \cdot b^2 \cdot b^{n+2} = a^{m+1} \cdot b^{n+4}$

5. Efectuemos las operaciones:

$25 \cdot 5^{a+1} - 27 \cdot 3^{a+4}$

Observamos que el 25 es potencia de 5 ($25 = 5^2$) y que 27 es potencia de 3 ($27 = 3^3$). Entonces:

$$25 \cdot 5^{a+1} - 27 \cdot 3^{a+4} = 5^2 \cdot 5^{a+1} - 3^3 \cdot 3^{a+4}$$
$$= 5^{a+3} - 3^{a+7}$$

6. Multipliquemos: $16^2 \cdot 4^{n+2}$

Podemos expresar el 16 como potencia de 4; $16 = 4^2$

$16^2 \cdot 4^{n+2} = 4^4 \cdot 4^{n+2} = 4^{n+6}$

Ejercicios

I.

1. $a^3 \cdot a^5 =$
2. $x^2 \cdot x^3 \cdot x^6 =$
3. $-6a^4 \cdot -5a^3 \cdot -2a^8$
4. $(a - b^2)^4 \cdot (a - b^2)^3$
5. $2ab(a^2 + b^2)$
6. $n^{k-3} \cdot n^{4-k}$
7. $n^{-2} \cdot n^{-k} \cdot n^{3+k}$
8. $10c^8 \cdot 0{,}25c^{-4} \cdot 2c^6$
9. $p^{n+1} \cdot p^{n-2}$
10. $(2a^2 - 3b^2)^4$
11. $(a^2 + a^3 + a^4)^{-2}$
12. $(1 + a + a^2) \cdot a^6$
13. $(n^{a-1} - 2n^{a-2} + n) \cdot n^{a+3}$
14. $(y^{-1} - y^6 + y^9) \cdot 2y^2$
15. $(3a^{n-2} - 2a^{n-3})\, a^3$
16. $(m^6 + n^6)(m^6 - n^6)$
17. $32 \cdot 2^{k-2}$
18. $27 \cdot 3^{m+3}$
19. $5 \cdot 5^4$
20. $16 \cdot 2^{4+a}$
21. $\frac{2}{3}p^5 \cdot \frac{-3}{5}p^9 \cdot \frac{10}{7}p^{12}$
22. $0{,}07a^{-3} \cdot 0{,}5a^{-2} \cdot 11{,}1a^{-1}$
23. $\frac{4}{5}m^2p \cdot \frac{3}{5}m^2p^2$
24. $2(a+b)^7 \cdot 5(a+b)^8 \cdot -4(a+b)^{-6}$
25. $25^{4+p} \cdot 125^{3-p}$
26. $9 \cdot 3^{n-2} \cdot 3^{n+1}$
27. $125 \cdot 5^{-2} \cdot 5^{-4}$
28. $3c^4 \cdot 9c^6 \cdot 81c^{-4}$
29. $2 \cdot 4^n \cdot 8^{3n}$
30. $64 \cdot 2^{-6} \cdot 2^2$
31. $p^{2n-1} \cdot \frac{1}{2}p^{2n-2} \cdot \frac{1}{4}p^{2n-3}$
32. $a^{m-3}(a^{m-2} - a^{3-m})$
33. $128 \cdot 2^{4n-1}$
34. $\frac{3}{4}(m-p)^{-n} \cdot \frac{4}{5}(m-p)^{-2n}$
35. $0{,}4 \cdot 4^{-1} + 0{,}3 \cdot 3^{-2} + 0{,}1 \cdot 10^{-3}$
36. $(10^5 + 10^6)\, 10^{-4}$

Ejercicios

37. $a^{x+1} \cdot a^{x-1} \cdot a^{2x}$

38. $-12n^8 \cdot \frac{-3}{4} n^{-7} \cdot \frac{-2}{5} n^{-1}$

39. $\frac{3}{4} p^{n-5} \cdot \frac{3}{5} p^{5-n}$

40. $-3a^{n-2} \cdot b^{n-3} \cdot 6a^3 \cdot b^{-4}$

II.

1. $x^6 : x^2$
2. $a^4 : a$
3. $m^{16} : m^6$
4. $(2p - 3q)^5 : (2p - 3q)^3$
5. $(2^{16} : 2^4) : 2^8$
6. $a^{11} : (a^3 : a^5)$
7. $\frac{(a+b)^3}{a+b}$
8. $x^7 : x^4$
9. $\frac{x^6 + x^5}{x^5 + x^4}$
10. $(a^{-8} - a^{-3}) : a^{-11}$
11. $(p^{-a} + p^{-2a} + p^{-3a}) : p^{-4a}$
12. $(a : ab) : b$
13. $(abc : bc) : a$
14. $81 : 3^{a-3}$
15. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} : \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$
16. $a^{-6} : a^{-8}$
17. $(2p^{-2} q^{-3}) : 6p^{-3} q^{-5}$
18. $(u^{-4} : 4u) : u^{-6}$
19. $(a^{-2} : 3a^4) : (a^6 : a^{-6})$
20. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$
21. $(e^x - e^{-x}) : e^x$
22. $-3a^2 : 6a^3$
23. $m^{6-c} : m^{c-6}$
24. $x^{2n-1} : x^{n-1}$
25. $8^{2-3x} : 2^{x+2}$
26. $a^{-2x} : a^x$
27. $\left(\frac{a}{4}\right)^{-2} : \left(\frac{a}{2}\right)^{-3}$
28. $\frac{a^{1-n}}{b^n} : \frac{a^n}{b^{1-n}}$
29. $(m^{-a} - m^{-b} - m^{-c}) : m$
30. $(a^4 - b^4) : (a^2 - b^2)$
31. $(a^6 - a^5) : a^5$
32. $(16a^8 - 8a^4 - 4a^2) : 2a^2$
33. $[a^8 : (a^4 : a^2)] : a^3$
34. $[m^{p+1} : 2m^{p+2}] : 2m^{p-2}$

III.

1. $3^4 \cdot 2^4$
2. $a^m \cdot b^m$
3. $(-2a)^{4x} \cdot (3b)^{4x}$
4. $\left(\frac{2}{3} p\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{2} q\right)^5$
5. $(1{,}04)^{-1} \cdot (1{,}4)^{-1}$
6. $3^{6-n} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{6-n}$
7. $(2x + y)^3 \cdot (2x - y)^3$
8. $(m + n)^6 \cdot (m - n)^6$
9. $(2rs)^{-4} \left(\frac{2}{rs}\right)^{-4}$

10. $(0,2)^5 \cdot 10^5$

11. $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4$

12. $\left(-\frac{3a^2}{2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{2}{a^2}\right)^{-1}$

13. $2^{-6} : 3^{-6}$

14. $\left(\frac{a}{y}\right)^x \cdot \left(\frac{2y}{3a}\right)^x$

15. $(b^2 - 4ac)^2 \cdot (b-2)^2$

16. $(a - 3b)^{-3} \cdot (a + 3b)^{-3}$

17. $0,6\ a^{-4} \cdot 0,2\ b^{-4}$

18. $2^7 : 3^7$

19. $\frac{16^2}{8^2}$

20. $\frac{3^5}{9^5}$

21. $\frac{21^2}{49^2}$

22. $\left(\frac{2}{3}\right)^4 : \left(\frac{4}{9}\right)^4$

23. $3,2^{-2} : 1,6^{-2}$

24. $\frac{25^{-3}}{75^{-3}}$

25. $\frac{(3m)^a}{m^a}$

26. $\frac{6^3}{(6\,a)^3}$

27. $\frac{2\,a^y}{6\,a^y}$

28. $(a^2 - b^2)^2 : (a - b)^2$

29. $-5p^{-2} : -6q^{-2}$

30. $\frac{(6x - 3y)^{2a+b}}{(36x^2 - 9y^2)^{2a+b}}$

IV.

1. $(2^2)^3$

2. $(3^2)^3$

3. $[(-2)^2]^4$

4. $((-6)^3)^{-1}$

5. $[(8,5)^{-1}]^{-2}$

6. $(2a^2b)^3$

7. $(m^a m^b)^{\frac{1}{ab}}$

8. $(2^{-3})^{-2}$

9. $(100^2)^{-1} \cdot 10^4$

10. $10^5 : (10^4 : 10^2)$

11. $[(a - b)^2 : (a - b)]^{-1}$

12. $(x^2)^m$

13. $(x^2 y^{-3})^{-1} \cdot x^2 y^{-2}$

14. $[p^{x+2} \cdot q^{x+2}]$

15. $\left[\left(\frac{3}{2}a^{-1}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}a^{-2}\right)\right]^{-3}$

16. $(a - a^2 + a^3 - a^4) \cdot a^{-1}$

17. $(a^{-1} + a^{-2} + a^{-3} + a^{-4}) : a^{-5}$

18. $[(-z^{-4}) : (-z)^4]^3$

19. $[125\,x^6 : (25x^3 : 5x)]^{-2}$

20. $(5a^3)^{-3} : (5a^3)^{-4}$

21. $[(x + y) : (x^2 - y^2)]^{-2}$

22. $[(a^2 - b^2) : (a - b)]^{-1}$

23. $[(-0,117)^0 : (-3,15)^2]^{-1}$

24. $[(0,03)^2 \cdot (0,3)^2]^{-1}$

25. $9x^5 : [2x : x^5]^{-3}$

26. $[16a^3 : 4a^2]^{-2}$

27. $[a^{x+1} \cdot b^{x-2}]^{3-x} \cdot (ab)^x$

28. $[x^u + y^v]^{-1}$

29. $[a^6 : b^5]^{-2}$

30. $\left[\left(-\frac{2}{5}\right)^2 \cdot -\left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \frac{20}{3}\right]^{-1}$

Soluciones

I. 1. a^8 2. x^{11} 3. $-60\,a^{15}$ 4. $(a - b^2)^7$ 5. $2a^3b + 2ab^3$ 6. n 7. n 8. $5 \cdot c^{10}$ 9. p^{2n-1} 10. $16a^8 - 96a^6b^2 + 216a^4b^4 - 216a^2b^6 + 81 \cdot b^8$ 11. $\frac{1}{a^4 + 2a^5 + 3a^6 + 2a^7 + a^8}$ 12. $a^6 + a^7 + a^8$ 13. $n^{2a+2} - 2n^{2a+1} + n^{a+4}$ 14. $2y - 2y^8 + 2y^{11}$ 15. $3a^{n+1} - 2a^n$ 16. $m^{12} - n^{12}$ 17. 2^{k+3} 18. 3^{m+6} 19. 5^5 20. 2^{8+a} 21. $-\frac{4}{7}p^{26}$ 22. $0,3885 \cdot a^{-6}$

23. $\frac{12}{25}m^4 \cdot p^3$ 24. $-40\,(a+b)^9$ 25. 5^{17-p} 26. 3^{2n+1} 27. 5^{-3} 28. $3^7 c^6$

29. 2^{11n+1} 30. 2^2 31. $\frac{1}{8}p^{6n-6}$ 32. $a^{2m-5}-1$ 33. 2^{4n+6} 34. $\frac{3}{5}(m-p)^{-3n}$

35. $0{,}133\overline{43}$ 36. $10+10^2$ 37. a^{4x} 38. $-\frac{18}{5}$ 39. $\frac{9}{20}$ 40. $-18 \cdot a^{n+1} \cdot b^{n-7}$

II. 1. x^4 2. a^3 3. m^{10} 4. $(2p-3q)^2$ 5. 2^4 6. a^{13} 7. $(a+b)^2$ 8. x^3 9. x

10. a^3-a^8 11. $p^{3a}+p^{2a}+p^a$ 12. b^{-2} 13. 1 14. 3^{7-a} 15. $\left(\frac{3}{2}\right)^3$ 16. a^2 17. $\frac{1}{3} \cdot p \cdot q^2$

18. $\frac{1}{4}u$ 19. $\frac{1}{3}a^{-18}$ 20. $\frac{2}{3}$ 21. $1-e^{-2x}$ 22. $-\frac{1}{2}a^{-1}$ 23. m^{12-2c} 24. x^n 25. 2^{4-10x}

26. a^{-3x} 27. $2a$ 28. $a^{1-2n} \cdot b^{1-2n}$ 29. $m^{-a-1}-m^{-b-1}-m^{-c-1}$ 30. a^2+b^2

31. $a-1$ 32. $8a^6-4a^2-2$ 33. a^3 34. $2^{-2} \cdot m^{1-p}$

III 1. 6^4 2. $(ab)^m$ 3. $(-6ab)^{4x}$ 4. $(p \cdot q)^5$ 5. $(1,456)^{-1}$ 6. 1 7. $(4x^2-y^2)^3$ 8. $(m^2-n^2)^6$

9. 4^{-4} 10. 2^5 11. 2^{-4} 12. $-\frac{1}{3}$ 13. $\left(\frac{3}{2}\right)^6$ 14. $\left(\frac{2}{3}\right)^x$ 15. $(b^3-2b^2-4abc+8ac)^2$

16. $(a^2-9b^2)^{-3}$ 17. $0{,}12\,(ab)^{-4}$ 18. $\left(\frac{2}{3}\right)^7$ 19. 4 20. 3^{-5} 21. $\left(\frac{3}{7}\right)^2$ 22. $\left(\frac{3}{2}\right)^4$

23. 2^{-2} 24. 3^3 25. 3^a 26. a^{-3} 27. $\frac{1}{3}$ 28. $(a+b)^2$ 29. $\frac{5}{6}\left(\frac{q}{p}\right)^2$ 30. $(6x+3y)^{-2a-b}$

IV 1. 2^6 2. 3^6 3. $(-2)^8$ 4. $(-6)^{-3}$ 5. $(8,5)^2$ 6. $8a^6 \cdot b^3$ 7. $m^{\frac{1}{b}} \cdot n^{\frac{1}{a}}$ 8. 2^6

9. 1 10. 10^3 11. $(a-b)^{-1}$ 12. x^{2m} 13. y 14. $(pq)^{x+2}$ 15. $\left(\frac{4}{9}\right)^3 a^9$ 16. $1-a+a^2-a^3$

17. $a^4+a^3+a^2+a$ 18. $-z^{-24}$ 19. $5^{-4} \cdot x^{-8}$ 20. $5a^3$ 21. $(x-y)^2$ 22. $(a+b)^{-1}$

23. $(-3,15)^2$ 24. $12.345{,}679$ 25. $72x^{-7}$ 26. $(4a)^{-2}$

27. $a^{-x^2+3x+3} \cdot b^{-x^2+6x-6}$ 28. $\frac{1}{x^u+y^v}$ 29. $a^{-12} \cdot b^{10}$ 30. $-\frac{125}{48}$

6.3 Ecuaciones exponenciales

Son aquellas ecuaciones que presentan las variables en el exponente. Para resolverlas aplicamos la siguiente propiedad de potencias: $a^x = a^y \leftrightarrow x = y$, para todo a, $a \neq 0$, $a \neq 1$. Si en una ecuación no resulta posible igualar las bases, la solución se obtiene aplicando LOGARITMOS, tema que no abordaremos en este capítulo.

Ejercicios resueltos

1. Resolvamos la ecuación $2^x = 4$.
Debemos expresar ambos miembros de la igualdad como potencias de la misma base; en este caso claramente la base es 2.

Así tenemos: $2^x = 4 \rightarrow 2^x = 2^2$
y aplicando la propiedad indicada al comienzo obtenemos la solución $x = 2$.

2. Resolvamos la ecuación $3^{x+2} = 27$.

Procediendo como en el ejercicio anterior tenemos:

$3^{x+2} = 3^3 \rightarrow x + 2 = 3 \rightarrow x = 1$

3. Resolvamos la ecuación $16^x = 32$

Aquí, tanto el 16 como el 32 son potencias de 2. Entonces:

$$16^x = 32 \rightarrow (2^4)^x = 2^5 \rightarrow 2^{4x} \cdot 2^5$$
$$\rightarrow 4x = 5$$
$$\rightarrow x = \frac{5}{4}$$

4. Resolvamos la ecuación $7^{x-3} = 1$

Recordemos la propiedad de potencias: $a^0 = 1$, es decir, podemos representar el 1 como una potencia de cualquier base (distinta de cero) con exponente cero.

Así: $7^{x-3} = 1 \rightarrow 7^{x-3} = 7^0 \rightarrow x - 3 = 0$
$\rightarrow x = 3$

Ejercicios

I.

1. $2^x = 16$

2. $2^{x-5} = 32$

3. $3^{6-x} = 27^{x-2}$

4. $32^{x-2} = 2$

5. $64^{2x-5} = 16^{x-2}$

6. $125^{x-3} = 25^{x-3}$

7. $3 \cdot 27^{x-2} = 9^x$

8. $5^{x-3} = 1$

9. $16^{2x-4} = 1$

10. $2^{x+1} = 8$

11. $2^{x+1} = 16$

12. $2^{x+1} = 128$

13. $5^{x+4} = 125^{x-4}$

14. $a^{2x-1} = a^2$

15. $m^{x-3} = (m^2)^{2x}$

16. $(3a)^{2x-5} = 9a^2$

17. $(p-3)^{5x} = p^2 - 6p + 9$

18. $(a^2 + 2ab + b^2)^2 = (a+b)^{2x}$

19. $(1 + a^2)^x = 1 + a^2$

20. $(a^2 + 2a - 9)^{x-3} = 1$

21. $81^{x-6} = 3^{x-4}$

22. $32^{2x-3} = 2^{x+3}$

23. $125^{y+2} = 5^{2y}$

24. $256^y = 4 \cdot 4^{2y-3}$

Ejercicios

25. $m^{2y-5} = (m^5)^{y+4}$

26. $(2p)^{6y+1} = 16p^4$

27. $\begin{cases} 2^{x+1} = 4^y \\ 2^{2x} = 4^{y+1} \end{cases}$

28. $\begin{cases} a^{x+1} = a^2 \\ b^{x+y} = 1 \end{cases}$

29. $\begin{cases} m^{4x-2} = m^2 \\ p^{x+y} = p^3 \end{cases}$

30. $\begin{cases} u^{2x-1} = u^5 \\ v^{2y} = v^x \end{cases}$

31. $\begin{cases} m^x = m^{y+1} \\ n^{2x} = n^{y-3} \end{cases}$

32. $\begin{cases} 5^{3x-2} = 125^y \\ 32^{x-2} = 16 \end{cases}$

33. $\begin{cases} (a+b)^{6x} = (a^2 + 2ab + b^2)^y \\ (2a)^{x-y} = 32a^5 \end{cases}$

34. $\begin{cases} 2^{x-y} = 2 \\ 16^y = 32^x \end{cases}$

35. $\begin{cases} 25^{x-3} = 1 \\ p^{x-y} = p^2 \end{cases}$

36. $\begin{cases} m^{2y} = m^4 \\ m^{x+y} = m^4 \end{cases}$

37. $\begin{cases} u^{x-5y} = u^0 \\ v^{3y} = 1 \end{cases}$

38. $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} = \frac{4}{9}$

39. $\left(\frac{4}{5}\right)^{2x-3} = \frac{5}{4}$

40. $\left(2\frac{1}{3}\right)^{2x} = \frac{9}{49}$

41. $\left(1\frac{1}{5}\right)^{x-6} = \frac{216}{125}$

42. $(0{,}1)^{2x-4} = 10$

43. $(0{,}001)^{x-4} = (0{,}01)^x$

44. $(0{,}5)^{x-6} = \frac{1}{16}$

45. $\left(\frac{2}{7}\right)^{2x-3} = \left(\frac{3}{4}\right)^0$

46. $(0{,}0001)^{2x} = 0{,}1$

47. $\begin{cases} a^x \cdot a^y = a^4 \\ xy = 3 \end{cases}$

48. $\begin{cases} m^{2x+1} \cdot m^{2y+1} = m^{18} \\ m^x : m^y = m \end{cases}$

49. $\begin{cases} 2^{3x} \cdot 2^{2x-y} = 16 \\ 3^{2x+y} = 81 \end{cases}$

50. $128^{\frac{1}{x}} = 1$

Soluciones

I. 1. $x = 4$ 2. $x = 10$ 3. $x = 3$ 4. $\frac{11}{5}$ 5. $\frac{11}{4}$ 6. $x = 3$ 7. $x = 5$

8. $x = 3$ 9. $x = 2$ 10. $x = 2$ 11. $x = 3$ 12. $x = 6$ 13. $x = 8$

14. $x = \frac{3}{2}$ 15. $x = -1$ 16. $x = \frac{7}{2}$ 17. $x = \frac{2}{5}$ 18. $x = 2$ 19. $x = 1$

20. $x = 3$ 21. $x = \frac{20}{3}$ 22. $x = 2$ 23. $y = -6$ 24. $y = -1$ 25. $y = \frac{-25}{3}$

26. $y = \frac{1}{2}$ 27. $x = 3$; $y = 2$

28. $x = 1$; $y = -1$ 29. $x = 1$; $y = 2$ 30. $x = 3$; $y = \frac{3}{2}$

31. $x = -4$; $y = -5$ 32. $x = \frac{14}{5}$; $y = \frac{32}{15}$ 33. $x = \frac{-5}{2}$; $y = \frac{-15}{2}$

34. $x = -4$; $y = -5$ 35. $x = 3$; $y = 1$ 36. $x = 2$; $y = 2$

37. $x = 0$; $y = 0$ 38. $x = 4$ 39. $x = 1$ 40. $x = -1$ 41. $x = 9$

42. $x = \frac{3}{2}$ 43. $x = 12$ 44. $x = 10$ 45. $x = \frac{3}{2}$ 46. $x = \frac{1}{8}$

47. $(x = 3 \wedge y = 1) \vee (x = 1 \wedge y = 3)$ 48. $x = \frac{9}{2}$; $y = \frac{7}{2}$

49. $x = \frac{8}{7}$; $y = \frac{12}{7}$ 50. No hay solución en $\mathbb{R}$.

Raíces 6.4

Definición: $\sqrt[n]{a} = b \leftrightarrow b^n = a$

"n" es el índice de la raíz

"a" es la cantidad subradical

Observaciones:

1. Si $a > 0$ y n es par, entonces $\sqrt[n]{a}$ representa un número real, es decir, $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}$.
2. Si $a < 0$ y n es par, entonces $\sqrt[n]{a}$ representa un número complejo, conjunto que estudiaremos más adelante.

   Es decir, $a < 0$ y n es par $\rightarrow \sqrt[n]{a} \notin \mathbb{R}$.
3. Las operaciones definidas para las raíces verifican las propiedades que se cumplen en los números reales ($\mathbb{R}$).

Propiedades 6.5

6.5.1 Potencia de exponente fraccionario

Toda potencia de exponente fraccionario se puede expresar como raíz cuyo índice es el denominador del exponente

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

6.5.2. Multiplicación de raíces de igual índice

Multiplicamos las cantidades subradicales y conservamos el índice.

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

6.5.3. División de raíces de igual índice

Dividimos las cantidades subradicales y conservamos el índice.

$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$

6.5.4. Raíz de una raíz

Conservamos la cantidad subradical y multiplicamos los índices.

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Ejercicios resueltos

1. Determinemos el valor de $\sqrt[3]{216}$

Aplicando la definición tenemos:

$\sqrt[3]{216} = 6$, ya que $6^3 = 216$

2. Expresemos la raíz $\sqrt[5]{m^3}$ como potencia de exponente fraccionario.

Aplicando directamente la propiedad tenemos:

$\sqrt[5]{m^3} = m^{\frac{3}{5}}$

3. Obtengamos el siguiente producto: $\sqrt[3]{15a} \cdot \sqrt[3]{5a}$

Se trata de multiplicación de raíces de igual índice;

$\sqrt[3]{15a} \cdot \sqrt[3]{5a} = \sqrt[3]{75a^2}$

4. Obtengamos la siguiente división $18\sqrt[5]{m^4} : 3\sqrt[5]{m}$

Se trata de división de raíces de igual índice;

$$\frac{18\sqrt[5]{m^4}}{3\sqrt[5]{m}} = 6\sqrt[5]{m^3}$$

5. Simplifiquemos $\sqrt{75a^3b^4}$

Aplicando las propiedades tenemos:

$$\sqrt{75a^3b^4} = \sqrt{25 \cdot 3 \cdot a^2 \cdot a \cdot b^2 \cdot b^2} = 5ab^2\sqrt{3a}$$

6. Expresemos en forma de una sola raíz, $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^2y}}$

Podemos directamente multiplicar los índices; nos queda:

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^2y}} = \sqrt[15]{x^2y}$$

7. Expresemos como una sola raíz $\sqrt[3]{a\sqrt{b}}$

Aquí es necesario introducir el término "a" dentro de la raíz cuadrada antes de multiplicar los índices. Así:

$$\sqrt[3]{a\sqrt{b}} = \sqrt[3]{\sqrt{a^2b}} = \sqrt[6]{a^2b}$$

8. Realicemos las operaciones siguientes:

$$\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + 4\sqrt{2} - 5\sqrt{3}$$

Recordemos que sólo podemos sumar o restar raíces que tengan el mismo índice y la misma cantidad subradical; nos queda entonces:

$$\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + 4\sqrt{2} - 5\sqrt{3} = \sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - 5\sqrt{3}$$
$$= 5\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$$

Ejercicios

I. Determine el valor de:

1. $\sqrt{4} = 2$

2. $\sqrt{25} = 5$

3. $\sqrt{64} = 8$

4. $\sqrt[3]{64} = x^3 = 64 = 4$

5. $\sqrt[3]{1.000}$ $x^3 = 1000 = 10$

6. $\sqrt{121} = 11$ $x^2 = 121$

7. $\sqrt{196} = 14$

8. $\sqrt{100} = 10$

9. $\sqrt[3]{8} = 2$

10. $\sqrt[3]{-27} = -3$

11. $\sqrt[3]{-216} = -6$

12. $\sqrt[3]{0{,}001} = 0{,}1$

13. $\sqrt[3]{-125} = -5$

14. $\sqrt[4]{625} = 5$

15. $\sqrt[4]{256} = 4$

16. $\sqrt[4]{81} = 3$

17. $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$

18. $\sqrt[5]{-32} = -2$

19. $\sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$

20. $\sqrt{\frac{81}{49}} = \frac{8}{7}$

21. $\sqrt[3]{-512} = -8$

22. $\sqrt{841} = 29$

23. $\sqrt[3]{8.000} = 20$

24. $\sqrt[5]{-\frac{1}{32}} = -\frac{1}{2}$

25. $\sqrt[5]{1} = 1$

26. $\sqrt{9{,}61}$ $3{,}1$

27. $\sqrt{\frac{121}{196}}$ $\frac{11}{14}$

28. $\sqrt{0{,}09} =$

29. $\sqrt{0{,}16} =$

30. $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{2}{3}$

Ejercicios

II.

1. Escriba los cuadrados de los números naturales del 1 al 20.
2. Escriba los cubos de los números naturales del 1 al 30.
3. Exprese los números naturales del 1 al 20 como raíces cuadradas.
4. Exprese los números naturales del 1 al 10 como raíces cúbicas.

III.

Exprese las siguientes potencias como raíces:

1. $a^{\frac{3}{4}}$

2. $m^{\frac{1}{2}}$

3. $3^{\frac{4}{5}}$

4. $2^{\frac{1}{6}}$

5. $p^{\frac{3}{4}}$

6. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

7. $(mn^2)^{\frac{1}{3}}$

8. $(3pq)^{\frac{2}{5}}$

9. $(5a^2)^{\frac{3}{4}}$

10. $(m^6n^7)^{\frac{1}{8}}$

11. $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{5}}$

12. $\left(\frac{2a}{3b^2}\right)^{\frac{3}{7}}$

13. $\left(\frac{5}{2a}\right)^{\frac{1}{6}}$

14. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

15. $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$

16. $2^{\frac{2}{3}}$

17. $(5a^2bc^5)^{\frac{1}{3}}$

18. $(4m^2n)^{\frac{p}{q}}$

19. $\left(\frac{3z}{2y}\right)^{\frac{y}{z}}$

20. $\left(\frac{4m}{5n^6}\right)^{\frac{p}{q}}$

IV.

Exprese las siguientes raíces como potencias de exponente fraccionario.

1. $\sqrt{a^3}$

2. $\sqrt{5m}$

3. $\sqrt[4]{(2p^2)^3}$

4. $\sqrt[6]{2x^5}$

5. $\sqrt[6]{5a^7}$

6. $\sqrt[11]{p^{10}}$

7. $\sqrt{2m^4}$

8. $\sqrt{3p^6q^3}$

9. $\sqrt[5]{x^2y^6}$

10. $\sqrt[x]{xy}$

11. $\sqrt[n]{81}$

12. $\sqrt[p]{\frac{2a}{5}}$

13. $\sqrt[z]{\frac{5t}{3u}}$

14. $\sqrt[p+q]{(2a)^p}$

15. $\sqrt[ab]{(3xy)^{2a}}$

16. $\sqrt[b]{(5a^2)^a}$

V.

Aplique la definición para despejar la incógnita indicada en cada caso:

1. $\sqrt{a} = 5$ (a)

2. $\sqrt[3]{z} = 2$ (z)

3. $\sqrt[5]{m} = n$ (m)

4. $\sqrt[3]{3p+1} = 4$ (p)

5. $\sqrt{2n} = \frac{1}{2}$ (n)

6. $\sqrt{a+1} = b^2$ (a)

7. $\sqrt[4]{2t+5} = 3$ (t)

8. $\sqrt[n]{2x+1} = m$ (x)

9. $\sqrt[x]{y-1} = 4$ (y)

10. $\sqrt[n]{2p+q} = 3q$ (p)

11. $\sqrt[4]{x-2} = 2$ (x)

12. $\sqrt{a^{-1}} = 4$ (a)

13. $\sqrt{\frac{1}{2a}} = \frac{1}{2}$ (a)

14. $\sqrt{16a} = n$ (a)

15. $\sqrt{p+2} = 2p$ (p)

16. $\sqrt[3]{t+5} = 3$ (t)

17. $\sqrt[5]{a-2} = b$ (a)

18. $\sqrt[6]{2a-1} = b$ (a)

19. $\sqrt{a^{-2}} = 1$ (a)

20. $\sqrt{x^{-1}} = \frac{1}{6}$ (x)

VI.

Señale qué condición se debe cumplir en cada caso para que las expresiones representen números reales

1. $\sqrt{x-1}$
2. $\sqrt{x+1}$
3. $\sqrt{2a+1}$
4. $\sqrt{a-3}$
5. $\sqrt{1-2x}$
6. $\sqrt{3-2x}$
7. $\sqrt{a^2-1}$
8. $\sqrt{x^2-25}$
9. $\sqrt{9-y^2}$
10. $\sqrt{2x}$
11. $\sqrt{\frac{1}{x}}$
12. $\sqrt{1+a} \cdot \sqrt{1-a}$
13. $\sqrt{2-x^2}$
14. $\sqrt{\frac{1}{x-1}}$
15. $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$
16. $\sqrt{\frac{-1}{x}}$
17. $\sqrt{-2a^2}$
18. $\sqrt{\frac{-6}{6-a}}$
19. $\sqrt{\frac{x+4}{x+1}}$
20. $\sqrt{1+a^2}$

VII.

Señale a qué conjunto pertenecen las siguientes raíces.
($\mathbb{R}$: números reales; $\mathbb{C}$: números complejos)

1. $\sqrt{2}$
2. $\sqrt[3]{2}$
3. $\sqrt[3]{-2}$
4. $\sqrt{-3}$
5. $\sqrt[3]{-3}$
6. $\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$
7. $\sqrt[4]{-\frac{1}{3}}$
8. $1+\sqrt{2}$
9. $\sqrt{2}+\sqrt{3}$
10. $\sqrt{2}+\sqrt{-3}$
11. $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{-3}$
12. $6+\sqrt{3}+\sqrt[3]{-3}$
13. $2-\sqrt[3]{3}$
14. $1+\sqrt[4]{2}$

5. $\sqrt[3]{-1}-\sqrt[3]{1}$

16. $\sqrt[3]{-3}+\sqrt[3]{-2}$

VIII.

Simplifique las siguientes expresiones:

1. $\sqrt{9b^2}$
2. $\sqrt{16x^2}$
3. $\sqrt{25a^2b^2c^2}$
4. $\sqrt{81a^4b^2}$
5. $\sqrt[3]{125x^3y^6}$
6. $\sqrt[6]{p^6q^{12}r^{18}}$
7. $\sqrt[4]{81m^4n^{12}}$
8. $\sqrt[7]{a^{21}b^7c^{14}}$
9. $\sqrt[5]{32m^{25}}$
10. $\sqrt{x^2-2x+1}$
11. $\sqrt[5]{m^{20}n^{15}t^{10}}$
12. $\sqrt[6]{\frac{64a^6}{b^{12}}}+a$
13. $\sqrt{\frac{1}{t^4}}-\sqrt{t^4}$
14. $\sqrt{\frac{a^8}{b^6}}+\sqrt{\frac{a^6}{b^8}}$

Ejercicios

15. $\sqrt{\dfrac{a^2+2ab+b^2}{4a^2+4a+1}}$

16. $\sqrt{\dfrac{25a^6}{a^2-12a+36}}$

17. $\sqrt{\dfrac{a^2+2a+1}{a^2-2a+1}}$

18. $\sqrt[3]{x^3-3x^2y+3xy^2-y^3}$

IX. Ubique las siguientes raíces entre dos números enteros consecutivos:

1. $\sqrt{3}$
2. $\sqrt{5}$
3. $\sqrt[3]{20}$
4. $\sqrt[3]{-35}$
5. $\sqrt[3]{-100}$
6. $\sqrt[3]{1.125}$
7. $\sqrt{4.810}$
8. $\sqrt[4]{34}$
9. $\sqrt[4]{112}$
10. $\sqrt[6]{1.156}$
11. $\sqrt[3]{-124}$
12. $\sqrt[3]{-1.149}$
13. $\sqrt[3]{334}$
14. $\sqrt[4]{112}$

X. Reduzca a términos semejantes:

1. $\sqrt{2}+2\sqrt{2}+3\sqrt{2}$
2. $3\sqrt{3}-5\sqrt{3}-6\sqrt{3}+9\sqrt{3}$
3. $\sqrt{5}-3\sqrt{5}-11\sqrt{5}+2\sqrt{5}$
4. $3\sqrt{a}-4\sqrt{a}+6\sqrt{a}-\sqrt{a}$
5. $3a\sqrt{2}+2a\sqrt{2}-a\sqrt{2}$
6. $\sqrt[3]{p}-5\sqrt[3]{p}+2\sqrt[3]{p}$
7. $\sqrt{3}-2\sqrt{2}+5\sqrt{3}-6\sqrt{2}+\sqrt{2}$
8. $4\sqrt{6}-3\sqrt{5}-5\sqrt{6}+2\sqrt{5}$
9. $\sqrt{a}-\sqrt{b}-3\sqrt{a}-\sqrt{a}-3\sqrt{b}$
10. $\sqrt[n]{p}-2\sqrt[n]{p}+18\sqrt[n]{p}-4\sqrt[n]{p}$
11. $3q\sqrt{a}-2q\sqrt{b}+5q\sqrt{b}-q\sqrt{a}$
12. $3\sqrt{7}+2\sqrt{28}-6\sqrt{63}$
13. $11\sqrt{2}+3\sqrt{8}+13\sqrt{12}$
14. $3\sqrt{3}-22\sqrt{75}-5\sqrt{27}$
15. $4\sqrt{2}-3\sqrt{12}+3\sqrt{75}-6\sqrt{8}$
16. $2\sqrt{5}-13\sqrt{20}+5\sqrt{45}-11\sqrt{5}$
17. $3\sqrt{28}-2\sqrt{20}+5\sqrt{80}-4\sqrt{63}$
18. $\sqrt{45}+3\sqrt{20}-11\sqrt{112}$
19. $a\sqrt{b}-3a\sqrt{b}+3\sqrt{a^2b}-\sqrt[4]{a^4b^2}$
20. $\frac{1}{2}\sqrt{a}-\frac{2}{5}\sqrt{a}+\frac{3}{4}\sqrt{a}-\frac{1}{3}\sqrt{a}$

XI. Efectúe las siguientes multiplicaciones:

1. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$
2. $\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}$
3. $\sqrt{3a}\cdot\sqrt{2a}\cdot\sqrt{6}$
4. $\sqrt[3]{3x}\cdot\sqrt[3]{2x}\cdot\sqrt[3]{16x^2}$

5. $\sqrt[4]{2p^3} \cdot \sqrt[4]{5p^7} \cdot \sqrt[4]{7p^6}$

6. $\sqrt{a-1} \cdot \sqrt{a-1}$

7. $\sqrt{3a+2} \cdot \sqrt{3a-2}$

8. $\sqrt[3]{3x^2yz} \cdot \sqrt[3]{2x^2y^2z}$

9. $\left(\sqrt{3x}+1\right)\left(\sqrt{3x}-1\right)$

10. $\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)$

11. $\left(1+\sqrt{5}\right)^2-\left(1-\sqrt{3}\right)^2$

12. $\left(2-3\sqrt{3}\right)^2$

13. $\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2$

14. $\sqrt{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

15. $\sqrt{16-\sqrt{3}} \cdot \sqrt{16+\sqrt{3}}$

16. $\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2$

17. $\left(1+2\sqrt{2}\right)^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)^2$

18. $\left(\sqrt{3}-1\right)^2+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$

19. $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right)$

20. $\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \cdot \sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

XII. Efectúe las siguientes divisiones:

1. $\sqrt{18} : \sqrt{2}$

2. $\sqrt{125} : \sqrt{5}$

3. $\sqrt[3]{9a^6b^{12}} : \sqrt[3]{ab^5}$

4. $\sqrt[4]{x^6y^2z^4} : \sqrt[4]{xyz}$

5. $\left(\sqrt[5]{a^2}+\sqrt[5]{a^6}+\sqrt[5]{a^9}\right) : \sqrt[5]{a^2}$

6. $\sqrt[3]{x^2y} : \sqrt[3]{xy^2}$

7. $\sqrt{26a} : \sqrt{2a}$

8. $3\sqrt{128a^4} : 6\sqrt{64a^2}$

9. $\sqrt{444a^3} : \sqrt{111a}$

10. $\left(12\sqrt{20}-18\sqrt{15}\right) : 6\sqrt{5}$

11. $\left(30\sqrt{6a}-27\sqrt{18a}+18\sqrt{12a}\right) : 6\sqrt{6a}$

12. $\left(\sqrt{x^2-4} : \sqrt{x-2}\right) : \sqrt{x+2}$

13. $\sqrt{96x^3} : \sqrt{24x}$

14. $\sqrt{2^{x+3}} : \sqrt{2^x}$

15. $\sqrt[n]{a^{m+6}} : \sqrt[n]{a^{m-6}}$

16. $\sqrt{x^2-8x+7} : \sqrt{x-7}$

17. $a^2\sqrt{a^2-121} : a\sqrt{a-11}$

18. $\sqrt[3x]{2^{2a}} : \sqrt[3x]{2^{a-1}}$

19. $\sqrt{x^2-25} : \sqrt{x-5}$

20. $\sqrt{a^2-6a+9} : \sqrt{a-3}$

XIII. Exprese en forma de una sola raíz los siguientes términos:

1. $\sqrt{\sqrt{3}} = \sqrt[4]{3}$

2. $\sqrt{\sqrt[3]{2}}$ $\sqrt[6]{2}$

3. $\sqrt[4]{\sqrt{5a}}$ $\sqrt[8]{5a}$

4. $\sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{2^2 2}} = \sqrt[4]{8}$

Ejercicios

$\sqrt[4]{\sqrt[3]{-64}}$

5. $\sqrt[3]{2\sqrt{3}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^2 3}} = \sqrt[6]{12}$

6. $\sqrt[4]{a\sqrt{a}} = \sqrt[4]{\sqrt{a^2 a}}\ \sqrt[8]{a^3}$

7. $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}\ \sqrt{\sqrt{a^2 a\sqrt{a}}}$ X
$\sqrt{\sqrt{\sqrt{a^2 a^3 a}}} = \sqrt[8]{a^6}$

8. $\sqrt{5\sqrt[3]{2}}\ \sqrt[6]{250}$

9. $\sqrt[n]{a\sqrt[m]{b}}\ \sqrt[n\cdot m]{amb}$

10. $3\sqrt{3\sqrt{3}}\ \sqrt[4]{\sqrt[3]{3^2 3}}$ X
$\sqrt[4]{\sqrt[3]{9\cdot 3}}$

11. $\sqrt[x]{4+\sqrt{2}} \cdot \sqrt[x]{4-\sqrt{2}}$
$\sqrt[x2]{8} \cdot \sqrt[x2]{-8}$

12. $\sqrt[2x]{3\sqrt{3x}} \cdot \sqrt{2\sqrt[2x]{3}}$

13. $\sqrt[8]{\sqrt[3]{15}} : \sqrt[12]{\sqrt{5}}$

14. $\sqrt[4]{3\sqrt{5}} : \sqrt{2\sqrt[4]{2}}$

15. $\sqrt[3]{3\sqrt{2}} : \sqrt[6]{5}$

16. $\sqrt[5]{\sqrt[4]{3\sqrt{2}}}$

17. $\sqrt[6]{3\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[4]{4}}$

18. $\sqrt[5]{2\sqrt[4]{3}} \cdot \sqrt[10]{3\sqrt{2}}$

19. $\sqrt[3]{2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{3\sqrt{2}}$

20. $\sqrt{m\sqrt[n]{m}}$

XIV. Exprese las siguientes raíces con un índice común:

1. $\sqrt{2}$ y $\sqrt[3]{2}$
2. $\sqrt{2}$ y $\sqrt[4]{3}$
3. $\sqrt[3]{a}$ y $\sqrt{a}$
4. $\sqrt[4]{5}$ y $\sqrt{10}$
5. $\sqrt[a]{9}$ y $\sqrt[b]{5}$
6. $\sqrt{a+1}$ y $\sqrt[3]{a+1}$
7. $\sqrt[6]{p+2}$ y $\sqrt[4]{p+1}$
8. $\sqrt[m]{a}$ y $\sqrt[n]{a}$
9. $\sqrt[a]{2}$, $\sqrt[a^2]{2}$, $\sqrt[2a]{2}$
10. $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt{a}$
11. $\sqrt[x]{4}$, $\sqrt[y]{3}$ y $\sqrt[xy]{6}$
12. $\sqrt[2a]{3n}$, $\sqrt[a^2]{3m}$, $\sqrt[a]{mn}$
13. $\sqrt[8a]{m^6}$, $\sqrt[6a]{m^3}$, $\sqrt[12a]{m^2}$
14. $\sqrt[2^a]{b}$, $\sqrt[2^b]{a}$

XV. Efectúe las siguientes operaciones:

1. $\left(3\sqrt{6}+5\sqrt{8}-2\sqrt{2}\right) : 4\sqrt{2}$
2. $\left[\left(\sqrt{3}+5\right)\left(\sqrt{3}-5\right)\right]^2$
3. $(a-b)\sqrt{\dfrac{a+b}{a^2-2ab+b^2}}$
4. $\left(a\sqrt{b}+b\sqrt{a}\right) : \sqrt{ab}$
5. $\sqrt[3]{(a+b)} \cdot \sqrt[3]{a^2+2ab+b^2}$
6. $\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)$
7. $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$
8. $\left(2a\sqrt{a}-3b\sqrt{a}+ab\sqrt{a}\right) \cdot 2ab\sqrt{a}$
9. $\sqrt[4]{a^2+2ab+b^2} \cdot \sqrt{a+b}$
10. $\sqrt[4]{x^2-2xy+y^2}+\sqrt{x-y}$
11. $\sqrt{3a} \cdot \sqrt[3]{2a}$
12. $3\sqrt[4]{2x} \cdot 2\sqrt{3x}$

13. $5\sqrt{2} : 10\sqrt[3]{5}$

14. $\left(4\sqrt[4]{a} - 2\sqrt[3]{b}\right) : \sqrt[6]{ab}$

15. $\left(3\sqrt[6]{2x} + 2\sqrt[4]{3x} - \sqrt{x}\right) \cdot \sqrt[3]{x}$

16. $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2}$

17. $\sqrt{5} \cdot (\sqrt[3]{5} + \sqrt{5})$

18. $\left(\sqrt{3} + \sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt{3} - \sqrt[3]{3}\right)$

19. $\left(\sqrt[3]{x^2 - 2x + 1} \cdot \sqrt[3]{x - 1}\right) \cdot \left(x - 1\right)$

20. $2\sqrt[4]{x+2} \cdot 3\sqrt{x+3}$

Soluciones

I. 1. 2 2. 5 3. 8 4. 4 5. 10 6. 11 7. 14 8. 10 9. 2 10. -3
11. -6 12. 0,1 13. -5 14. 5 15. 4 16. 3 17. $\frac{1}{2}$ 18. -2 19. $\frac{1}{3}$
20. $\frac{9}{7}$ 21. -8 22. 29 23. 20 24. $\frac{-1}{2}$ 25. 1 26. 3,1 27. $\frac{11}{14}$ 28. 0,3
29. 0,4 30. $\frac{2}{3}$

II. 1. 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400.

2. 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1.000, 1.331, 1.728, 2.197, 2.744, 3.375, 4.096, 4.913, 5.832, 6.859, 8.000, 9.261, 10.648, 12.167, 13.824, 15.625, 17.576, 19.683, 21.952, 24.389, 27.000.

3. $\sqrt{1}, \sqrt{4}, \sqrt{9}, \sqrt{16}, \sqrt{25}\ \sqrt{36}, \sqrt{49}, \sqrt{64}, \sqrt{81}, \sqrt{100}, \sqrt{121}, \sqrt{144}, \sqrt{169}, \sqrt{196}, \sqrt{225},$
$\sqrt{256}, \sqrt{289}, \sqrt{324}, \sqrt{361}, \sqrt{400}.$

4. $\sqrt[3]{1}, \sqrt[3]{8}, \sqrt[3]{27}, \sqrt[3]{64}, \sqrt[3]{125}, \sqrt[3]{216}, \sqrt[3]{343}, \sqrt[3]{512}, \sqrt[3]{729}, \sqrt[3]{1.000}$

III. 1. $\sqrt[4]{a^3}$ 5. $\sqrt[4]{p^3}$ 9. $\sqrt[4]{(5a^2)^3}$ 13. $\sqrt[6]{\frac{5}{2a}}$ 17. $\sqrt[3]{5a^2bc^5}$

2. $\sqrt{m}$ 6. $\sqrt{\frac{1}{2}}$ 10. $\sqrt[8]{m^6 n^7}$ 14. $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ 18. $\sqrt[q]{(4m^2n)^p}$

3. $\sqrt[5]{3^4}$ 7. $\sqrt[3]{m n^2}$ 11. $\sqrt[5]{\left(\frac{a}{b}\right)^2}$ 15. $\sqrt{\frac{1}{3}}$ 19. $\sqrt[z]{\left(\frac{3z}{2y}\right)^y}$

4. $\sqrt[6]{2}$ 8. $\sqrt[5]{(3pq)^2}$ 12. $\sqrt[7]{\left(\frac{2a}{3b^2}\right)^3}$ 16. $\sqrt[3]{2^2}$ 20. $\sqrt[q]{\left(\frac{4m}{5n^6}\right)^p}$

IV. 1. $a^{\frac{3}{2}}$ 2. $(5m)^{\frac{1}{2}}$ 3. $(2p^2)^{\frac{3}{4}}$ 4. $2^{\frac{1}{6}} x^{\frac{5}{6}}$ 5. $5^{\frac{1}{6}} \cdot a^{\frac{7}{6}}$ 6. $p^{\frac{10}{11}}$ 7. $2^{\frac{1}{2}} m^2$
8. $3^{\frac{1}{2}} p^3 q^{\frac{3}{2}}$ 9. $x^{\frac{2}{5}} y^{\frac{6}{5}}$ 10. $x^{\frac{1}{x}} y^{\frac{1}{x}}$ 11. $(81)^{\frac{1}{n}}$ 12. $\left(\frac{2a}{5}\right)^{\frac{1}{p}}$ 13. $\left(\frac{5t}{3v}\right)^{\frac{1}{z}}$
14. $(2a)^{\frac{p}{p+q}}$ 15. $(3xy)^{\frac{2}{b}}$ 16. $(5a^2)^{\frac{a}{b}}$

V. 1. $a = 25$ 2. $z = 8$ 3. $m = n^5$ 4. $p = 21$ 5. $n = \frac{1}{8}$ 6. $a = b^4 - 1$ 7. $t = 38$

8. $x = \frac{m^n - 1}{2}$ 9. $y = 4^x + 1$ 10. $p = \frac{(3q)^n - q}{2}$ 11. $x = 18$ 12. $a = \frac{1}{16}$ 13. $a = 2$

14. $a = \frac{n^2}{16}$ 15. $p = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$ 16. $t = 22$ 17. $a = b^5 + 2$ 18. $a = \frac{b^6 + 1}{2}$

19. $a = \pm 1$ 20. $x = 36$

VI. 1. $x \geq 1$ 2. $x \geq -1$ 3. $a \geq -\frac{1}{2}$ 4. $a \geq 3$ 5. $x \leq \frac{1}{2}$ 6. $x \leq \frac{3}{2}$
7. $a \in]-\infty - 1] \cup [1, +\infty[$ 8. $x \in]-\infty, -5] \cup [5, +\infty]$ 9. $y \in [-3,3]$ 10. $x \geq 0$
11. $x > 0$ 12. $a \in [-1,1]$ 13. $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ 14. $x > 1$ 15. $x \in]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[$
16. $x < 0$ 17. $a = 0$ 18. $a > 6$ 19. $x \in]-\infty, -4[\cup]-1, +\infty[$ 20. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

VII. 1. $\mathbb{R}$ 2. $\mathbb{R}$ 3. $\mathbb{R}$ 4. $\mathbb{C}$ 5. $\mathbb{R}$ 6. $\mathbb{R}$ 7. $\mathbb{C}$ 8. $\mathbb{R}$ 9. $\mathbb{R}$ 10. $\mathbb{C}$
11. $\mathbb{R}$ 12. $\mathbb{R}$ 13. $\mathbb{R}$ 14. $\mathbb{R}$ 15. $\mathbb{R}$ 16. $\mathbb{R}$

VIII. 1. $3b$ 2. $4x$ 3. $5abc$ 4. $9a^2b$ 5. $5xy^2$

6. pq^2r^3 7. $3mn^3$ 8. a^3bc^2 9. $2m^5$ 10. $x-1$

11. $m^4n^3t^2$ 12. $\frac{2a}{b^2} + a$ 13. $\frac{1}{t^2} - t^2$ 14. $\frac{a^4}{b^3} + \frac{a^3}{b^4}$ 15. $\frac{a+b}{2a+1}$

16. $\frac{5a^3}{a-6}$ 17. $\frac{a+1}{a-1}$ 18. $x - y$

IX. 1. 1 y 2 4. − 4 y − 3 7. 69 y 70 10. 3 y 4 13. 6 y 7

2. 2 y 3 5. − 5 y − 4 8. 2 y 3 11. − 5 y − 4 14. 3 y 4

3. 2 y 3 6. 10 y 11 9. 3 y 4 12. − 11 y − 10

X. 1. $6\sqrt{2}$ 6. $-2\sqrt[3]{p}$ 11. $2q\sqrt{a} + 3q\sqrt{b}$ 16. $-20\sqrt{5}$

2. $\sqrt{3}$ 7. $6\sqrt{3} - 7\sqrt{2}$ 12. $-11\sqrt{7}$ 17. $16\sqrt{5} - 6\sqrt{7}$

3. $-11\sqrt{5}$ 8. $-\sqrt{5} - \sqrt{6}$ 13. $17\sqrt{2} + 26\sqrt{3}$ 18. $9\sqrt{5} - 44\sqrt{7}$

4. $4\sqrt{a}$ 9. $-3\sqrt{a} - 4\sqrt{b}$ 14. $-122\sqrt{3}$ 19. 0

5. $4a\sqrt{2}$ 10. $13\sqrt[p]{p}$ 15. $9\sqrt{3} - 8\sqrt{2}$ 20. $\frac{31}{60}\sqrt{a}$

XI. 1. $\sqrt{6}$ 2. 6 3. $6a$ 4. $\sqrt[3]{96x^4}$ 5. $\sqrt[4]{70} \cdot p^4$

6. $a - 1$ 7. $\sqrt{9a^2 - 4}$ 8. $y\sqrt[3]{6x^4z^2}$ 9. $3x - 1$

10. 2 11. $2 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{5}$ 12. $31 - 12\sqrt{3}$

13. $6+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}$ 14. 2 15. $\sqrt{253}$ 16. 16

17. $27-8\sqrt{2}$ 18. $9-2\sqrt{3}-2\sqrt{6}$ 19. a^2-b 20. $\sqrt{a-b}$

XII. 1. 3 2. 5 3. $\sqrt[3]{9a^5b^7}$ 4. $\sqrt[4]{x^5yz^3}$ 5. $1+\sqrt[5]{a^4}+\sqrt[5]{a^7}$ 6. $\sqrt[3]{xy^{-1}}$

7. $\sqrt{13}$ 8. $\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot a$ 9. $2\cdot a$ 10. $4-3\sqrt{3}$ 11. $5+3\sqrt{2}-\frac{9}{2}\sqrt{3}$ 12. 1

13. $2x$ 14. $\sqrt{2^3}$ 15. $\sqrt[n]{a^{12}}$ 16. $\sqrt{x-1}$ 17. $a\sqrt{a+11}$ 18. $\sqrt[3x]{2^{a+1}}$

19. $\sqrt{x+5}$ 20. $\sqrt{a-3}$

XIII. 1. $\sqrt[4]{3}$ 2. $\sqrt[6]{2}$ 3. $\sqrt[8]{5a}$ 4. $\sqrt[4]{8}$

5. $\sqrt[6]{12}$ 6. $\sqrt[8]{a^3}$ 7. $\sqrt[8]{a^7}$ 8. $\sqrt[6]{250}$

9. $\sqrt[n\cdot m]{a^m\cdot b}$ 10. $\sqrt[4]{2.187}$ 11. $\sqrt[x]{14}$ 12. $\sqrt[4x]{81\cdot 2^{2x}\cdot x}$

13. $\sqrt[24]{3}$ 14. $\sqrt[8]{\frac{45}{32}}$ 15. $\sqrt[6]{\frac{18}{5}}$ 16. $\sqrt[40]{18}$

17. $\sqrt[12]{72}$ 18. $\sqrt[20]{864}$ 19. $\sqrt[6]{216}$ 20. $\sqrt[2n]{m^{n+1}}$

XIV. 1. $\sqrt[6]{8}$, $\sqrt[6]{4}$

2. $\sqrt[4]{4}$, $\sqrt[4]{3}$

3. $\sqrt[6]{a^2}$, $\sqrt[6]{a^3}$

4. $\sqrt[4]{5}$, $\sqrt[4]{100}$

5. $\sqrt[ab]{9^b}$, $\sqrt[ab]{5^a}$

6. $\sqrt[6]{(a+1)^3}$, $\sqrt[6]{(a+1)^2}$

7. $\sqrt[12]{(p+2)^2}$, $\sqrt[12]{(p+1)^3}$

8. $\sqrt[mn]{a^n}$, $\sqrt[mn]{a^m}$

9. $\sqrt[2a^2]{2^{2a}}$, $\sqrt[2a^2]{4}$, $\sqrt[2a^2]{2^a}$

10. $\sqrt[12]{a^3}$, $\sqrt[12]{a^4}$, $\sqrt[12]{a^6}$

11. $\sqrt[xy]{4^y}$, $\sqrt[xy]{3^x}$, $\sqrt[xy]{6}$

12. $\sqrt[2a^2]{(3n)^a}$, $\sqrt[2a^2]{(3m)^2}$, $\sqrt[2a^2]{(mn)^{2a}}$

13. $\sqrt[12a]{m^9}$, $\sqrt[12a]{m^6}$, $\sqrt[12a]{m^2}$

14. $\sqrt[2ab]{b^b}$, $\sqrt[2ab]{a^a}$

XV. 1. $2+\frac{3}{4}\sqrt{3}$ 2. 484 3. $\sqrt{a+b}$ 4. $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 5. $a+b$ 6. $2\sqrt{2}-2$

7. 10 8. $4a^3b-6a^2b^2+2a^3b^2$ 9. $\sqrt[4]{(a+b)^3}$ 10. $2\sqrt{x-y}$

11. $\sqrt[6]{108a^5}$ 12. $6\sqrt[4]{18x^3}$ 13. $\frac{1}{2}\sqrt[6]{\frac{8}{25}}$ 14. $4\sqrt[12]{\frac{a}{b^2}}-2\sqrt[6]{\frac{b}{a}}$

15. $3\sqrt[6]{2x^3}+2\sqrt[12]{27x^7}-\sqrt[6]{x^5}$ 16. $\sqrt[12]{8.192}$ 17. $5+\sqrt[6]{3.125}$

18. $3-\sqrt[3]{9}$ 19. $(x-1)^2$ 20. $6\sqrt[4]{(x+2)(x+3)^2}$

6.6 Racionalización

Definición: El proceso de racionalización consiste en expresar una fracción cuyo denominador es un término irracional, es decir, tiene raíz irreductible, en otra fracción equivalente cuyo denominador es un término racional, es decir, no contiene raíz.

6.6.1 Técnicas de racionalización

Veremos aquí los casos más frecuentes de racionalización que son:

a) Denominador irracional monomio:

$$\frac{A}{\sqrt[n]{p^r}} \quad , \ (r < n)$$

En este caso amplificamos la fracción por: $\sqrt[n]{p^{n-r}}$

y obtenemos: $\dfrac{A}{\sqrt[n]{p^r}} \cdot \dfrac{\sqrt[n]{p^{n-r}}}{\sqrt[n]{p^{n-r}}} = \dfrac{A\sqrt[n]{p^{n-r}}}{p}$

b) Denominador binomio (de índice 2).

$$\frac{A}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$$

En este caso la amplificación adecuada es por

$\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$

es decir, los mismos términos del binomio pero con la operación opuesta. De este modo obtenemos del producto la diferencia de cuadrados, con lo cual eliminamos las raíces:

$$\frac{A}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)} \cdot \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)} = \frac{A\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{a-b}$$

- **Observación 1:** Se pueden combinar ambas técnicas en algunos casos.
- **Observación 2:** La segunda técnica se puede utilizar para casos de sumas o diferencias de cubos, haciendo una adecuada amplificación.

Ejercicios resueltos

1. Racionalicemos la expresión: $\dfrac{a}{\sqrt[5]{b^2}}$

Amplificando por $\sqrt[5]{b^3}$ obtenemos:

$$\frac{a}{\sqrt[5]{b^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{b^3}}{\sqrt[5]{b^3}} = \frac{a\sqrt[5]{b^3}}{b}$$

2. Racionalicemos la expresión: $\dfrac{a-b}{\sqrt[7]{(a-b)^3}}$

Amplifiquemos por $\sqrt[7]{(a-b)^4}$

$$\frac{a-b}{\sqrt[7]{(a-b)^3}} \cdot \frac{\sqrt[7]{(a-b)^4}}{\sqrt[7]{(a-b)^4}} = \frac{\cancel{(a-b)}\sqrt[7]{(a-b)^4}}{\cancel{a-b}} = \sqrt[7]{(a-b)^4}$$

3. Racionalicemos la expresión: $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

Amplifiquemos por $\sqrt{x}-\sqrt{y}$:

$$\frac{(x-y)}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})} \cdot \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})} = \frac{\cancel{(x-y)}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\cancel{x-y}} = \sqrt{x}-\sqrt{y}$$

4. Racionalicemos la expresión: $\dfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

En primer lugar amplifiquemos por $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ (caso de denominador monomio).

$$\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2+\sqrt{3}}$$

Ahora amplifiquemos por $2-\sqrt{3}$ (caso de denominador binomio).

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}\left(2-\sqrt{3}\right)}{4-3} = \sqrt{2+\sqrt{3}}\left(2-\sqrt{3}\right)$$

Ejercicios

I. Racionalizar las siguientes expresiones fraccionarias:

1. $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$ **2.** $\dfrac{3}{\sqrt[3]{3}}$ **3.** $\dfrac{a\sqrt{b}}{b\sqrt{a}}$ **4.** $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ **5.** $\dfrac{6}{2\sqrt{3}}$

6. $\dfrac{a}{\sqrt[3]{ab}}$ **7.** $\dfrac{mn}{\sqrt[5]{m^2n}}$ **8.** $\dfrac{ab}{\sqrt[7]{a^3b^2}}$ **9.** $\dfrac{a-b}{\sqrt[6]{(a-b)^5}}$ **10.** $\dfrac{2a^2b}{\sqrt[7]{6a^3b^3}}$

11. $\dfrac{6}{2+\sqrt{2}}$ **12.** $\dfrac{3a}{\sqrt{a}+3}$ **13.** $\sqrt[3]{a^{-2}}$ **14.** $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$

15. $\dfrac{\sqrt{a}-b}{a-\sqrt{b}}$ **16.** $\dfrac{xy}{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}$ **17.** $\sqrt[4]{ab^{-1}c^{-2}}$ **18.** $\dfrac{p-q}{p\sqrt{q}-q\sqrt{p}}$

19. $\dfrac{5a}{\sqrt{3-\sqrt{2a}}}$ **20.** $\dfrac{m-n}{\sqrt[6]{\sqrt{m}-\sqrt{n}}}$ **21.** $\dfrac{2}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ **22.** $\dfrac{3}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

23. $\dfrac{a}{\sqrt[3]{a}+\sqrt{b}}$ **24.** $\dfrac{1}{2\sqrt{2}-3\sqrt{3}}$ **25.** $\dfrac{5}{3\sqrt{5}-5\sqrt{3}}$ **26.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4}-\sqrt{2}}$

Ejercicios

27. Calcular el valor aproximado de la expresión $\frac{x}{\sqrt{x}}$ para $x \in \mathbb{N}$, $1 < x < 10$.

Observar los valores obtenidos. Comparar $\frac{x}{\sqrt{x}}$ con $\frac{x+1}{\sqrt{x+1}}$ y determinar cuál expresión es mayor.

28. Demostrar que $\frac{x}{\sqrt{x}} < \frac{x+1}{\sqrt{x+1}}$ $\forall\, x \in \mathbb{N}$.

29. Calcular el valor aproximado de la expresión $\frac{\sqrt{x}}{x}$ para $x \in \mathbb{N}$, $1 < x < 10$.

Observar los valores obtenidos. Comparar $\frac{\sqrt{x}}{x}$ con $\frac{\sqrt{x+1}}{x+1}$ y determinar cuál expresión es mayor.

30. Demostrar que $\frac{\sqrt{x}}{x} < \frac{\sqrt{x+1}}{x+1}$ $\forall\, x \in \mathbb{N}$.

Soluciones

1. $\sqrt{2}$
2. $\sqrt[3]{9}$
3. $\frac{\sqrt{ab}}{b}$
4. $\frac{\sqrt{2}}{4}$
5. $\sqrt{3}$
6. $\frac{\sqrt[3]{a^2b^2}}{b}$
7. $\sqrt[5]{m^3n^4}$
8. $\sqrt[7]{a^4 \cdot b^5}$
9. $\sqrt[6]{a-b}$
10. $\frac{1}{3}a\sqrt[7]{6^6a^4b^4}$
11. $6-3\sqrt{2}$
12. $\frac{3a(\sqrt{a}-3)}{a-9}$
13. $\frac{\sqrt[3]{a}}{a}$
14. $7+4\sqrt{3}$
15. $\frac{(\sqrt{a}-b)(a+\sqrt{b})}{a^2-b}$
16. $\frac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{x-y}$
17. $\frac{\sqrt[4]{ab^3c^2}}{bc}$
18. $\frac{p\sqrt{q}+q\sqrt{p}}{pq}$
19. $\frac{5a\sqrt{3-\sqrt{2a}}\cdot(3+\sqrt{2a})}{9-2a}$
20. $\sqrt[6]{(\sqrt{m}-\sqrt{n})^5}\cdot(\sqrt{m}+\sqrt{n})$
21. $\frac{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})\cdot\sqrt{2}}{2}$
22. $\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{2})\sqrt{6}}{4}$
23. $\frac{a\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt{b}+b\right)\left(a-\sqrt{b^3}\right)}{a^2-b^3}$
24. $\frac{-(2\sqrt{2}+3\sqrt{3})}{19}$
25. $\frac{-(3\sqrt{5}+5\sqrt{3})}{6}$
26. $\frac{3\sqrt{2}\left(\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{2}+2\right)\left(4+\sqrt{8}\right)}{8}$
27. 1.414; 1.732; 2; 2.236; 2.449; 2.645; 2.828; 3; $\frac{x}{\sqrt{x}} < \frac{x+1}{\sqrt{x+1}}$
28. Sug.: Racionalizar ambas expresiones
29. 0.707; 0.577; 0.5; 0.447; 0.408; 0.377; 0.353; $0.\overline{3}$; $\frac{\sqrt{x}}{x} > \frac{\sqrt{x+1}}{x+1}$
30. Sug.: $\frac{1}{x^2} < \frac{1}{(x+1)^2}$

6.7 Ecuaciones irracionales

Definición: Son aquellas ecuaciones que presentan la variable como cantidad subradical. Para resolverlas debemos elevar a la potencia adecuada tantas veces sea necesario hasta eliminar la raíz (o las raíces).

Ejercicios resueltos

1. Resolvamos la ecuación $\sqrt{x+7}=5$

Vemos que elevando al cuadrado ambos miembros de la desigualdad la raíz se elimina.

$$\begin{aligned} \sqrt{x+7} &= 5 && /(\ )^2 \\ x+7 &= 25 && /-7 \\ x &= 18 \end{aligned}$$

2. Resolvamos la ecuación $\sqrt{1+\sqrt{5+\sqrt{3x+4}}}=2$
Procedamos a elevar al cuadrado paso a paso:

$$\begin{aligned} \sqrt{1+\sqrt{5+\sqrt{3x+4}}} &= 2 && /(\ )^2 \\ 1+\sqrt{5+\sqrt{3x+4}} &= 4 && /-1 \\ \sqrt{5+\sqrt{3x+4}} &= 3 && /(\ )^2 \\ 5+\sqrt{3x+4} &= 9 && /-5 \\ \sqrt{3x+4} &= 4 && /(\ )^2 \\ 3x+4 &= 16 && /-4 \\ 3x &= 12 && /\cdot \frac{1}{3} \\ \boxed{x = 4} \end{aligned}$$

3. Resolvamos la ecuación $\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}=2$

Elevamos al cuadrado ambos miembros de la igualdad. Observamos que el primero es un binomio.

$$\begin{aligned} \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3} &= 2 && /(\ )2 \\ x+5-2\sqrt{(x+5)(x-3)}+x-3 &= 4 \\ 2x+2-2\sqrt{(x+5)(x-3)} &= 4 \\ 2x-2 &= 2\sqrt{(x+5)(x-3)} && /\cdot \frac{1}{2} \\ x-1 &= \sqrt{(x+5)(x-3)} && /(\ )^2 \\ x^2-2x+1 &= x^2+2x-15 && /-x^2 \\ -2x+1 &= 2x-15 \\ 4x &= 16 \\ \boxed{x = 4} \end{aligned}$$

Ejercicios

I. Resuelva las siguientes ecuaciones:

1. $\sqrt{x+3}=3$
2. $\sqrt{2x-7}=13$
3. $\sqrt{2-15x}=\sqrt{8}$

4. $\sqrt{\sqrt{1+2x}}=2$
5. $\sqrt{2\sqrt{2x}}=3\sqrt{x}$
6. $\sqrt{1+\sqrt{7x}}=2\sqrt{2}$

7. $2+\sqrt{3x-6}=6$
8. $5\sqrt{2\sqrt{3x}}=15$
9. $\sqrt{3+\sqrt{4+\sqrt{x-8}}}=3$

10. $\sqrt{2x+13}-4=\sqrt{x-5}$
11. $\sqrt{x^2+5}-3=x$
12. $x+9=\sqrt{x^2-5}$

13. $\sqrt{2x^2+3}=5\sqrt{x-3}$
14. $\sqrt[3]{2x}=2$
15. $\sqrt[3]{3x+5}=1$

16. $\sqrt{4+5\sqrt{x-1}}=3$
17. $\sqrt{1+2\sqrt{x+7}}=3$
18. $\sqrt{4\sqrt{x+1}+2}=3\sqrt{2}$

19. $\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{7x+2}$
20. $\dfrac{2\sqrt{x}-3}{10}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{5}=\dfrac{3}{2}$

21. $\sqrt{x+2}=\dfrac{x-2}{\sqrt{x+1}}$
22. $\sqrt{x-5}=\dfrac{x}{\sqrt{x+8}}$

23. $\sqrt{2x+6}=\dfrac{x-9}{\sqrt{x-5}}$
24. $\dfrac{\sqrt{2x}}{5}+\dfrac{\sqrt{x}}{3}=\dfrac{\sqrt{3x}}{5}$

25. $\sqrt{2x-1}=\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}$
26. $1+\sqrt{x}=\sqrt{x+7}$

27. $\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x+1}=3$
28. $\sqrt{ax}-\sqrt{bx}=a\sqrt{b}-b\sqrt{a}$

29. $a\sqrt{x}-b\sqrt{x}=ab$
30. $\dfrac{\sqrt{x}}{a}+\dfrac{\sqrt{x}}{b}=\dfrac{1}{ab}$

31. $\sqrt{2x-5}-1=\dfrac{1}{\sqrt{2x-5}}$
32. $\sqrt{2x-7}-\sqrt{x-3}=\sqrt{x+4}$

33. $2-\dfrac{3x}{\sqrt{x+5}}=\sqrt{x+5}$
34. $\sqrt{1+\sqrt{2x}}-1=\sqrt{1-\sqrt{2x}}$

35. $\dfrac{m}{\sqrt{x}}-\dfrac{2n}{\sqrt{x}}=mn$
36. $(a-b\sqrt{x})^2=(b-a\sqrt{x})^2$

Soluciones

I. 1. $x=6$ 2. $x=88$ 3. $x=-\dfrac{2}{5}$ 4. $x=\dfrac{15}{2}$ 5. $x_1=\dfrac{8}{81}$ y $x_2=0$

6. $x=7$ 7. $x=\dfrac{22}{3}$ 8. $x=\dfrac{27}{4}$ 9. $x=1.032$

10. $x_1=6$; $x_2=54$ 11. $x=-\dfrac{2}{3}$ 12. $x=-\dfrac{43}{9}$

13. $x_1=\dfrac{13}{2}$; $x_2=6$ 14. $x=4$ 15. $x=-\dfrac{4}{3}$ 16. $x=2$

17. $x=9$ 18. $x=15$ 19. $x_1=-\dfrac{2}{5}$; $x_2=1$ 20. $x=16$

21. $x=\dfrac{2}{7}$ 22. $x=\dfrac{40}{3}$ 23. $x_1=-7+4\sqrt{10}$; $x_2=-7-4\sqrt{10}$

24. $x = 0$ 25. $x_1 = \frac{-1+\sqrt{29}}{2}$; $x_2 = \frac{-1-\sqrt{29}}{2}$ 26. $x = 9$ 27. $x = \frac{85}{72}$

28. $x = ab$ 29. $x = \frac{a^2b^2}{(a-b)^2}$ 30. $x = \frac{1}{(a+b)^2}$

31. $x_1 = \frac{13+\sqrt{5}}{4}$; $x_2 = \frac{13-\sqrt{5}}{4}$ 32. $x_1 = \frac{-1+\sqrt{113}}{2}$; $x_2 = \frac{-1-\sqrt{113}}{2}$

33. $x_1 = \frac{-9+\sqrt{61}}{8}$; $x_2 = \frac{-9-\sqrt{61}}{8}$ 34. $x = \frac{3}{8}$ 35. $x = \frac{(m-2n)^2}{m^2 n^2}$ 36. $x = 1$

Prueba de selección múltiple

Potencias y Raíces (Marque la alternativa correcta).

1. $a^5 \cdot a^3 \cdot a^{-1} =$

A. a^{15}
B. a^{-15}
C. a^8
D. a^7
E. a^{-7}

2. El valor de $5x^2$
Si $x = -2$ es:

A. -20
B. 20
C. 100
D. -100
E. 10

3. El cuadrado de $-3m^3$ es:

A. $-9m^6$
B. $-9m^9$
C. $9m^6$
D. $9m^9$
E. $9m^3$

4. $2^{n-1} \cdot 2^{n+1}$

A. 2^{n^2-1}
B. 4^n
C. 2^{n^2}
D. 4^{2n}
E. 4^{n^2-1}

5. El valor de $(3x^5y^2z^4)^0$
Si $x = 2$ $y = -1$ $z = 1$

A. 96
B. -96
C. -1
D. 1
E. -32

6. $6m^3n^5 : -2m^2n^3$

A. $-3mn^2$
B. $-3m^2n$
C. $3mn^2$
D. $3m^2n$
E. $-3mn^3$

7. $\left(\frac{1}{2}a^{-2}\right)^{-3}$

A. $8a^6$
B. $8a^5$
C. $\frac{1}{2}a^6$
D. $\frac{1}{2}a^5$
E. $\frac{1}{8}a^{-6}$

8. $4^4 + 4^4 + 4^4 + 4^4$

A. 4^{10}
B. 2^{10}
C. 2^5
D. 2^{16}
E. 4^{16}

9. $9^3 \cdot 9^4 =$

A. 3^5
B. 9^{12}
C. 3^{14}
D. 3^{12}
E. 9^5

Prueba de selección múltiple

10. El valor de x en $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3}{2}$ es:

A. 1

B. –1

C. 0

D. $\frac{3}{2}$

E. $\frac{2}{3}$

11. $(3^{-1})^{-2} =$

A. 9

B. $\frac{1}{9}$

C. 3

D. $\frac{1}{3}$

E. –9

12. De las afirmaciones:

I $a^n + a^n = a^{2n}$

II $a^n \cdot a^n = a^{2n}$

III $a^n \cdot a^n = a^{n^9}$

son verdaderas:

A. Sólo I

B. I y II

C. Sólo II

D. II y III

E. Todas

13. El valor de x en $3^{x+1} = 9^x$ es:

A. 3

B. –1

C. 2

D. 1

E. –3

14. $2^3 \cdot 2^{-2} \cdot 2^3 \cdot 2^{-1} =$

A. 8^3

B. 2^{18}

C. 8

D. 2^{-3}

E. 16^3

15. Los valores de x e y en:

$$\begin{array}{l|} a^{x+y} = a \\ b^x : b^y = b^2 \\ \hline \end{array}$$

son respectivamente:

A. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

C. $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$

D. $\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$

E. $-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$

16. Los valores de x^2 y 2^x para x = –1 son respectivamente:

A. 1, $\frac{1}{2}$

B. –1, $\frac{1}{2}$

C. 1, 2

D. 1, –2

E. –1, –2

17. $4^x : 8^{2x} =$

A. $\frac{1}{2^x}$

B. $\frac{1}{2^{4x}}$

C. $\frac{1}{4^x}$

D. $\frac{1}{2^{2x}}$

E. $\frac{1}{4^{4x}}$

18. $(0.5)^x \cdot (0.1)^x \cdot (40)^x =$

A. 2^x

B. 4^x

C. 20^x

D. 2^{3x}

E. Otro

19. $(3^{-1})^2 \cdot (3^2)^{-1} \cdot (3^{-1})^{-2} =$

A. $\frac{1}{3}$

B. 9

C. $\frac{1}{9}$

D. –3

E. –9

20. El valor de x en $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 32$ es:

A. –5

B. 5

C. $\frac{1}{5}$

D. $-\frac{1}{5}$

E. –4

21. El valor de x en $4 \cdot 3^x - 3^x = 27$ es:

A. 1

B. 2

C. 3

D. –2

E. –3

22. $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5} =$

A. $\frac{1}{x^8}$

B. $\frac{2}{x^5}$

C. $\frac{x^2 + 1}{x^5}$

D. $\frac{x^2 + 1}{x^{15}}$

E. Otro

23. De las proposiciones:

I $a^n \bullet b^n = (ab)^n$

II $(a + b)^n = a^n + b^n$

III $a^n : a^{-m} = a^{n + m}$

Son falsas:

A. I, II

B. Sólo II

C. I y III

D. II y III

E. Ninguna

24. $(a + b)^{x + y} : (a + b)^{x - y} =$

A. $(a + b)^{2x}$

B. $(a + b)^{-2x}$

C. $(a + b)^{-2y}$

D. $(a + b)^{2y}$

E. $(a + b)$

25. El valor de x en

$2^x \bullet 2^{2x + 1} = 64^x$ es:

A. 3

B. -3

C. $\frac{1}{3}$

D. $-\frac{1}{3}$

E. $\frac{1}{4}$

26. Si x = 2 el valor de

$2^{x + 1} \bullet 3^{x - 2} \bullet 2^{x - 1}$ es:

A. 8

B. -8

C. 32

D. 16

E. 24

27. La solución de x en

$(2^{3x - 4})^0 = 1$ es:

A. $\frac{3}{4}$

B. $-\frac{3}{4}$

C. $\frac{4}{3}$

D. No existe solución

E. Cualquier valor real

28. $2^{3x-4} \bullet 3^{x-5} \bullet 2^{2-3x} \bullet 3^{3-x} =$

A. $\frac{4}{9}$

B. $\frac{9}{4}$

C. $\frac{1}{36}$

D. 36

E. $\frac{1}{27}$

29. $(a + b)^u \bullet (a - b)^v =$

A. $(a^2 - b^2)^{uv}$

B. $(a^2 - b^2)^{u + v}$

C. $(a + b)^{u + v}$

D. $(a - b)^{u - v}$

E. Ninguna.

30. El valor de

$x^2 \bullet 2^y \bullet 3^x \bullet y^3$

si $x = -1$, $y = -2$ es:

A. $-\frac{2}{3}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $-\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{3}$

E. Otro

31. $\sqrt{\frac{12}{2}} =$

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

C. $\sqrt{3}$

D. $\sqrt{6}$

E. $2\sqrt{3}$

32. $\sqrt{6} \cdot \sqrt{3} =$

A. 9

B. $9\sqrt{2}$

C. $2\sqrt{3}$

D. $3\sqrt{2}$

E. 18

Prueba de selección múltiple

33. $\sqrt[3]{\sqrt{64}} =$

A. 2

B. $\sqrt[3]{16}$

C. $\sqrt[6]{2}$

D. $\sqrt[6]{8}$

E. $\sqrt[3]{4}$

34. $a\sqrt{b} \cdot a\sqrt{b} =$

A. ab

B. ab^2

C. $a^2\,b^2$

D. $a^3\,b$

E. $a^2\,b$

35. $\sqrt{a^2b^3c^4} =$

A. $abc^2\sqrt{b}$

B. $a^2bc^2\sqrt{b}$

C. $abc\sqrt{c}$

D. abc^2

E. $abc^2\sqrt{c}$

36. $\sqrt{a\sqrt{a}} =$

A. $\sqrt[4]{a}$

B. $\sqrt[4]{a^3}$

C. $\sqrt{a}$

D. $a\sqrt{a}$

E. $a\sqrt[4]{a}$

37. $\left(1+\sqrt{2}\right)^2 =$

A. 3

B. $5+2\sqrt{2}$

C. $3+2\sqrt{2}$

D. 9

E. 5

38. $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right) =$

A. 1

B. $\sqrt{2}$

C. $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

D. 5

E. $\sqrt{5}$

39. $\sqrt{3}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{8}\right) =$

A. $3-\sqrt{6}$

B. $3+\sqrt{6}$

C. $\sqrt{3}-\sqrt{6}$

D. $\sqrt{3}+\sqrt{6}$

E. 3

40. Al racionalizar $\frac{2}{\sqrt{2}}$ se obtiene:

A. $2\sqrt{2}$

B. $\sqrt{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $4\sqrt{2}$

E. 2

41. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} =$

A. $\sqrt{6}$

B. $6\sqrt{6}$

C. 6

D. $\sqrt{30}$

E. $2\sqrt{6}$

42. $\sqrt[n]{a^{nm}} =$

A. $a^{\frac{1}{m}}$

B. $a^{\frac{1}{n}}$

C. $a^{\frac{m}{n}}$

D. a^n

E. a^m

43. $\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{5} =$

A. $\sqrt[6]{5}$

B. $\sqrt[6]{25}$

C. $5\sqrt[3]{5}$

D. $5\sqrt[6]{5}$

E. 5

44. Si a = 3, b = 4, entonces el valor de $\sqrt{b^2-a^2}$ es:

A. 1

B. 5

C. $\sqrt{7}$

D. 7

E. –7

45. Al simplificar $\sqrt[3]{a^{15}b^{9}}$ se obtiene:

A. $a^{12}\ b^{6}$

B. $a^{5}\ b^{3}$

C. $\sqrt{a^{5}b^{3}}$

D. $\sqrt{a^{12}b^{6}}$

E. $a^{12}\ b^{9}$

46. Al racionalizar $\frac{4}{\sqrt{5}-1}$ se obtiene:

A. $\sqrt{5}+1$

B. $\sqrt{5}-1$

C. $4\left(\sqrt{5}+1\right)$

D. $4\left(\sqrt{5}-1\right)$

E. $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

47. $\sqrt{\left(3-\sqrt{7}\right)\left(3+\sqrt{7}\right)} =$

A. $\sqrt[4]{2}$

B. 40

C. -40

D. $\sqrt{2}$

E. 2

48. El valor de $\sqrt[2b]{a^{a^2}}$ si $a = 2$ y $b = 3$ es:

A. $\sqrt[3]{16}$

B. $\sqrt[3]{4}$

C. $\sqrt[6]{3}$

D. $\sqrt[6]{4}$

E. Otro

49. $3\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{18} =$

A. 6

B. 36

C. 12

D. $6\sqrt{6}$

E. $6\sqrt{12}$

50. De las afirmaciones siguientes:

I $\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}$

II $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$

III $a\sqrt{b}=b\sqrt{a}$

son verdaderas:

A. Sólo I

B. Sólo II

C. Sólo III

D. Todas

E. Ninguna

51. De las afirmaciones,

I $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

II $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

III $a^{n-m}=a^n-a^m$

son falsas:

A. Sólo III

B. I y III

C. II y III

D. Todas

E. Ninguna

52. $\sqrt[x]{6^{x+1}} =$

A. 6^x

B. $\sqrt[x]{6}$

C. $6\sqrt[x]{6}$

D. 6

E. Otro

53. La solución de la ecuación $\sqrt{x+2}=5$ es:

A. 3

B. 23

C. 8

D. $\sqrt{23}$

E. $\sqrt{8}$

54. La solución de $1+\sqrt{2x-3}=4$ es:

A. 0

B. 3

C. 6

D. $\frac{3}{2}$

E. Otro

55. La solución de $\sqrt{7+\sqrt{2+\sqrt{x-3}}}=3$ es:

A. 4

B. 3

C. 5

D. 7

E. 9

Prueba de selección múltiple

56. En $\sqrt[3]{\sqrt{x+2}} = 2$, el valor de x es:

A. 0

B. 6

C. 16

D. 62

E. 64

57. En $\sqrt{(x+1)^2+(x-1)^2} = 2$ el valor de x es:

A. ± 1

B. ± 2

C. 0

D. ± 3

E. ± 4

58. Para que la expresión $\sqrt{2x-3}$ sea real es necesario y suficiente que:

A. $x \geq 3$

B. $x \leq \frac{2}{3}$

C. $x \geq \frac{3}{2}$

D. $x \leq \frac{3}{2}$

E. $x \geq \frac{2}{3}$

59. Para que la expresión $\frac{3}{\sqrt{3-5x}}$ sea real es necesario y suficiente que:

A. $x > \frac{3}{5}$

B. $x < \frac{3}{5}$

C. $x > \frac{5}{3}$

D. $x < \frac{5}{3}$

E. $x > -\frac{3}{5}$

60. $\sqrt[4]{\frac{1}{81}} + \sqrt[3]{\frac{1}{27}} + \sqrt{\frac{1}{9}} =$

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{9}$

C. 3

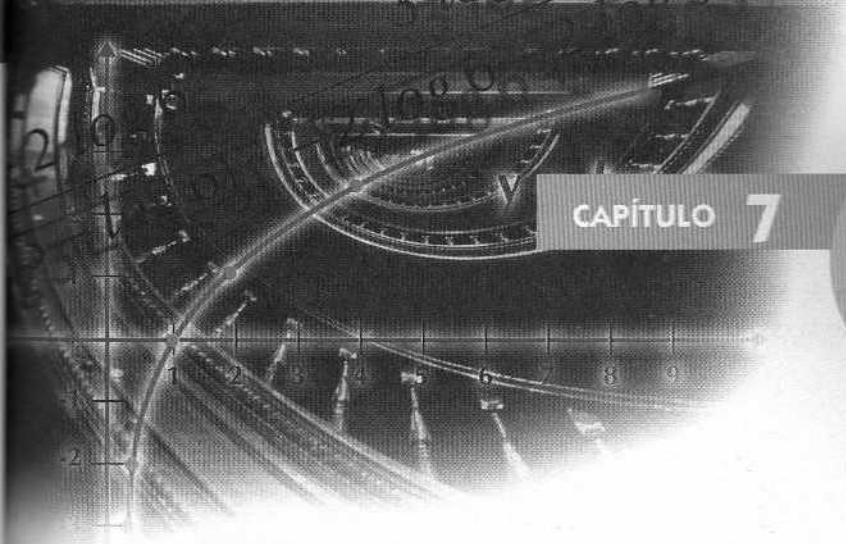
D. 1

E. Otro

Soluciones

Clave de Respuestas:

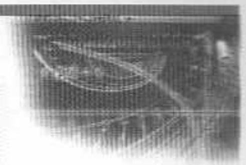
1. D	11. A	21. B	31. D	41. C	51. A
2. B	12. C	22. C	32. D	42. E	52. C
3. C	13. D	23. B	33. A	43. E	53. B
4. B	14. C	24. D	34. E	44. C	54. C
5. D	15. D	25. C	35. A	45. B	55. D
6. A	16. A	26. D	36. B	46. A	56. D
7. A	17. B	27. E	37. C	47. D	57. A
8. B	18. A	28. C	38. A	48. B	58. C
9. C	19. C	29. E	39. A	49. B	59. B
10. B	20. A	30. A	40. B	50. E	60. D



CAPÍTULO 7

Logaritmos

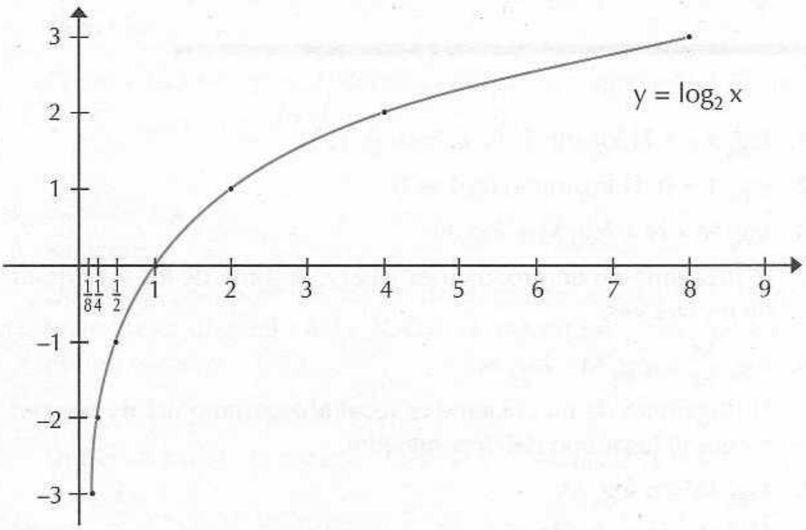
Definición de logaritmo 7.1



Sean a, $x \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$. Decimos que y es el logaritmo en base a de x si y sólo si $x = a^y$, lo que escribimos $y = log_a\, x$.

NOTA: y es el exponente al que hay que elevar la base a para obtener el número x.

- **Observación 1:** $y = log_a\, x$ es una función real cuyo dominio es $\mathbb{R}^+$ y su rango o recorrido es $\mathbb{R}$.



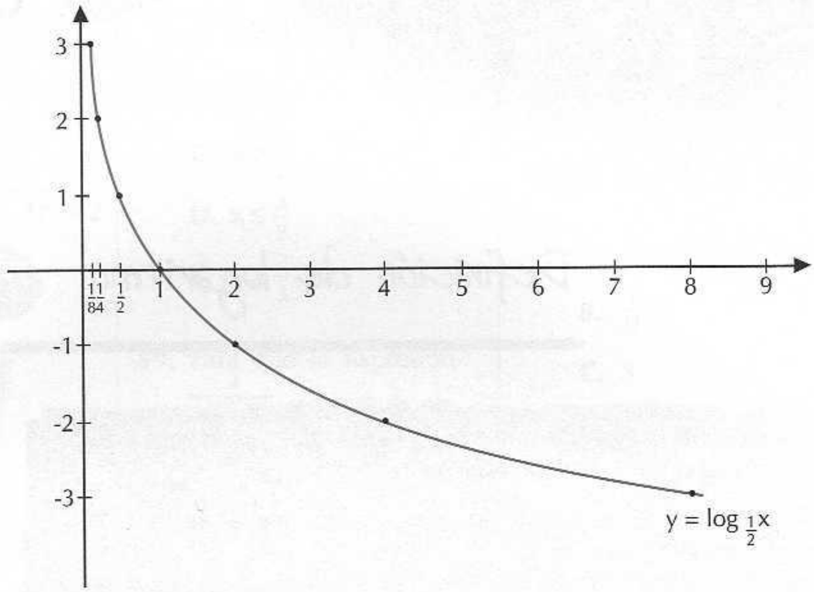
Solamente se puede calcular logaritmo de números reales positivos.

- **Observación 2:** Cada valor real positivo distinto de 1 que toma la base a da origen a un sistema completo de logaritmos.

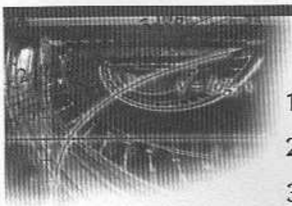
  Si la base es 10 se acostumbra no escribirse y el sistema de logaritmos de base 10 se llaman logaritmos vulgares, decimales o logaritmos de Briggs.

Si la base es $e = 2,7128...$ entonces el sistema se denomina de logaritmos naturales o neperianos y se acostumbra a anotar por $y = \ln x$.

- **Observación 3:** Si la base toma un valor entre 0 y 1, entonces la gráfica queda como sigue:



7.2 Propiedades



1. $\log_a a = 1$ El logaritmo de la base es 1.
2. $\log_a 1 = 0$ El logaritmo de 1 es 0.
3. $\log_a M \cdot N = \log_a M + \log_a N$.

   El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.
4. $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$.

   El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador.
5. $\log_a M^P = p \log_a M$.

   El logaritmo de una potencia es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base.
6. $\log_a N = \dfrac{\log_b N}{\log_b a}$ Teorema de cambio de base.
7. En el sistema de logaritmos en base 10, a la parte entera del logaritmo de un número se le llama característica y a su parte decimal se le llama mantisa.

Ejercicios resueltos

1. Calcular: $log_2\ 128$

Solución:

Se debe encontrar el exponente al que hay que elevar la base 2 para que dé 128. Como $2^7 = 128$, entonces:

$log_2\ 128 = 7$

2. Calcular $log_{\frac{1}{3}}\ \sqrt{27}$

Solución:

$\frac{1}{3} = 3^{-1}$ y $\sqrt{27} = 27^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{2}}$

Aquí la pregunta es ¿a cuánto debemos elevar la base 3^{-1} para que dé $3^{\frac{3}{2}}$?

$$(3^{-1})^x = 3^{\frac{3}{2}}$$

$$3^{-x} = 3^{\frac{3}{2}}$$

$$\Downarrow$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

Luego, $log_{\frac{1}{3}}\ \sqrt{27} = -\frac{3}{2}$

3. Calcular $log_5 \sqrt[3]{125}$

Solución:

Como $\sqrt[3]{125} = (5^3)^{\frac{1}{3}} = 5^1$ debemos encontrar x tal que $5^x = 5^1$, de donde $x = 1$. Luego, $log_5 \sqrt[3]{125} = 1$.

4. Calcular $log_{27} \frac{1}{9}$

Solución:

Debemos encontrar la forma de expresar la base del logaritmo y el número al cual se le busca el logaritmo como potencias del mismo número.

$27 = 3^3$ y $\frac{1}{9} = 9^{-1} = 3^{-2}$

Debemos hallar x tal que $(3^3)^x = 3^{-2}$, es decir, $3x = -2$ de donde $x = -\frac{2}{3}$.

Luego $log_{27} \frac{1}{9} = -\frac{2}{3}$

5. Calcular $log_{\frac{3}{5}}\ \frac{125}{27}$

Solución:

$\frac{125}{27} = \frac{5^3}{3^3} = \left(\frac{5}{3}\right)^3 = \left(\frac{3}{5}\right)^{-3}$

Debemos hallar x tal que $\left(\frac{3}{5}\right)^{x} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-3}$. Es decir, $x = -3$

Luego, $\log_{\frac{3}{5}} \frac{125}{27} = -3$

6. Graficar la función $y = \log_3 x$. En base al gráfico responder las siguientes preguntas.

a) ¿Cuál es su dominio?

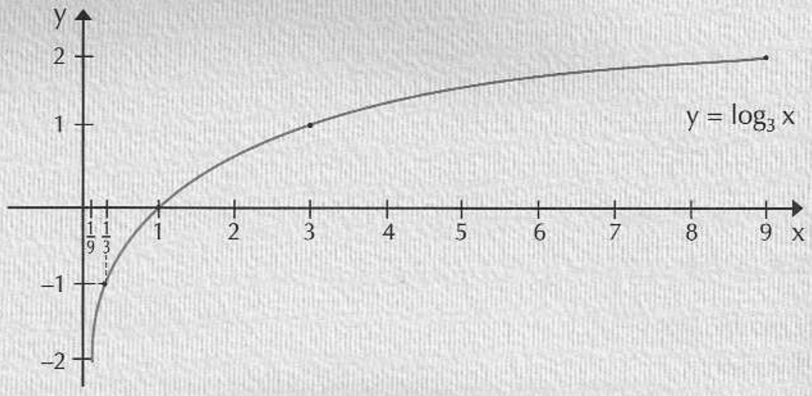
b) ¿Cuál es su recorrido?

c) ¿Qué signo tiene el logaritmo en base 3 de los números menores que 1?

d) ¿El logaritmo en base 3 de qué números está entre – 2 y 2?

e) Graficar la función $y = \log_3 (x - 2)$ e indicar su dominio y su recorrido.

Solución:



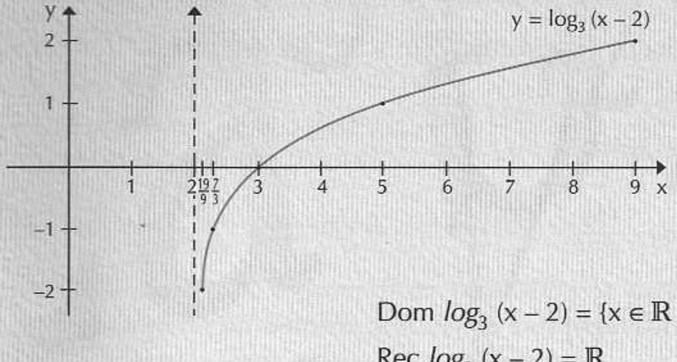
a) Dom $\log_3 x = \mathbb{R}^+$

b) Rec $\log_3 x = \mathbb{R}$

c) Negativo. Si observamos el gráfico, el logaritmo en base 3 de cualquier número menor que 1 es negativo. Por ejemplo, $\log_3 \frac{1}{3} = -1$

d) Observamos que $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ y $\log_3 9 = 2$, luego el logaritmo en base 3 de los números que están entre $\frac{1}{9}$ y 9 están entre – 2 y 2

e)



Dom $\log_3 (x - 2) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x > 2\}$

Rec $\log_3 (x - 2) = \mathbb{R}$

7. Calcular el valor de $\log a + \log \frac{1}{a}$

Solución:

$\log a + \log \frac{1}{a} = \log (a \cdot \frac{1}{a}) = \log 1 = 0$

8. Si $\log_6 N = r$. Determinar el logaritmo en base 6 de $\frac{N}{216}$

Solución:

$\log_6 \frac{N}{216} = \log_6 N - \log_6 216 = r - 3$

9. Desarrollar la expresión $\log \frac{3ab^2}{c^{-1}}$. Escribirla en términos de $\log a$, $\log b$, y $\log c$.

Solución:

$$\log \frac{3ab^2}{c^{-1}} = \log 3ab^2 - \log c^{-1}$$
$$= \log 3 + \log a + 2 \log b + \log c$$

10. Escribir como un solo logaritmo la expresión

$\frac{1}{2} \log a - \frac{1}{2} \log b - \frac{1}{2} \log c$

Solución:

$$\frac{1}{2} \log a - \frac{1}{2} \log b - \frac{1}{2} \log c = \log a^{\frac{1}{2}} - \log b^{\frac{1}{2}} - \log c^{\frac{1}{2}}$$
$$= \log \sqrt{a} - (\log \sqrt{b} + \log \sqrt{c})$$
$$= \log \sqrt{a} - \log \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}$$
$$= \log \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}\sqrt{c}} = \log \sqrt{\frac{a}{bc}}$$

Ejercicios

1. Escriba como potencia del número que se indica los siguientes números:

a) 2, 4, 8, 16, 64, 256 de 2

b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}$ de 2

c) 2, 4, 8, 16, 64, 256 de $\frac{1}{2}$

d) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}$ de $\frac{1}{2}$

2. Escriba los siguientes números como potencia de 10.

a) 10; 100; 1.000.000

b) $\frac{1}{10}; \frac{1}{100}; \frac{1}{1.000.000}$

c) 1; 0,1; 0,001; 0,0000001

3. Escriba como un logaritmo de base 3 los siguientes números:

a) 1; 2; 3; 4

b) – 1; – 2; – 3; – 4

Ejercicios

4. Calcule los siguientes logaritmos:

a) $\log 1$

b) $\log 10$

c) $\log 100$

d) $\log 1.000$

e) $\log \frac{1}{10}$

f) $\log \frac{1}{100}$

g) $\log 0{,}01$

h) $\log 0{,}0001$

i) $\log \sqrt{10}$

j) $\log \sqrt{1.000}$

5. Calcule los siguientes logaritmos:

a) $\log_2 1$

b) $\log_2 2$

c) $\log_2 4$

d) $\log_2 \frac{1}{2}$

e) $\log_2 \frac{1}{4}$

f) $\log_2 \sqrt{2}$

g) $\log_2 \sqrt[3]{2}$

h) $\log_2 \sqrt{\frac{1}{8}}$

i) $\log_2 \sqrt{8}$

j) $\log_2 \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

6. Calcule los siguientes logaritmos:

a) $\log_{\frac{1}{2}} 1$

b) $\log_{\frac{1}{2}} 2$

c) $\log_{\frac{1}{2}} 4$

d) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$

e) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$

f) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2}$

g) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{2}$

h) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{8}}$

i) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{8}$

j) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

7. Calcule los siguientes logaritmos:

a) $\log_7 343$

b) $\log_{3.459} 1$

c) $\log_{\sqrt{8}} 64$

d) $\log_5 \frac{3\sqrt{4}}{6}$

e) $\log_8 32$

f) $\log_2 \sqrt{32}$

g) $\log_{\sqrt[3]{0.2}} \sqrt{125}$

h) $\log_9 \sqrt{27}$

i) $\log_4 \sqrt[4]{16}$

j) $\log_{27} \frac{1}{3}$

k) $\log_{\sqrt{16}} 128$

l) $\log_3 \frac{1}{9}$

m) $\log_{\frac{1}{4}} 2$

n) $\log \sqrt[3]{81}$

o) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 4$

p) $\log_9 243$

q) $\log_{0,3} 0{,}0081$

r) $\log_{50} 1$

s) $\log_{\frac{3}{2}} \frac{8}{27}$

t) $\log_{\frac{1}{10}} \sqrt{1.000}$

8. Encuentre entre qué potencias de 10 está el número cuyo logaritmo decimal es:

a) 0,5

b) 1,2

c) 2,8

d) 3,5

e) – 0,5

f) – 1,7

g) – 2,3

h) – 3,7

9. Encuentre entre qué números enteros está el logaritmo decimal de: (bosqueje el gráfico de $y = \log x$)

a) 7

b) 9,27

c) 12,58

d) 83,025

e) 135

f) 2.992,16

g) 0,27

h) 0,349

i) 0,052

j) 0,0116

k) 0,0098

l) 0,000145

10. Escriba la característica de los logaritmos decimales de los números del ejercicio anterior.

11. Determine en qué base el logaritmo de:

a) 125 es 3

b) 8 es $\frac{3}{2}$

c) 16.384 es 7

d) 4 es 2

e) 9 es 2

f) 16 es 2

12. Escriba el logaritmo de los siguientes números en función de log 2.

a) $log\,4$

b) $log\,\frac{1}{16}$

c) $log\sqrt{\frac{1}{32}}$

d) $log\,5$

e) $log\,125$

f) $log\,0{,}5$

13. Usando una calculadora científica determine el número cuyo logaritmo decimal es:

a) 0, 2

b) 1, 2

c) 2, 2

d) 3, 2

e) 4, 2

f) 5, 2

14. Usando una calculadora científica determine el número cuyo logaritmo en base 2 es:

a) 0, 2

b) 1, 2

c) 2, 2

d) 3, 2

e) 4, 2

f) 5, 2

15. Escriba alguna relación entre los resultados del ejercicio 13 y los del ejercicio 14.

16. Exprese x en forma de logaritmo en cada igual dad siguiente:

a) $4^x = 1$

b) $14^x = 17$

c) $a^x = m \cdot n$

d) $q^x = \sqrt{a+b}$

17. Escriba en forma de potencia las siguientes igualdades:

a) $log_a\, b = p$

b) $log_5\, 4 = p$

c) $log_{(a-b)}(a^2 - 2\,ab + b^2) = 2$

d) $log_{\frac{1}{3}}\, 27 = -3$

18. Calcule el valor de la incógnita:

a) $log_5\, 25 = x$

b) $log_5\, x = 3$

c) $log_x\, 27 = 3$

d) $log_{0,027}\, x = \frac{1}{3}$

e) $log_{32}\, \frac{1}{2} = x$

f) $log_x\, \frac{16}{36} = 2$

g) $log_{0,008}\, x = \frac{1}{3}$

h) $log_x\, \frac{1}{4} = -2$

i) $log_5\, x = 1$

j) $log_x\, 8 = -\frac{3}{4}$

k) $log_x\, 4 = -\frac{2}{3}$

l) $log_3\, x = -\frac{1}{3}$

m) $log_2\, \frac{1}{64} = x$

n) $log_{81}\, \frac{1}{3} = x$

o) $log_4\, x = \frac{3}{2}$

p) $log_2\, x = \frac{6}{5}$

q) $log_x\, 8 = -2$

r) $log_x\, 8 = -3$

s) $log_x\, 27 = -3$

t) $log_x\, 9 = -2$

u) $log_{\frac{2}{3}}\, x = 0$

Ejercicios

v) $\log_3 1 = x$

w) $\log_x \frac{1}{4} = -\frac{2}{3}$

x) $\log_x \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$

19. Aplicando las propiedades de logaritmo, calcule:

a) $\log_a 1 + \log_b b^n + \log_c \frac{1}{c^n}$

b) $\log_a a^2 + \log_b b^3$

c) $\log_a ab + \log_a \frac{a}{b}$

d) $\log_a \sqrt{a} + \log_b \sqrt[3]{b} + \log_c \sqrt[4]{c}$

e) $\log 1.000 - \log_3 9^2$

f) $\log 0{,}1 - \log 0{,}01$

g) $\log_{\frac{1}{4}} 1 + \log_{\frac{2}{3}} \frac{3}{2} + \log_9 \frac{1}{3}$

h) $\log_2 3 + \log_{\frac{1}{2}} 3$ (Sug.: escriba en notación de potencia)

20. Aplicando las propiedades escriba los siguientes logaritmos desarrollados:

a) $\log\left(\frac{b\sqrt{c}}{a}\right)^4$

b) $\log\left(\frac{a^2\sqrt{b}}{\sqrt{c}}\right)^3$

c) $\log\left(\frac{a^2 b^3}{\sqrt{a}\,c}\right)^{-2}$

d) $\log \frac{a^2\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[5]{\frac{b}{c}}}$

e) $\log \sqrt{\frac{a^3\sqrt{b}}{c^2\sqrt{a^3}}}$

21. Aplicando las propiedades, reduzca las expresiones siguientes:

a) $\log a + \log b - 2\log c$

b) $\frac{1}{2}\log a + \frac{3}{2}\log b - \frac{1}{2}\log c - \frac{1}{2}\log d$

c) $\frac{1}{3}\log a - \frac{2}{3}\log b + \frac{1}{3}\log c$

d) $\frac{1}{2}\log x - \frac{1}{3}\log y - \frac{1}{4}\log z$

22. Demuestre que: $\log_9 x = \frac{1}{2}\log_3 x$

23. Grafique las funciones siguientes:

a) $y = \log_2 (x+1)$

b) $y = \log_2 (x-1)$

c) $y = 1 + \log_2 x$

d) $y = 1 - \log_2 x$

24. Grafique $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

$y = \log_{\frac{1}{3}} x$

25. Si la base del logaritmo es mayor que 1, ¿qué signo tienen los logaritmos de los números mayores que 1, y de los números menores que 1?

26. Si la base del logaritmo es menor que 1, ¿qué signo tienen los logaritmos de los números mayores que 1, y de los números menores que 1?

27. Encuentre usando una calculadora:

a) El logaritmo en base 3 de 4, 6, 8, 10.

b) El logaritmo en base $\frac{1}{3}$ de 4, 6, 8, 10.

¿Qué relación existe entre los resultados?

28. Demuestre que:

$\log_a x = -\log_{\frac{1}{a}} x$

$\forall x \in \mathbb{R}^+$

29. Demuestre que:

$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$

30. Si $\log_a p = 3$ y

$\log_a 36p = 5$, calcule a.

31. Calcule el valor de:

$\log_a \frac{1}{a} + \log_b \frac{1}{b}$

32. Calcule el valor numérico de:

a) $3^{\log_x x^2}$

b) $4^{\log_x \sqrt{x}}$

c) $\log(\log 10^{10})$

d) $\log_a\left(a^{a \log_a a^2}\right)$

33. Si $\log 2 = 0{,}3010$ y $\log 3 = 0{,}4771$, encuentre sin calculadora $\log 120$.

34. Demuestre que

$$\log \frac{1}{y} + \log y = 0$$

35. Si $\log x = y$, encuentre $\log(10x^2)$ en función de y.

36. Calcule el valor numérico de:

$3 \log_b b + \log_b b^2 + \log_b b^{-5}$

Soluciones

1. a) $2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ 2^6,\ 2^8$ b) $2^{-1},\ 2^{-2},\ 2^{-3},\ 2^{-4},\ 2^{-6},\ 2^{-8}$
   c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}, \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}, \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}, \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}, \left(\frac{1}{2}\right)^{-6}, \left(\frac{1}{2}\right)^{-}$ d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{1}, \left(\frac{1}{2}\right)^{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^{3}, \left(\frac{1}{2}\right)^{4}, \left(\frac{1}{2}\right)^{6}, \left(\frac{1}{2}\right)^{8}$
2. a) $10;\ 10^2;\ 10^6$ b) $10^{-1};\ 10^{-2};\ 10^{-6}$ c) $10^0;\ 10^{-1};\ 10^{-3};\ 10^{-7}$
3. a) $\log_3 3;\ \log_3 9;\ \log_3 27;\ \log_3 81$ b) $\log_3 \frac{1}{3};\ \log_3 \frac{1}{9};\ \log_3 \frac{1}{27};\ \log_3 \frac{1}{81}$
4. a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) -1
   f) -2 g) -2 h) -4 i) $\frac{1}{2}$ j) $\frac{3}{2}$
5. a) 0 b) 1 c) 2 d) -1 e) -2
   f) $\frac{1}{2}$ g) $\frac{1}{3}$ h) $-\frac{3}{2}$ i) $\frac{3}{2}$ j) $-\frac{2}{3}$
6. a) 0 b) -1 c) -2 d) 1 e) 2
   f) $-\frac{1}{2}$ g) $-\frac{1}{3}$ h) $\frac{3}{2}$ i) $-\frac{3}{2}$ j) $\frac{2}{3}$
7. a) 3 b) 0 c) 4 d) 0 e) $\frac{5}{3}$
   f) $\frac{5}{2}$ g) $-\frac{9}{2}$ h) $\frac{3}{4}$ i) $\frac{1}{2}$ j) $-\frac{1}{3}$
   k) $\frac{7}{2}$ l) -2 m) $-0{,}5$ n) $\frac{4}{3}$ o) -4
   p) $\frac{5}{2}$ q) 4 r) 0 s) -3 t) $-\frac{3}{2}$
8. a) entre 1 y 10 b) entre 10 y 10^2 c) entre 10^2 y 10^3 d) entre 10^3 y 10^4
   e) entre 10^{-1} y 1 f) entre 10^{-2} y 10^{-1} g) entre 10^{-3} y 10^{-2} h) entre 10^{-4} y 10^{-3}
9. a) entre 0 y 1 b) entre 0 y 1 c) entre 1 y 2 d) entre 1 y 2

e) entre 2 y 3 f) entre 3 y 4 g) entre −1 y 0 h) entre −1 y 0
i) entre −2 y −1 j) entre −2 y −1 k) entre −3 y −2 l) entre − 4 y −3

10. a) 0 b) 0 c) 1 d) 1 e) 2 f) 3
g) −1 h) −1 i) −2 j) −2 k) −3 l) − 4

11. a) 5 b) 4 c) 4 d) 2 e) 3 f) 4

12. a) $2\,log\,2$ b) $-4\,log\,2$ c) $-\frac{5}{2}\,log\,2$
d) $1 - log\,2$ e) $3 - 3\,log\,2$ f) $-\,log\,2$

13. a) 1,58489319 b) 15,8489319 c) 158,489319
d) 1.584,89319 e) 15.848,9319 f) 158.489,319

14. a) 1,148698355 b) 2,29739671 c) 4,59479342
d) 9,18958684 e) 18,37917368 f) 36,75834736

15. En el ejercicio 13, cada número obtenido es igual al anterior multiplicado por 10. En el ejercicio 14, cada número obtenido es igual al anterior multiplicado por 2.

16. a) $x = log_4\,1$ b) $x = log_{14}\,17$
c) $x = log_a\,m \cdot n$ d) $x = log_q\,\sqrt{a+b}$

17. a) $a^p = b$ b) $5^p = 4$ c) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 27$

18. a) 2 b) 125 c) 3 d) 0,3 e) $-\frac{1}{5}$
f) $\frac{2}{3}$ g) 0,2 h) 2 i) 5 j) $\frac{1}{16}$
k) $\frac{1}{8}$ l) $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ m) −6 n) $-\frac{1}{4}$ o) 8
p) $2\sqrt[5]{2}$ q) $\sqrt{\frac{2}{4}}$ r) $\frac{1}{2}$ s) $\frac{1}{3}$ t) $\frac{1}{3}$
u) 1 v) 0 w) 8 x) $3\sqrt{3}$

19. a) 0 b) 5 c) 2 d) $\frac{13}{12}$
e) −1 f) 1 g) $-\frac{3}{2}$ h) 0

20. a) $4\,log\,b + 2\,log\,c - 4\,log\,a$ b) $6\,log\,a + \frac{3}{2}\,log\,b - \frac{3}{2}\,log\,c$

c) $-3\,\log a - 6\,\log b + 2\,\log c$

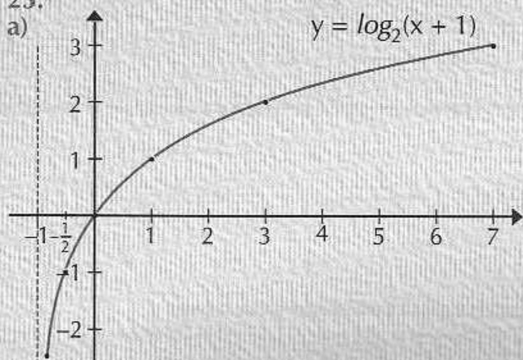
d) $2\,\log a + \frac{7}{15}\log b + \frac{1}{5}\log c$

e) $\frac{3}{4}\log a + \frac{1}{4}\log b - \log c$

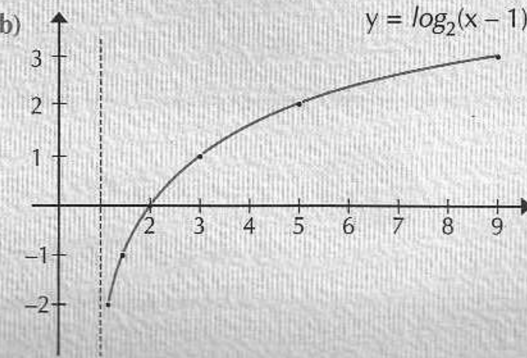
21. a) $\log \frac{ab}{c^2}$ b) $\log \sqrt{\frac{ab^3}{cd}}$ c) $\log \sqrt[3]{\frac{ac}{b^2}}$ d) $\log \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y}\,\sqrt[4]{z}}$

23.

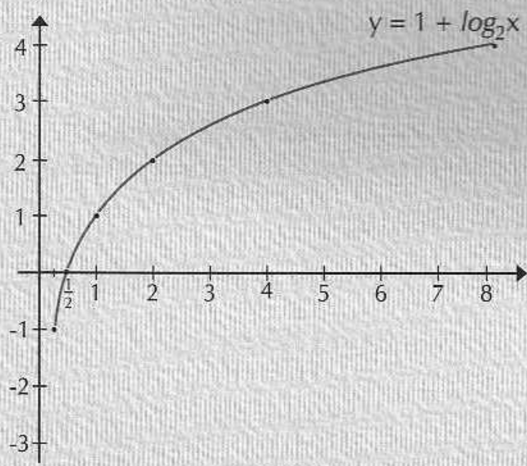
a)



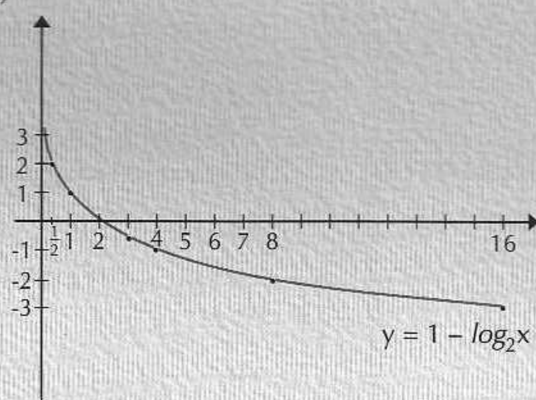
b)



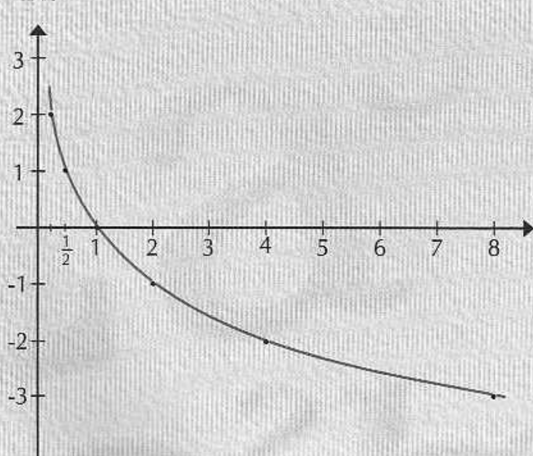
c)

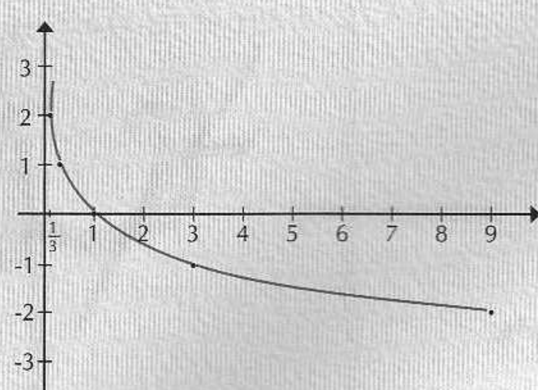


d)



24.





25. Positivo, negativo

26. Negativo, positivo

27.

	a)	b)
	1,261859507	– 1,261859507
	1,630929754	– 1,630929754
	1,892789261	– 1,892789261
	2,095903274	– 2,095903274

$\log_3 x = -\log_{\frac{1}{3}} x$ $\qquad x = 4, 6, 8, 10$

30. 6

31. – 2

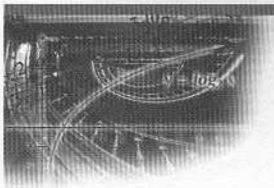
32.
a) 9 b) 2 c) 1 d) 2a

33. 2,0791

35. 1 + 2y

36. 0

7.3 Ecuaciones exponenciales y logarítmicas



Se llaman ecuaciones exponenciales aquellas ecuaciones que presentan la incógnita en el exponente:

$3^x = 1$ $\qquad$ o $\qquad$ $2^{3x-1} = 3^{x+2}$

Se llaman ecuaciones logarítmicas aquellas ecuaciones que presentan la incógnita como argumento de una función logarítmica:

$\log x = 2$ $\qquad$ o $\qquad$ $\log(3x-1) = \log(x+2)$

Para resolver ecuaciones exponenciales podemos igualar las bases y aplicar:

$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$

Ejemplo:

$$3^x = 1$$
$$3^x = 3^0$$
$$\Downarrow$$
$$x = 0$$

En ocasiones no es posible igualar las bases, y en estos casos podemos aplicar el concepto de función logarítmica. Como ésta es biyectiva en su rango se tiene:

$\log x = \log y \Leftrightarrow x = y$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} 2^{3x-1} &= 3^{x+2} \\ \log 2^{3x-1} &= \log 3^{x+2} \\ (3x-1)\log 2 &= (x+2)\log 3 \\ 3x\log 2 - \log 2 &= x\log 3 + 2\log 3 \\ x(3\log 2 - \log 3) &= 2\log 3 + \log 2 \\ x &= \frac{2\log 3 + \log 2}{3\log 2 + \log 3} \end{aligned}$$

Para resolver ecuaciones logarítmicas también debemos aplicar el concepto de función biyectiva:

$$\log x = \log y \Leftrightarrow x = y$$

Ejemplo:

$$\log x = 2 \qquad 2 = \log 100$$

$$\log x = \log 100$$
$$\Downarrow$$
$$x = 100$$

Ejemplo:

$$\log(3x - 1) = \log(x + 2)$$
$$\Downarrow$$
$$3x - 1 = x + 2$$
$$2x = 3$$
$$x = \frac{2}{3}$$

Ejercicios resueltos

1. Resolver la ecuación $2^{2x} = 5$

Solución: Aplicando logaritmo.

$\log 2^{2x} = \log 5$ aplicando $\log a^p = p \log a$

$2x \log 2 = \log 5$ despejando x

$x = \dfrac{\log 5}{2 \log 2}$ con una calculadora

$$x = \frac{0{,}69897}{2 \cdot 0{,}3010}$$

$$x = 1{,}16096$$

2. Resolver la ecuación $5 \cdot 5^{2x-1} = 2$

Solución: Para aplicar logaritmo debemos efectuar primero la multiplicación $5 \cdot 5^{2x-1} = 5^{2x}$

$$\log 5^{2x} = \log 2$$

$$2x \log 5 = \log 2$$

$$x = \frac{\log 2}{2 \log 5}$$

$$x = \frac{0{,}3010}{2 \cdot 0{,}6989}$$

$$x = 0{,}2154$$

3. Resolver la ecuación:

$$3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} + 3^{x-4} = 1.080$$

Solución:

$$3^x\,(3^{-1} + 3^{-2} + 3^{-3} + 3^{-4}) = 1.080$$

$$3^x\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81}\right) = 1.080$$

$$3^x \bullet \frac{40}{81} = 1.080$$

$$3^x = \frac{1.080 \bullet 81}{40}$$

$$3^x = 2.187$$

$$3^x = 3^7$$

$$\Downarrow$$

$$x = 7$$

4. Resolver la ecuación

$$4^x - 2 \bullet 2^{x+3} + 64 = 0$$

Solución:

Haciendo $2^x = y$ nos queda una ecuación de segundo grado.

$$4^x - 2 \bullet 2^x \bullet 2^3 + 64 = 0$$

$$(2^x)^2 - 16 \bullet 2^x + 64 = 0$$

$$y^2 - 16y^2 + 64 = 0$$

$$(y - 8)^2 = 0$$

$$y = 8$$

Luego $2^x = 8$ de donde $x = 3$

5. Resolver la ecuación

$$8^x - 9 \bullet 8^{-x} = 8$$

Solución:

$$8^x - 9 \bullet 8^{-x} = 8$$

$$8^x - 9 \bullet \frac{1}{8^x} = 8 \qquad / \bullet 8^x$$

$$8^{2x} - 9 = 8 \bullet 8^x$$

$$8^{2x} - 8 \bullet 8^x - 9 = 0 \qquad \text{Sea } 8^x = y$$

$$y^2 - 8y - 9 = 0$$

$$(y - 9)(y + 1) = 0 \quad \begin{cases} y_1 = 9 \\ y_2 = -1 \end{cases}$$

Si $y_1 = 9 \Rightarrow 8^x = 9 \Rightarrow x = log_8 9 \Rightarrow x = 0{,}94639$
Si $y_2 = -1 \Rightarrow 8^x = -1 \Rightarrow x$ no existe.

6. Resolver la ecuación $6^x \bullet 3^{2x} + 2 = 20$

Solución:

$$
\begin{aligned}
6^x \cdot 3^{2x} + 2 &= 20 \\
6^x \cdot 3^{2x} &= 18 \qquad \text{aplicando } log \\
log\, 6^x \cdot 3^{2x} &= log\, 18 \\
log\, 6^x + log\, 3^{2x} &= log\, 3 + log\, 6 \\
x\, log\, 6 + 2x\, log\, 3 &= log\, 3 + log\, 2 + log\, 3 \\
x\,(log\, 2 + log\, 3 + 2\, log\, 3) &= 2\, log\, 3 + log\, 2 \\
x &= \frac{2\, log\, 3 + log\, 2}{3\, log\, 3 + log\, 2}
\end{aligned}
$$

7. Resolver la ecuación

$$log\, x + log\, (x + 1) = log\, 6$$

Solución: Aplicando propiedades de logaritmo el primer miembro queda $log\, x\,(x + 1)$.

$$
\begin{aligned}
log\, (x^2 + x) &= log\, 6 \\
&\Downarrow \\
x^2 + x &= 6 \\
x^2 + x - 6 &= 0 \\
(x + 3)\,(x - 2) &= 0
\end{aligned}
$$

cuyas soluciones son $x_1 = -3$ y $x_2 = 2$

Una vez obtenidas las soluciones de la ecuación de segundo grado debemos comprobar que los valores obtenidos sean en realidad solución de la ecuación logarítmica planteada. Recordemos que el dominio de la función logarítmica es $\mathbb{R}^+$ y no $\mathbb{R}$, por lo tanto, cualquier valor obtenido para la incógnita que haga negativo o cero el argumento de algún logaritmo, no es solución de la ecuación planteada. En este caso $x = -3$ no es solución ya que $log\,(-3)$ y $log\,(-2)$ no están definidos.

$x = 2$ es solución ya que:

$$
\begin{aligned}
log\, 2 + log\, (2 + 1) &= log\, 6 \\
log\, 2 + log\, 3 &= log\, 6 \\
log\, 2 \cdot 3 &= log\, 6 \\
log\, 6 &\equiv log\, 6
\end{aligned}
$$

8. Resolver la ecuación:

$$log\, x - log\, (x + 3) = -1$$

Solución: $-1 = log\, \frac{1}{10}$ y $log\, x - log\, (x + 3) = log\, \frac{x}{x + 3}$

luego $log\, \frac{x}{x + 3} = log\, \frac{1}{10}$

$$\frac{x}{x + 3} = \frac{1}{10}$$

$$10\,x = x + 3$$
$$9\,x = 3$$
$$x = \frac{1}{3}$$

que es solución de la ecuación planteada.
En efecto:

$$log\,\frac{1}{3} - log\left(\frac{1}{3}+3\right) = -1$$

$$log\,1 - log\,3 - log\,\frac{10}{3} = -1$$

$$log\,1 - \cancel{log\,3} - log\,10 + \cancel{log\,3} = -1$$

$$0 - 1 = -1$$

$$-1 \equiv -1$$

9. Resolver la ecuación:

$$2log_2(x+2) - log_2(x+1) = 2$$

Solución:

$$log_2\,\frac{(x+2)^2}{x+1} = log_2 4$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{(x+2)^2}{x+1} = 4$$
$$(x+2)^2 = 4\,(x+1)$$
$$x^2 + 4x + 4 = 4x + 4$$
$$x^2 = 0$$
$$x = 0$$

comprobando

$$2\underbrace{log_2 2}_{1} - \underbrace{log_2 1}_{0} = 2$$

$$2 \bullet 1 - 0 = 2$$
$$2 \equiv 2$$

10. Resolver la ecuación

$$log\,x^3 = log^2 x - 4$$

Solución:

$$3\,log\,x = log^2 x - 4 \qquad \text{Sea } u = log\,x$$
$$3u = u^2 - 4$$
$$u^2 - 3u - 4 = 0$$
$$(u-4)(u+1) = 0 \quad \begin{cases} u = 4 \\ u = -1 \end{cases}$$

Si $log\,x = 4 \Rightarrow x = 10.000$
Si $log\,x = -1 \Rightarrow x = 0,1$

Ambos valores satisfacen la ecuación.

11. Despejar x en la expresión $y = \dfrac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}}$

Solución:

$$\text{Sea } u = 2^x \Rightarrow 2^{-x} = \frac{1}{2^x} = \frac{1}{u}$$

$$y = \frac{u + \frac{1}{u}}{u - \frac{1}{u}} \qquad / \cdot \frac{u}{u}$$

$$y = \frac{u^2+1}{u^2-1}$$

$$u^2y - y = u^2 + 1$$

$$u^2y - u^2 = y + 1$$

$$u^2(y-1) = y + 1$$

$$u^2 = \frac{y+1}{y-1}$$

Como $u = 2^x$ entonces $u^2 = 2^{2x}$

$$2^{2x} = \frac{y+1}{y-1} \quad \text{aplicando } \mathit{log}$$

$$2x\, \mathit{log}\, 2 = \mathit{log}\,(y+1) - \mathit{log}\,(y-1)$$

$$x = \frac{\mathit{log}\,(y+1) - \log\,(y-1)}{2\, \mathit{log}\, 2}$$

12. Resolver el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2^{x+y} &= 6 \\ 2^x &= 3 \cdot 2^{y-1} \end{aligned}\right|$$

Solución: Aplicando logaritmo en ambas ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} (x+y)\, \mathit{log}\, 2 &= \mathit{log}\, 6 \\ x\, \mathit{log}\, 2 &= \mathit{log}\, 3 + (y-1)\, \mathit{log}\, 2 \end{aligned}\right|$$

$$\left.\begin{aligned} x\, \mathit{log}\, 2 + y\, \mathit{log}\, 2 &= \mathit{log}\, 6 \\ x\, \mathit{log}\, 2 - y\, \mathit{log}\, 2 &= \mathit{log}\, 3 - \mathit{log}\, 2 \end{aligned}\right|$$

Sumando: $2\, x\, \mathit{log}\, 2 = \mathit{log}\, 6 + \mathit{log}\, 3 - \mathit{log}\, 2$

$$x = \frac{\mathit{log}\, 2 + \mathit{log}\, 3 + \mathit{log}\, 3 - \mathit{log}\, 2}{2\, \mathit{log}\, 2}$$

$$x = \frac{\mathit{log}\, 3}{\mathit{log}\, 2} = \mathit{log}_2\, 3 = 1{,}5849$$

Restando: $2\, y\, \mathit{log}\, 2 = \mathit{log}\, 6 - \mathit{log}\, 3 + \mathit{log}\, 2$

$$y = \frac{\mathit{log}\, 2 + \mathit{log}\, 3 - \mathit{log}\, 3 + \mathit{log}\, 2}{2\, \mathit{log}\, 2}$$

$$y = 1$$

Luego la solución del sistema es $(\mathit{log}_2\, 3,\ 1)$

13. Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \log(x+1) + \log 2 = \log y \\ \log x + \log(y+1) = \log 5 \end{cases}$$

Solución: Aplicando las propiedades de logaritmo:

$$\begin{cases} \log[(x+1)\cdot 2] = \log y \\ \log[x(y+1)] = \log 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 2 = y & (1) \\ xy + x = 5 & (2) \end{cases}$$

Reemplazando y en (2)

$$x(2x+2) + x - 5 = 0$$

$$2x^2 + 3x - 5 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{4} = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Si $x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = 4$

Si $x_2 = \frac{-5}{2} \Rightarrow y_2 = -3$

La segunda solución obtenida no es solución del sistema, ya que *log* $[(x+1)\cdot 2]$ sería el logaritmo de un número negativo.

Por lo tanto, la solución es (1, 4).

14. Demostrar que:

$$\log\left(\sqrt{a^2+1} + a\right) + \log\left(\sqrt{a^2+1} - a\right) = 0 \quad \text{para todo } a \geq 0.$$

Solución:

$$\log\left(\sqrt{a^2+1} + a\right) + \log\left(\sqrt{a^2+1} - a\right) =$$

$$\log\left(\sqrt{a^2+1} + a\right)\left(\sqrt{a^2+1} - a\right) =$$

$$\log(a^2 + 1 - a^2) = \log 1 = 0$$

15. Encontrar la base del sistema de logaritmos en que el logaritmo de 80 excede al logaritmo de 5 en 2 unidades.

Solución: Sea x la base buscada:

$$\log_x 80 - \log_x 5 = 2$$

$$\log_x \frac{80}{5} = 2$$

$$\log_x 16 = 2$$

luego, $x = 4$

Ejercicios

1. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a. $3^x = 12$

b. $2^{x-1} = 3^{2x-1}$

c. $2^{x+2} = 5^{x+1}$

d. $3^{2x-3} - 2^{4x-1} = 0$

e. $2 \cdot 2^{x-1} = \dfrac{1}{3}$

f. $3^{3x+1} = 3 \cdot 2^{x+3}$

2. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a. $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 14$

b. $3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 13$

c. $5^{x-1} + 5^x + 5^{x+1} = 31$

d. $5^{x-1} + 5^x + 5^{x+1} = 62$

e. $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 15$

f. $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 39$

g. $3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} = 13$

h. $2^{1-x} + 2^{2-x} + 2^{3-x} = 7$

3. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a. $4^x - 9 \cdot 2^{x+1} + 81 = 0$

b. $9^x + 3^x - 12 = 0$

c. $2 \cdot 3^{2x} - 7 \cdot 3^x + 3 = 0$

d. $5^{2x+3} - 8 \cdot 5^{x+1} + 3 = 0$

e. $3^{2x+2} - 5 \cdot 3^{x+1} + 4 = 0$

Nota: Reduzca las ecuaciones precedentes a ecuaciones de segundo grado.

4. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a. $10^x + 10^{-x} = 2$

b. $5^x + 16 \cdot 5^{-x} - 8 = 0$

c. $5^x + 15 \cdot 5^{-x} - 8 = 0$

d. $a^x + 24a^{-x} - 11 = 0$

e. $2^x + 5 \cdot 2^{2-x} - 9 = 0$

Nota: Reduzca las ecuaciones precedentes a ecuaciones de segundo grado.

5. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a. $\log x + \log 3 = \log 15$

b. $\log 2 - \log x = \log 3$

c. $\log x - 2 \log 3 + \log 2 = 0$

d. $2 \log x = 2$

e. $2 \log_2 x = 4$

f. $2 \log x = -2$

g. $2 \log x + \log 4 = 2$

h. $\log x^3 = \log 3 + \log x^2$

i. $\log x^5 = 3 + \log x^2$

j. $2 \log_3 x - \log_3 2 = 2$

6. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a. $\log (x + 3) = \log (2x - 1)$

b. $\log (x + 1) + \log (x - 2) = \log (x - 3) + \log (x + 5)$

c. $2 \log (x + 1) - \log (x - 1) = 1$

d. $\log x = 1 + \log (11 - x)$

e. $\log (3x - 4) - \log (2x + 1) = \log (2x - 1) - \log (3x + 4)$

f. $2 \log (x + 4) - \log (x - 1)^2 = \log 3$

Ejercicios

g) $\log(x+1) = \log 3 + \log(x-3)$

h) $2\log_2(x+2) - \log_2(x+1) = 2$

i) $2\log_3(x+2) = \log_3 9$

j) $3\log_2(x+1) = \log_2(x+1)^4$

7. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $2\log_3 x = (\log_3 x)^2 + 1$

b) $\log x^{\frac{1}{2}} = (\log x)^{\frac{1}{2}}$

c) $2\log x = (\log x)^2$

d) $\log x^3 = \log^2 x + 2$

8. Resuelva los siguientes sistemas:

a)
$$\begin{cases} 2^{x-y} = 3^x \\ 3 \cdot 2^{x+1} = 2^{y-1} \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2^{x-1} = 3^{y+2} \cdot 2 \\ 3^{x-y} = 2 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 2^{x+y} = 6 \\ 2^x = 3 \cdot 2^{y-1} \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 2^{2x-3} = 4^{y-1} \\ 6^x \cdot 6 = 3^y \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} 4^{x-y} \cdot 2 = 2^x \\ 3^{x+y} : 3 = 3^y \end{cases}$$

9. Si $3^{x+y} = 2$ y $2^{x-y} = 3$ pruebe que $x + y = \log_3 2$ y que $x - y = \log_2 3$

10. Resuelva los siguientes sistemas:

a)
$$\begin{cases} \log(x+3) + \log 2 = \log(x+y) \\ \log y - \log 3 = \log(x+1) \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2\log x - \log y = 3 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} \log(x+1) - \log 2 = \log y \\ \log x - \log(y+1) = \log 3 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} -\log x - 2\log y = 5 \\ -3\log x - \log y = 3 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} \log_2(x+2y) = 1 \\ \log_3(2x+y) = 0 \end{cases}$$

11. Resuelva el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \log_2(x+y) + \log_2(x-y) = 6 \\ 2^x \cdot 2^y = 16 \end{cases}$$

12. Resuelva el siguiente sistema:

$$\begin{cases} (x+y)^{\log(x-y)} = 100 \\ x^2 - y^2 = 1.000 \end{cases}$$

13. Resuelva el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \log_2(x+y) - \log_2(x-y) = -2 \\ 3^x \cdot 3^y = 81 \end{cases}$$

14. Resuelva el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \log_3(x+y) + \log_3(x-y) = 5 \\ e^x : e^y = e^{27} \end{cases}$$

15. Determine qué relación debe existir entre p y q para que se cumplan las siguientes relaciones:

a) $\log p - \log q = 1$

b) $2\log p + \log q = 2$

16. Determine dos números naturales x e y tales que:

$$\begin{cases} y\log x - x\log y = 0 \\ x^2 - y^2 = 12 \end{cases}$$

17. Determine dos números tales que la suma de sus cuadrados sea 10.100 y que la suma de sus logaritmos decimales sea 3.

18. Determine dos números sabiendo que la diferencia de sus logaritmos en base 2 es 1 y que la suma de sus cuadrados es 1.280.

19. Determine dos números que estén en la razón 3:1, sabiendo que la suma de sus logaritmos en base 3 es 7.

20. Encuentre el sistema de logaritmos (su base) en que el logaritmo de 324 excede al logaritmo de 81 en 2 unidades.

21. Encuentre el sistema de logaritmos (su base) en que el logaritmo de 108 excede al logaritmo de 12 en 2 unidades.

22. En las siguientes expresiones, despeje la incógnita que se indica:

a) $log_2 y = x + k$; y

b) $log\,x - 2\,log\,y = 0$; x

c) $ln\,x = ln\,x_0 - t$; x

d) $log_3 k = log_3 4 - 2\,log_3 x$; x

e) $ln(30 - c) = ln\,30 - 2t$; c

Soluciones

1. a) $1+\frac{2\,log\,2}{log\,3}$ b) $\frac{log\,2-log\,3}{log\,2-2\,log\,3}$ c) $\frac{log\,5-2\,log\,2}{log\,2-log\,5}$

d) $\frac{3\,log\,3-log\,2}{2\,log\,3-4\,log\,2}$ e) $-\frac{log\,3}{log\,2}$ f) $\frac{3\,log\,2}{3\,log\,3-log\,2}$

2. a) 2 b) 1 c) 1 d) $\frac{1}{log\,5}$ e) 0 f) 1 g) 2 h) 1

3. a) $\frac{2\,log\,3}{log\,2}$ b) 1 c) $1, -\frac{log\,2}{log\,3}$ d) $-1, \frac{log\,3-2\,log\,5}{log\,5}$ e) $-1, \frac{log\,4-log\,3}{log\,3}$

4. a) 0 b) $\frac{log\,4}{log\,5}$ c) $1, \frac{log\,3}{log\,5}$ d) $\frac{log\,3}{log\,a}, \frac{log\,8}{log\,a}$ e) $2, \frac{log\,5}{log\,2}$

5. a) 5 b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{9}{2}$ d) 10 e) 4 f) 0,1 g) 5 h) 3 i) 10 j) $3\sqrt{2}$

6. a) 4 b) $\frac{13}{3}$ c) $4\pm\sqrt{5}$ d) 10 e) $\sqrt{3}$ f) $\frac{7+5\sqrt{3}}{2}$ g) 5 h) 0 i) 1 j) 0

7. a) 3 b) 1, 10.000 c) 1, 100 d) 10, 100

8. a) $\left(\frac{2\,log\,2+log\,3}{-log\,3}, \frac{(2\,log\,2+log\,3)(log\,2-log\,3)}{-log\,2\,log\,3}\right)$ b) $\left(\frac{2\,log\,3+log\,2}{log\,2-log\,3}, \frac{2\,log\,3+log\,2}{log\,2-log\,3}-\frac{log\,2}{log\,3}\right)$

c) $\left(\frac{log\,3}{log\,2}, 1\right)$ d) $\left(\frac{log\,3+2\,log\,6}{2\,(log\,3-log\,6)}, \frac{3\,log\,6}{-2\,log\,6+2\,log\,3}\right)$ e) (1, 1)

9. Sugerencia: resuelva el sistema formado con las dos condiciones dadas.

10. a) $\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{2}\right)$ b) $\left(10\sqrt[3]{10}, \frac{1}{\sqrt[3]{10}}\right)$

c) No tiene solución porque los valores que resultan para x e y hacen que algún argumento de logaritmo sea menor o igual que cero

d) $\left(\sqrt[5]{0.1},\ 0.01\sqrt[5]{0.01}\right)$ e) (0, 1)

11. (10, – 6) 12. (55, 45) 13. (10, – 6) 14. (18, – 9)

Soluciones

15. a) $p - 10q = 0$
    b) $p^2 q = 100$

16. 4 y 2

17. 100 y 10

18. 16 y 32

19. 81 y 27

20. base 2

21. base 3

22. a) $y = 2^{x+k}$
    b) $x = y^2$
    c) $x = x_0 e^{-t}$
    d) $x = 2 \frac{\sqrt{k}}{k}$
    e) $c = 30(1 - e^{-2t})$

Prueba de selección múltiple

1. Si $\log k = x$, entonces $\log 100k =$

A. $100 + k$
B. $100 + x$
C. $2 + k$
D. $2 + x$
E. $2x$

2. Si $\log \sqrt{x} = 0{,}3495$, entonces $\log x^2 =$

A. 0,3495
B. $(0{,}3495)^2$
C. $2 \cdot 0{,}3495$
D. $4 \cdot 0{,}3495$
E. 4,3495

3. Si $\log x = a$ y $\log y = b$, entonces $\log \sqrt[3]{xy} =$

A. $3a + 3b$
B. $3ab$
C. $\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b$
D. $\frac{1}{3}a \cdot b$
E. $\sqrt[3]{a+b}$

4. Si $\log x = a$, entonces $\log \sqrt{x} =$

A. a
B. $2a$
C. $\frac{1}{2}a$
D. $\sqrt{a}$
E. $a^{-\frac{1}{2}}$

5. Si $\log x = y$, entonces $\log 10x^3 =$

A. $1 + 3x$
B. $1 + 3y$
C. $10 + 3x$
D. $10 + 3y$
E. $30y$

6. Si $e^y = 3$, entonces $y =$

A. $\log 3$
B. $\ln 3$
C. $\log 3 - \log e$
D. $\ln 3 - \ln e$
E. $\frac{\ln 3}{e}$

7. $\log_{\sqrt{3}} 27 =$

A. 1
B. 3
C. 6
D. 9
E. 12

8. $\log_{81} 9 =$

A. 2
B. 1
C. $\frac{1}{2}$
D. $-\frac{1}{2}$
E. -1

9. $\log_{27} \frac{1}{3} =$

A. 3
B. 1
C. $\frac{1}{3}$
D. $-\frac{1}{3}$
E. -1

10. $log \frac{1}{x} + log\, x =$

A. $\frac{1}{x} log\, x$

B. $log\, x$

C. -1

D. 0

E. 1

11. El valor de $log_q p \cdot log_p r \cdot log_r q$ es:

A. pqr

B. $\frac{1}{pqr}$

C. $p + q + r$

D. 1

E. 0

12. La expresión $log_a b \cdot log_b c$ es equivalente a:

A. $log_b c$

B. $log_c b$

C. $log_a c$

D. $log_a bc$

E. $log_b ac$

13. La expresión $log \frac{a}{b^2c}$ es equivalente a:

A. $log\, a - 2\, log\, b + log\, c$

B. $log\, a - 2\, log\, b + 2\, log\, c$

C. $log\, a - 2\, log\, b - log\, c$

D. $log\, a - 2\, log\, b - 2\, log\, c$

E. $log\, a + 2\, log\, b + log\, c$

14. Si $log\, x^2 y = a$ y $log \frac{x}{y^2} = b$, entonces $log\, y =$

A. $\frac{1}{3}(a - 2b)$

B. $\frac{1}{5}(2a + b)$

C. $\frac{1}{3}(a + 2b)$

D. $\frac{1}{5}(2a - b)$

E. $\frac{1}{5}(a - 2b)$

15. Si $log\, x + log\, 3 = log\, 60 - log\, 20$, entonces $x =$

A. 0

B. 1

C. 3

D. 10

E. 33

16. Si $log\, n - log\, x = 2\, log\, y - 1$, entonces $n =$

A. $\frac{x^2y}{10}$

B. $\frac{xy^2}{10}$

C. $10\, x^2 y$

D. $10\, x\, y^2$

E. $x\,(y - 1)^2$

17. Si $p^{x-2} = q^{x+1}$, entonces $x =$

A. $2\, log\, p$

B. $2\, log\, p + log\, q$

C. $2\, log\, p - log\, q$

D. $\frac{2\, log\, p + log\, q}{log\, p - log\, q}$

E. $\frac{2\, log\, p + log\, q}{log\, q - log\, p}$

18. Si $y = a^{log_a x}$, entonces x vale:

A. $log_a y$

B. $log_y a$

C. y

D. 0

E. 1

19. La expresión $a^{2\, log_a x} \cdot a^{log_a y} = 1$ es equivalente a:

A. $2\, log_a x + log_a y = 0$

B. $2\, log_a x \cdot log_a y = 0$

C. $2\, log_a x \cdot log_a y = 1$

D. $2\, log_a x + log_a y = 1$

E. $y = x^2$

20. De las siguientes expresiones; son equivalentes:

I. $b^{log_b x} \cdot b^{2\, log_b y} = b^{log_b 1}$

II. $log_b x + log_b y^2 = 0$

III. $xy^2 = 1$

A. Sólo I y II

B. Sólo II y III

C. Sólo I y III

D. Todas

E. Ninguna

21. La expresión $5\, log_a a - log_a a^4 + log_a a^{-2}$ vale:

A. -2

B. -1

C. 0

D. 1

E. 2

Prueba de selección múltiple

22. La expresión

$log_a 5 + log_{\frac{1}{a}} 5$ vale:

A. -2

B. -1

C. 0

D. 1

E. 1

23. El valor de $log_3 8 + log_3 \frac{1}{8}$ es igual a:

A. -2

B. -1

C. 0

D. 1

E. 2

24. La expresión

$log_2 \frac{1}{3} + log_3 \frac{1}{2}$ es:

A. $log_2 3 - log_3 2$

B. $-log_2 3 - log_3 2$

C. $-log_2 3 + log_3 2$

D. $log_2 3 + log_3 2$

E. $-log_2 5$

25. Si $2^{x-2} + 2^{x+2} = 17$, entonces x vale:

A. 2

B. 1

C. 0

D. -1

E. -2

26. Si $3^{1-x} - 3^{x-1} = 8 \cdot 3^{-1}$, entonces x vale:

A. 2

B. 1

C. 0

D. -1

E. -2

27. Si $log(x+3) - log(x+2) = log\, 2$, entonces x vale:

A. 2

B. 1

C. 0

D. -1

E. -2

28. En la expresión $log_3 x = p + q$, x vale:

A. $3^p + q$

B. $3^q + p$

C. 3^{p+q}

D. 3^{p-q}

E. $3^p + 3^q$

29. Si $ln\, y = ln\, y_0 - t$, entonces y vale:

A. $e^{-t} \cdot y_0$

B. $e^{-t} - y_0$

C. e^{-t+y_0}

D. e^{-t-y_0}

E. e^{t+y_0}

30. Si $\frac{log\, x}{2} = \frac{2\, log\, y}{3}$, entonces:

A. $x^3 - y^4 = 0$

B. $x^3 + y^4 = 0$

C. $3x - 4y = 0$

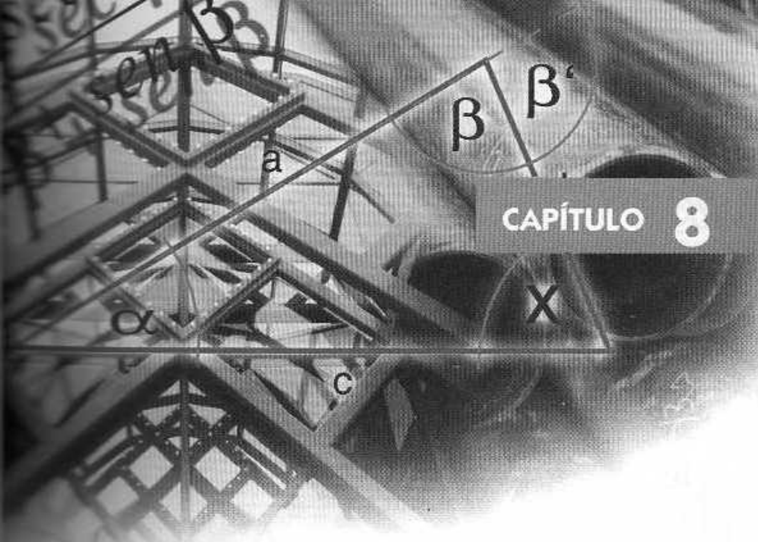
D. $3x + 4y = 0$

E. $x = \sqrt[3]{y}$

Soluciones

Clave de respuestas

1. D	6. B	11. D	16. B	21. B	26. C
2. D	7. C	12. C	17. D	22. C	27. D
3. C	8. C	13. C	18. C	23. C	28. C
4. C	9. D	14. E	19. A	24. B	29. A
5. B	10. D	15. B	20. D	25. A	30. A



CAPÍTULO 8

Trigonometría

Sistemas de medición de ángulos 8.1

Una unidad de medida para ángulos es el grado sexagesimal o simplemente grado. El ángulo obtenido por una revolución completa en sentido opuesto a las agujas del reloj mide 360 grados; por lo tanto, un grado es $\frac{1}{360}$ de una circunferencia.

Otra unidad de medida de ángulos es el radián.
Un radián es la medida del ángulo central de una circunferencia que subtiende un arco de la misma longitud que su radio.

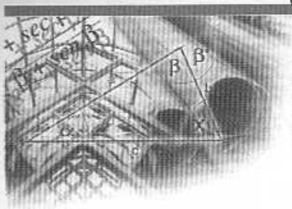
Relación entre ambos sistemas:

$$1^{\circ} = \left(\frac{\pi}{180}\right) \text{rad}$$

$$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}$$

Nota: En general se omite la palabra rad; así, un ángulo puede medir $\frac{2\pi}{3}$ (en vez de $\frac{2\pi}{3}$ rad).

8.2 Razones trigonométricas para ángulos agudos

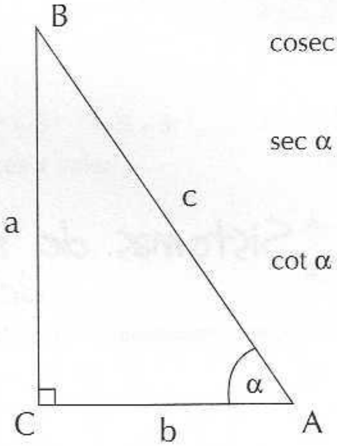


Sea α un ángulo agudo en el triángulo rectángulo ABC, de catetos a y b y de hipotenusa c. Las razones trigonométricas son: seno, coseno, tangente, cosecante, secante y cotangente y se definen:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

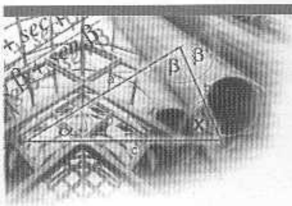


$$\text{cosec}\ \alpha = \frac{c}{a} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$$

$$\sec \alpha = \frac{c}{b} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$$

$$\cot \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$$

8.3 Identidades trigonométricas



Definición. Una identidad es una igualdad que se verifica para todos los valores posibles de la variable.

Son identidades básicas:

1. $\text{cosec}\ \alpha = \dfrac{1}{\text{sen}\ \alpha}$
2. $\sec \alpha = \dfrac{1}{\cos \alpha}$
3. $\text{ctg}\ \alpha = \dfrac{1}{\text{tg}\ \alpha}$
4. $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha}$
5. $\text{ctg}\ \alpha = \dfrac{\cos \alpha}{\text{sen}\ \alpha}$
6. $\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
7. $1 + \text{tg}^2\ \alpha = \sec^2 \alpha$
8. $1 + \text{ctg}^2\ \alpha = \text{cosec}^2\ \alpha$

Su demostración es consecuencia directa de la definición de razones trigonométricas en 8.2 (ver ejercicio resuelto nº 10).

Funciones trigonométricas de un ángulo cualquiera 8.4

Sea α un ángulo cualquiera en un sistema de coordenadas rectangulares y sea P(x,y) un punto cualquiera de su lado terminal.

Si $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, definimos:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{y}{r}$$

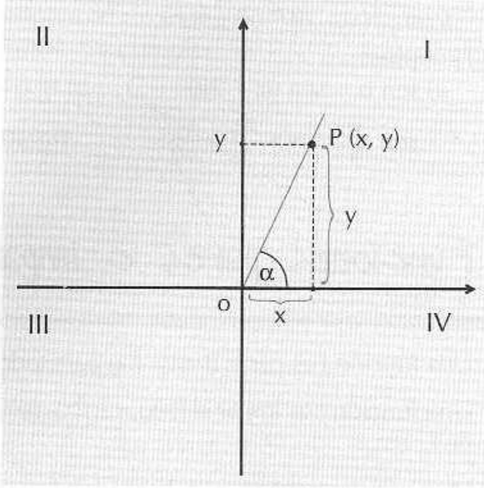
$$\cos \alpha = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$$

$$\csc \alpha = \frac{r}{y}$$

$$\sec \alpha = \frac{r}{x}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}$$

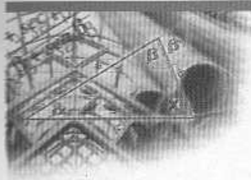


Funciones trigonométricas de 60°, 30° y 45°, 0°, 90°, 180° y 270° 8.5

ángulo \ función	sen	cos	tg	cosec	sec	ctg
$\frac{\pi}{3}$ o 60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{6}$ o 30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$ o 45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
0 o 0°	0	1	0	indef.	1	indef.
$\frac{\pi}{2}$ o 90°	1	0	indef.	1	indef.	0
π o 180°	0	-1	0	indef.	-1	indef.
$\frac{3\pi}{6}$ o 270°	-1	0	indef.	-1	indef.	0

Los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos de 30°, 45°, 60° y de los ángulos cuadrangulares (su lado terminal coincide con un lado de un cuadrante del sistema cartesiano) son usados frecuentemente, y se presentan en la tabla adjunta: (ver ejercicios resueltos nos 12 y 13)

8.6 Funciones periódicas



Una función f es periódica si existe un número real positivo P tal que f(x + P) = f(x) para todo valor de x en el dominio de f.

El número real P se llama período de la función f.

Las funciones seno y coseno, secante y cosecante son periódicas de período 2π (360°).

Las funciones tangente y cotangente son periódicas de periodo π (180°).

Ejemplos:

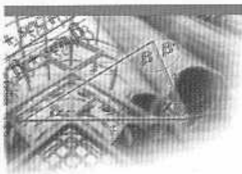
a) $\text{sen}\ \alpha = \text{sen}\ (\alpha + 2\pi)$

$$\text{sen}\ \frac{\pi}{3} = \text{sen}\ \frac{7\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) $\text{tg}\ \alpha = \text{tg}\ (\alpha + 180°)$

$$\text{tg}\ 30° = \text{tg}\ 210° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

8.7 Funciones pares e impares



Una función f es par si f(–x) = f(x) para todo valor de x en el dominio de f.

Una función f es impar si f(–x) = – f(x), para todo valor de x en el dominio de f.

Las funciones coseno y secante son funciones pares.

Las funciones seno, cosecante, tangente y cotangente son funciones impares.

Ejemplos:

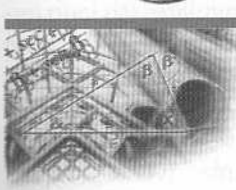
a) $\cos\ \alpha = \cos\ (-\alpha)$

$$\cos \frac{\pi}{6} = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) $\text{sen}\ \alpha = -\ \text{sen}\ (-\alpha)$

$$\text{sen}\ 30° = -\ \text{sen}\ (-30°) = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

8.8 Ecuaciones trigonométricas



Definición. Una ecuación trigonométrica es aquella que contiene la variable dentro de una expresión trigonométrica. Las soluciones de estas ecuaciones son ángulos expresados en grados o radianes.

Ejemplos:

a) $\text{sen}\ x = \frac{1}{2}$

b) $4\text{tg}\ x - 2\cos x - 4 + \sqrt{2} = 0$

c) $\text{tg}\ (2x + \pi) = 1$

Ver ejercicios resueltos n^{os} 17 al 22.

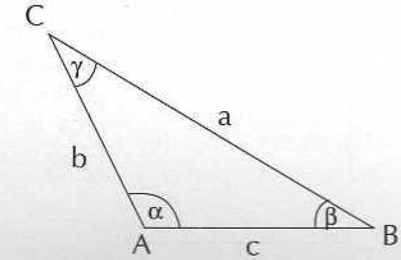
Resolución de triángulos no rectángulos 8.9

Se llama "resolver un triángulo" a determinar la medida de sus tres lados y de sus tres ángulos interiores. Los siguientes teoremas se verifican en todo tipo de triángulos.

8.9.1 Teorema del seno (o de los senos)

Sean α, β y γ los ángulos interiores de un triángulo ABC cualquiera y sean a, b y c los respectivos lados. Se cumple:

$$\frac{\text{sen}\,\alpha}{a} = \frac{\text{sen}\,\beta}{b} = \frac{\text{sen}\,\gamma}{c}$$



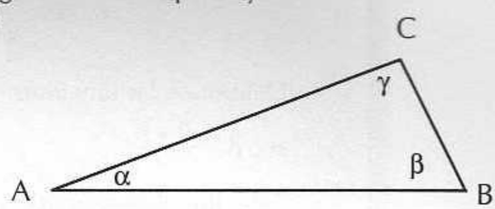
8.9.2 Teorema del coseno (o de los cosenos)

Sean α, β y γ los ángulos interiores de un triángulo ABC cualquiera y sean a, b y c los respectivos lados. Se cumple:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos\beta$$

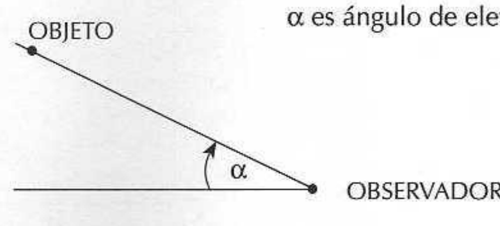
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$



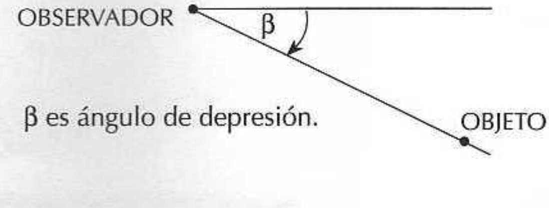
8.9.3 Ángulos de elevación y depresión

Se llama ángulo de elevación al ángulo formado por la horizontal y la recta que une al observador con el objeto cuando el objeto está sobre el observador.

α es ángulo de elevación



Se llama ángulo de depresión al ángulo formado por la horizontal y la recta que une al observador con el objeto cuando el objeto está bajo el observador.



β es ángulo de depresión.

Ver ejercicios resueltos 14 al 16, 23 y 24

1. Exprese en radianes la medida de los ángulos:

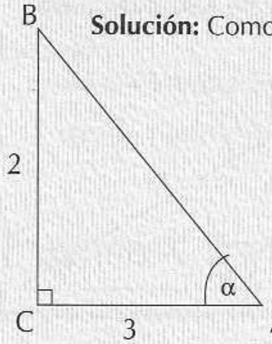
a) $120^\circ = 120^\circ\left(\dfrac{\pi}{180^\circ}\right)\text{rad} = 2\dfrac{\pi}{3}\text{ rad}$ b) $54^\circ = 54^\circ\left(\dfrac{\pi}{180^\circ}\right)\text{rad} = 3\dfrac{\pi}{10}\text{ rad}$

2. Exprese en grados la medida de los ángulos siguientes:

a) $\dfrac{4}{3}\pi = \dfrac{4}{3}\pi \cdot \left(\dfrac{180^\circ}{\pi}\right) = 240^\circ$ b) $11\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{11}{6}\pi \cdot \left(\dfrac{180^\circ}{\pi}\right) = 330^\circ$

3. Sea α un ángulo agudo y $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{2}{3}$.

Determinemos las demás funciones.



Solución: Como sabemos, $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$

Dibujamos un triángulo ABC y α es uno de sus ángulos agudos. Asignamos el valor de la tangente, como en la figura, y luego determinamos la hipotenusa, aplicando el Teorema de Pitágoras.

$$\overline{AB} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

Así tenemos:

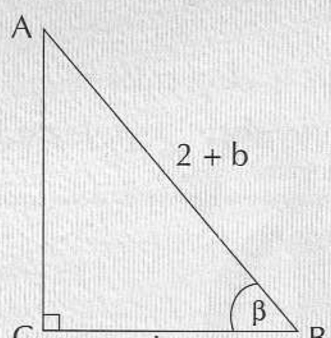
$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}} \qquad \csc \alpha = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} \qquad \sec \alpha = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3} \qquad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{2}$$

4. Determine las funciones trigonométricas del ángulo β sabiendo que $\sec \beta = \dfrac{2+b}{b}$

Solución: Sabemos que $\sec \beta = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cat. adyacente}}$



Aplicamos Teorema de Pitágoras para determinar cateto $\overline{AC}$

$$\overline{AC}^{\,2} + b^2 = (2+b)^2$$

$$\overline{AC}^{\,2} = 4 + 4b + b^2 - b^2$$

$$\overline{AC} = \sqrt{4+4b} = 2\sqrt{1+b}$$

Por lo tanto:

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{2\sqrt{1+b}}{2+b} \qquad \operatorname{cosec} \beta = \frac{2+b}{2\sqrt{1+b}}$$

$$\cos \beta = \frac{b}{2+b} \qquad \sec \beta = \frac{2+b}{b}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2\sqrt{1+b}}{b} \qquad \operatorname{ctg} \beta = \frac{b}{2\sqrt{1+b}}$$

5. Determine las funciones trigonométricas del ángulo α si sen $\alpha = \frac{4}{3}$

Solución: Como sen $\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$

Vemos que no es posible asignar dichos valores a los lados de un triángulo rectángulo, pues un cateto no puede ser mayor (ni igual) a la hipotenusa. Por lo tanto, no existe ningún ángulo cuyo seno sea $\frac{4}{3}$.

Desafío: Averigüe qué son funciones acotadas y entre qué valores están acotadas las funciones trigonométricas.

6. Demuestre que sen α • ctg α = cos α.

Analizamos el lado izquierdo de la igualdad y aplicamos las identidades que sean necesarias hasta obtener la expresión del lado derecho.

$$\text{sen}\,\alpha \cdot \text{ctg}\,\alpha = \cancel{\text{sen}\,\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\cancel{\text{sen}\,\alpha}}$$
$$= \cos\alpha$$

7. Demuestre que sen α (csc α – sen α) = $\cos^2 \alpha$

Procediendo como en el caso anterior, tenemos que:

$$\text{sen}\,\alpha\,(\csc\alpha - \text{sen}\,\alpha) = \text{sen}\,\alpha\left(\frac{1}{\text{sen}\,\alpha} - \text{sen}\,\alpha\right)$$
$$= \frac{\cancel{\text{sen}\,\alpha}}{\cancel{\text{sen}\,\alpha}} - \text{sen}^2\,\alpha$$
$$= 1 - \text{sen}^2\,\alpha$$
$$= \cos^2\alpha \qquad \text{(identidad 6 pág. 354)}$$

8. Demuestre que tg $\alpha = \frac{\text{tg}\,\alpha - 1}{1 - \text{ctg}\,\alpha}$

En este caso analizaremos el lado derecho de la igualdad (es más sencillo simplificar una expresión trigonométrica que amplificarla). Aplicaremos las identidades que sean necesarias hasta obtener la expresión del lado izquierdo.

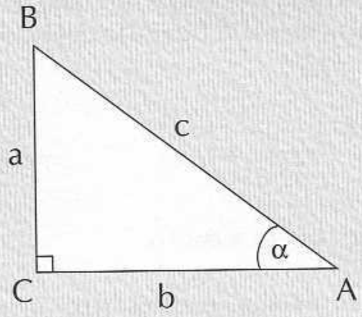
$$\frac{\text{tg}\,\alpha - 1}{1 - \text{ctg}\,\alpha} = \frac{\text{tg}\,\alpha - 1}{1 - \frac{1}{\text{tg}\,\alpha}}$$
$$= \frac{\text{tg}\,\alpha - 1}{\frac{\text{tg}\,\alpha - 1}{\text{tg}\,\alpha}}$$
$$= \cancel{\text{tg}\,\alpha - 1} \cdot \frac{\text{tg}\,\alpha}{\cancel{\text{tg}\,\alpha - 1}} = \text{tg}\,\alpha$$

9. Demuestre que $\cos^4 \beta + \operatorname{sen}^2 \beta = \cos^2 \beta + \operatorname{sen}^4 \beta$

Procediendo como en los casos anteriores, analizamos el primer miembro de la igualdad y aplicamos las identidades correspondientes:

$$\begin{aligned} \cos^4 \beta + \operatorname{sen}^2 \beta &= (\cos^2 \beta)^2 + \operatorname{sen}^2\beta \\ &= (1 - \operatorname{sen}^2\beta)^2 + \operatorname{sen}^2\beta \\ &= 1 - 2\operatorname{sen}^2\beta + \operatorname{sen}^4 \beta + \operatorname{sen}^2\beta \\ &= 1 - \operatorname{sen}^2\beta + \operatorname{sen}^4 \beta \\ &= \cos^2 \beta + \operatorname{sen}^4 \beta \end{aligned}$$

10. Demuestre que $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$



Consideremos el Δ rectángulo ABC y α uno de sus ángulos agudos.
Por Teorema de Pitágoras se cumple:

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad /:c^2$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

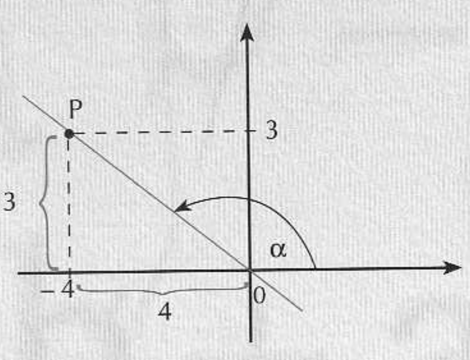
Aplicando las definiciones de razones trigonométricas, tenemos:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

11. Sea α un ángulo en posición estándar en un sistema de ejes coordenados, esto es, el lado inicial de α coincide con la parte positiva del eje x, el vértice del ángulo es el origen del sistema, y sea P(-4,3) el punto del lado terminal de él. Determine todas las funciones trigonométricas de α.

Solución: Primero determinemos la longitud del segmento $\overline{OP} = r$.

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2} \Rightarrow r = 5$$



y ahora aplicamos las definiciones de las funciones trigonométricas de α: $(x = -4;\ y = 3;\ r = 5)$

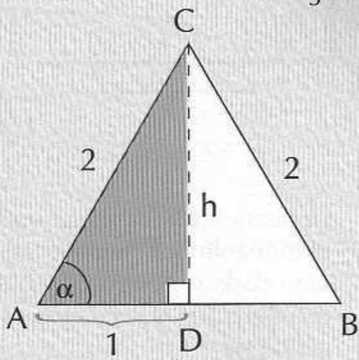
$$\text{sen}\ \alpha = \frac{y}{r} = \frac{3}{5} \qquad \text{cosec}\ \alpha = \frac{r}{y} = \frac{5}{3}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} = -\frac{4}{5} \qquad \sec \alpha = \frac{r}{x} = -\frac{5}{4}$$

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{y}{x} = -\frac{3}{4} \qquad \cot \alpha = \frac{x}{y} = -\frac{4}{3}$$

12. Encuentre las funciones trigonométricas para $\alpha = 60°$ (o $\alpha = \frac{\pi}{3}$)

Solución: Consideremos el Δ ABC equilátero de lado 2 y sea $\overline{CD}$ su altura. En Δ rectángulo ADC se tiene que $h^2 + 1 = 4$.



$h = \sqrt{3}$
y $\measuredangle$ DAC = 60°

Entonces:

$$\text{sen}\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{cosec}\ 60° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos 60° = \frac{1}{2} \qquad \sec 60° = 2$$

$$\text{tg}\ 60° = \sqrt{3} \qquad \cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

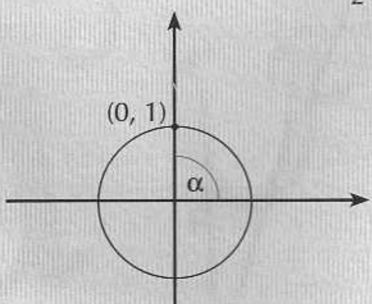
Desarrolle el mismo ejercicio pero para un triángulo equilátero de lado 3, 5, a.

13. Encuentre las funciones trigonométricas para $\alpha = 90°$ (o $\frac{\pi}{2}$)

Solución.

El punto (0,1) pertenece al lado terminal de α.

Así: $x = 0;\ y = 1;\ r = 1$

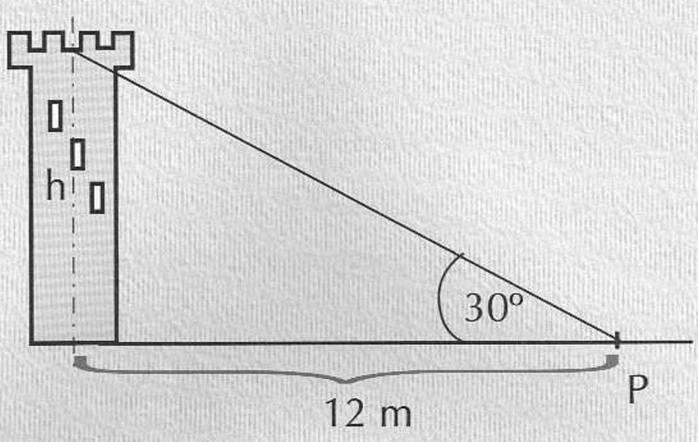


$$\text{sen}\ 90° = \frac{y}{r} = 1 \qquad \text{cosec}\ 90° = \frac{r}{y} = 1$$

$$\cos 90° = \frac{x}{r} = 0 \qquad \sec 90° = \frac{r}{x} = \text{indefinida}$$

$$\text{tg}\ 90° = \frac{y}{x} = \text{indefinida} \qquad \cot 90° = \frac{x}{y} = 0$$

14. Desde un punto P situado a nivel el suelo, el ángulo de elevación de la cima de una torre es de 30°. Si la distancia entre el punto P y la base de la torre es 12 metros, determine la altura de ésta.



La figura ilustra la situación planteada.
El triángulo determinado es rectángulo; un cateto es información dada y el otro cateto es la incógnita. Una función que relaciona los dos catetos es la tangente (la otra es la cotangente)

Así $\operatorname{tg} 30° = \frac{h}{12}$

Pero $\operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ entonces $\frac{h}{12} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

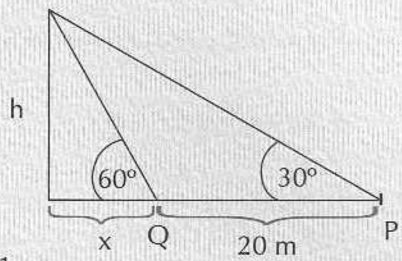
despejando nos queda: $h = \frac{12}{\sqrt{3}}$

y racionalizando : $h = 4\sqrt{3}$

Solución: la torre mide $4\sqrt{3}$ metros, aproximadamente 6,9 metros.

15. Desde un punto P situado a nivel del suelo se observa la punta de una chimenea bajo un ángulo de elevación de 30° y acercándose 20 metros desde otro punto Q el ángulo de elevación es de 60°. Determine la altura de la chimenea y la distancia desde ésta hasta el primer punto de observación (P).

La figura muestra la situación planteada.
Debemos determinar h y $d = x + 20$.



Tenemos $\operatorname{tg} 60° = \dfrac{h}{x}$

y $\operatorname{tg} 30° = \dfrac{h}{x+20}$

Como $\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$ y $\operatorname{tg} 30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ se tiene

(1) $\dfrac{h}{x} = \sqrt{3}$ y (2) $\dfrac{h}{x+20} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

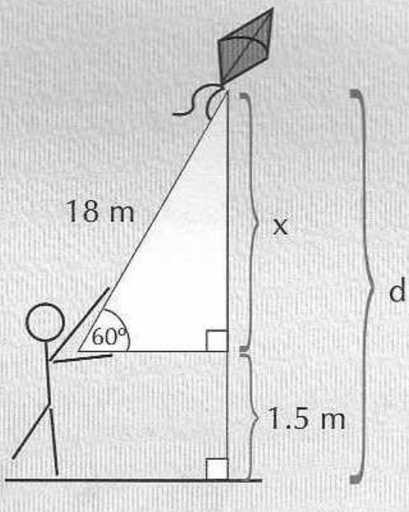
de (1) $h = x\sqrt{3}$ reemplazando en (2) $\dfrac{x\sqrt{3}}{x+20} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Así $3x = x + 20$
$2x = 20$
$x = 10$

Por lo tanto, $h = 10\sqrt{3}$

Solución. La chimenea mide $10\sqrt{3}$ metros (17,3m) y la distancia desde ella al primer punto de observación es 30 metros.

16. Un niño eleva un volantín con una cuerda tensa que forma un ángulo de elevación de 60° con la horizontal. ¿A qué altura se encuentra el volantín del suelo si la longitud de la cuerda es de 18 metros y el niño mide 1.50 metros (o el niño tiene la cuerda a 1.50 m del suelo)?



La figura representa la situación planteada. En este caso, una información es el largo de la cuerda, lo que corresponde a la hipotenusa del triángulo. Entonces aplicamos la función seno.

$\operatorname{sen} 60° = \dfrac{x}{18} \Rightarrow \dfrac{x}{18} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = 9\sqrt{3}$

La distancia desde el volantín al suelo es: $d = x + 1{,}5$

$d = 9\sqrt{3} + 1{,}5$

$d \approx 17$ m.

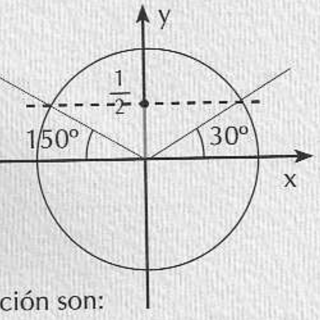
Desafío: Averigüe y construya los gráficos de las funciones trigonométricas.

17. Resuelva la ecuación: sen $x = \frac{1}{2}$

Solución: Sabemos que sen $30° = \frac{1}{2}$; por lo tanto, una solución particular es $x_1 = 30°$.

Pero además en la circunferencia geométrica (de radio 1) la función seno queda definida por el eje y, y también es positiva en el 2° cuadrante; por lo tanto, ahí hay otra solución particular.

Observando la circunferencia unitaria (de radio 1), vemos que:



$x_2 = 150°$ también es solución de la ecuación
Nótese que $150° = 180° - 30°$

Así, las soluciones particulares de la ecuación son:

$$x_1 = 30° \quad \left(\text{o } \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\text{y } x_2 = 150° \quad \left(\text{o } 5\frac{\pi}{6}\right)$$

y para obtener las soluciones generales, agregamos a cada solución particular, múltiplos del periodo.

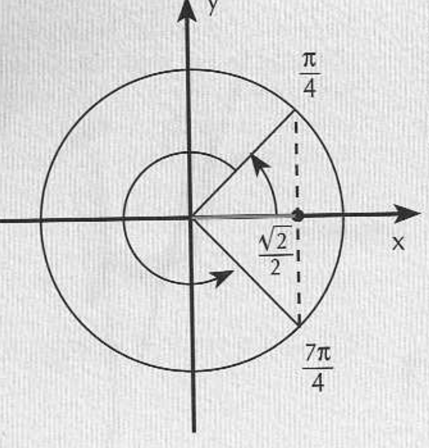
Y las soluciones generales son: $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$$x_2 = 5\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

18. Resolver la ecuación: $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
Solución: Sabemos que para

$x_1 = 45°$ (o $\frac{\pi}{4}$)

el coseno vale $\frac{\sqrt{2}}{2}$



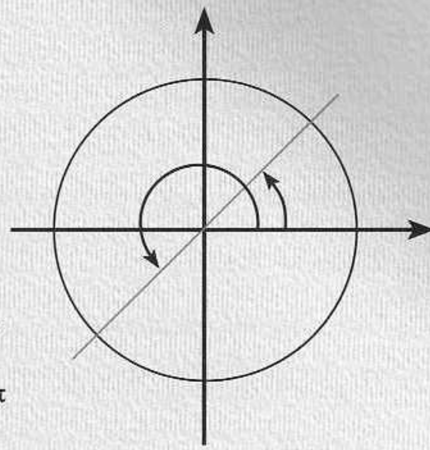
También sabemos que el coseno es positivo en el 1° y 4° cuadrante (pues queda determinado por la coordenada x), entonces también hay una solución en el 4° cuadrante, que es $x_2 = 315°$ ($360° - 45°$)

Y las soluciones generales son: $x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$$x_2 = 7\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

19. $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$

Determinamos la solución particular primera, o el "ángulo de referencia", este es $x = 60°$ (o $\frac{\pi}{3}$)



Y luego determinamos el otro cuadrante donde la tangente es positiva, este es el tercer cuadrante. En ese cuadrante está la 2ª solución particular y es

$x_1 = 60°$

$x_2 = 240° = 180° + 60°$

Las soluciones son: $x_1 = \frac{\pi}{3} + k\pi$

$x_2 = \frac{4\pi}{3} + k\pi$

20. $2\cos 2x = \sqrt{3}$

Nos queda $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Llamemos $2x = y$, tenemos $\cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

De acuerdo con los análisis anteriores, obtenemos:

$y_1 = 30°$ e $y_2 = 330°$

$y_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad y_2 = 11\frac{\pi}{6} + 2k\pi$

pero $y = 2x$, entonces las soluciones son:

$x_1 = \frac{\pi}{12} + k\pi \qquad y_2 = \frac{11\pi}{12} + k\pi$

21. $4\operatorname{sen}^2 x \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x = 0$

Factorizamos: $\operatorname{tg} x\,(4\operatorname{sen}^2 x - 1) = 0$

$\operatorname{tg} x\,(2\operatorname{sen} x - 1)\,(2\operatorname{sen} x + 1) = 0$

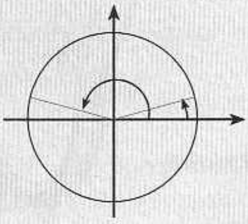
Un producto de 3 factores es cero si cualquiera de ellos es cero. Así:

$\operatorname{tg} x = 0 \quad (\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}) \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0°$

$x_2 = 180°$

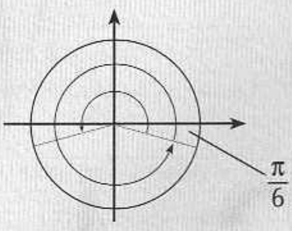
$2\operatorname{sen} x = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Rightarrow \quad x_3 = 30°$

(ángulo de referencia 30°) $\quad x_4 = 150°$



$2\operatorname{sen} x = -1 \rightarrow \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} \rightarrow x_5 = 210°$

(ángulo de referencia 30°) $\quad x_6 = 330°$



Solución: $\{k\pi,\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ 150° + 2k\pi;\ 210° + 2k\pi;\ 330° + 2k\pi\}$

22. $1 - 2\,\text{sen}^2 x = \cos x$

Aplicamos identidades para expresar todas las funciones en términos de coseno.

$1 - 2(1 - \cos^2 x) = \cos x$
$1 - 2 + 2\cos^2 x = \cos x$
$2\cos^2 x - 1 = \cos x$

(esta es una ecuación de 2° grado en cos x)

$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

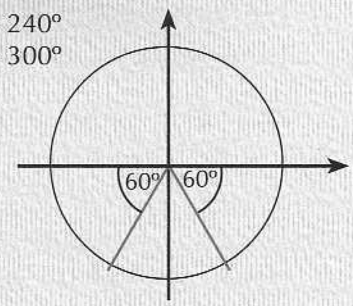
Factorizando, obtenemos:

$(2\cos x + 1)(\cos x - 1) = 0$

Entonces:

$2\cos x + 1 = 0 \rightarrow \cos x = -\dfrac{1}{2} \rightarrow$ $x_1 = 240°$
(ángulo de referencia 60°) $x_2 = 300°$

$\cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos x = 1 \rightarrow x = 0°$
(coordenada x)



Solución: $\{4\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ 5\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ 2k\pi\}$

23. Resolver el triángulo ABC, dados:
$\alpha = 36°$ $\beta = 64°$ $a = 12$

Según el teorema del seno.

$$\frac{a}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\,\beta} \Rightarrow \frac{12}{\text{sen}\,36°} = \frac{b}{\text{sen}\,64°}$$

Usando calculadora, obtenemos:

$$\frac{12}{0{,}5878} = \frac{b}{0{,}8988}$$

de donde $b = 18{,}35$

Ahora, como $\alpha = 36°$ y $\beta = 64°$, concluimos que $\gamma = 80°$ y aplicamos nuevamente teorema del seno:

$$\frac{a}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{c}{\text{sen}\,\gamma} \Rightarrow \frac{12}{\text{sen}\,36°} = \frac{c}{\text{sen}\,80°}$$

Usamos la calculadora para obtener:

$$\frac{12}{0{,}5878} = \frac{c}{0{,}9848}$$

y tenemos $c = 20{,}1$

24. Resolvamos el triángulo ABC, dados

$a = 18$, $b = 25$ y $c = 12$.

Por teorema del coseno:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$

de donde:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos \alpha = \frac{625 + 144 - 324}{600} = \frac{445}{600} = 0{,}7417$$

Aquí obtenemos $\alpha = 42°10'$

(en este caso, al resolver la ecuación resultante sólo debemos considerar la solución entre 0° y 180°)

Para determinar β podemos aplicar nuevamente el teorema del coseno:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos \beta = \frac{324 + 144 - 625}{432} = \frac{-157}{324} = -0{,}3634$$

De donde obtenemos $\beta = 111°20'$

Para determinar γ, calculamos el suplemento de $\alpha + \beta$.

$\gamma = 180° - (42°10' + 111°20')$

$\gamma = 26°30'$

Ejercicios

1. Demuestre la equivalencia entre ambas unidades de medición de ángulos.

2. Exprese en radianes la medida de los siguientes ángulos:

a) 45° **e)** 225°

b) 15° **f)** 210°

c) 150° **g)** −60°

d) 300° **h)** −135°

3. Exprese en grados la medida de los siguientes ángulos:

a) $\frac{3\pi}{4}$ **d)** $\frac{\pi}{16}$ **g)** 1

b) $\frac{2\pi}{9}$ **e)** $-\frac{\pi}{3}$ **h)** $\frac{1}{3}$

c) $7\frac{\pi}{5}$ **f)** $-5\frac{\pi}{6}$ **i)** -2

Ejercicios

4. Determine las funciones trigonométricas del ángulo α sabiendo que sen $\alpha = \frac{1}{3}$

5. Determine las funciones trigonométricas del ángulo α sabiendo que sec $\alpha = \frac{5}{3}$

6. Determine las funciones trigonométricas del ángulo β sabiendo que ctg $\beta = \sqrt{5}$

7. Determine las funciones trigonométricas del ángulo γ sabiendo que cosec $\gamma = \frac{b}{1+b}$

8. Determine entre qué valores están acotadas las funciones seno y coseno.

9. Determine entre qué valores están acotadas las funciones tangente y cotangente.

10. Determine entre qué valores están acotadas las funciones secante y cosecante.

11. Verifique las identidades trigonométricas a partir de las funciones dadas.

a) $(1 - \text{sen}^2\,\alpha)\,\sec^2\alpha = 1$

b) $\text{sen}\,\alpha \bullet \text{tg}\,\alpha = \sec\alpha - \cos\alpha$

c) $\cos\beta \bullet \cot\beta = \text{cosec}\,\beta - \text{sen}\,\beta$

d) $\dfrac{\sec^2\varphi}{\text{tg}^2\,\varphi} = \text{cosec}^2\,\varphi$

e) $\text{sen}\,\gamma\,(\text{cosec}\,\gamma - \text{sen}\,\gamma) = \cos^2\gamma$

f) $\dfrac{1+\sec^2\beta}{\text{tg}\,\beta + \text{sen}\,\beta} = \text{cosec}\,\beta$

g) $\text{tg}^2\,\alpha - \text{sen}^2\,\alpha = \text{tg}^2\,\alpha \bullet \text{sen}^2\,\alpha$

h) $\text{cosec}^2\,\alpha \bullet \text{tg}^2\,\alpha - 1 = \text{tg}^2\,\alpha$

i) $\text{sen}^2\,\alpha \bullet \sec^2\alpha = \sec^2\alpha - 1$

j) $(1 + \text{tg}^2\,\alpha)\,(1 - \text{sen}^2\,\alpha) = 1$

k) $\dfrac{1+\cos\mu}{\text{sen}\,\mu} + \dfrac{\text{sen}\,\mu}{1+\cos\mu} = 2\,\text{cosec}\,\mu$

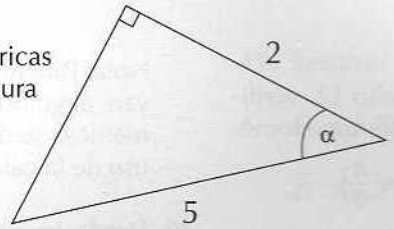
l) $\dfrac{1}{\text{cosec}\,\tau + \cot\tau} = \text{cosec}\,\tau - \cot\tau$

m) $\text{sen}^2\,\alpha - \cos^2\alpha = \text{sen}^4\,\alpha - \cos^4\alpha$

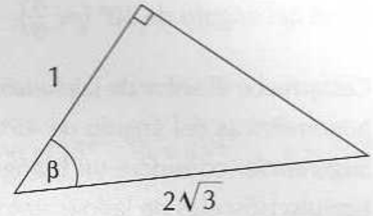
n) $\dfrac{1+\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha} + \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\cos\alpha + 1}{\text{sen}\,\alpha \bullet \cos\alpha}$

o) $\dfrac{1-\text{sen}\,\delta}{\cos\delta} = \dfrac{\cos\delta}{1+\text{sen}\,\delta}$

12. Determine las funciones trigonométricas del ángulo α de la figura

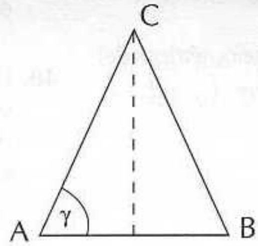


13. Determine las funciones trigonométricas del ángulo β de la figura.



14. Determine las funciones trigonométricas del ángulo γ de la figura.

$\triangle$ ABC isósceles con AB = 10, AC = BC = 12.
Sugerencia : trace la altura h_c.



15. Si sen $\alpha = 0{,}3$ determine las demás funciones trigonométricas de α.

16. Si cot $\beta = 1{,}2$ determine las demás funciones trigonométricas de β.

17. Si $\operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{b}$ determine el valor de: $\operatorname{sen}\gamma - \cos\gamma$.

18. Si $\sec\delta = \frac{1+a}{1-a}$ determine el valor de: $\cos^2\delta - 1$.

19. Verifique que: $2\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$

20. Verifique que: $\operatorname{sen}30^\circ\cdot\cos 60^\circ + \cos 30^\circ\cdot\operatorname{sen}60^\circ = \operatorname{tg}45^\circ$.

21. Determine las funciones trigonométricas del ángulo β sabiendo que β está en posición estándar y que el punto P(1,-2) pertenece al lado terminal de él.

22. Determine las funciones trigonométricas del ángulo β sabiendo que el punto Q(2,-5) pertenece al lado terminal de él.

23. Determine las funciones trigonométricas del ángulo β sabiendo que el lado terminal está en el 3er cuadrante y coincide con la recta de ecuación $x - 3y = 0$.

24. Determine las funciones trigonométricas del ángulo β sabiendo que el lado terminal está en el 4° cuadrante y es paralelo a la recta de ecuación $3x + 2y + 3 = 0$

25. Determine las funciones trigonométricas del ángulo β sabiendo que el lado terminal está en el 2° cuadrante y es perpendicular a la recta de ecuación $x - y = 3$

26. A partir del ejercicio resuelto 12, verifique el valor de las funciones trigonométricas del ángulo de 30° $\left(o\ \frac{\pi}{6}\right)$

27. Compruebe el valor de las funciones trigonométricas del ángulo de 45° $\left(o\ \frac{\pi}{4}\right)$. Sugerencia: considere un triángulo rectángulo isósceles de lado (catetos) 1.

28. Determine las funciones trigonométricas del ángulo de 180° (o π) y de 270° $\left(o\ 3\frac{\pi}{2}\right)$.

29. Evalúe: $\text{sen } 30° + \cos 30°$

30. Evalúe: $1 - \text{tg}^2\ 45°$

31. Evalúe: $\dfrac{1 + \text{tg } 60°}{1 - \text{tg } 60°}$

32. Verifique la igualdad:

$$\frac{\text{ctg } 30° - 1}{1 - \text{tg } 30°} = \text{ctg } 30°$$

33. Verifique $\dfrac{1 + \text{sen}^2\ 45°}{\cos^2 45°} = \sec^2 45° + \text{tg}^2\ 45°$

34. Verifique $\text{tg } \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\ \text{tg } \frac{\pi}{6}}{1 - \text{tg}^2 \frac{\pi}{6}}$

35. Verifique $\cos \dfrac{\pi}{3} = \cos^2 \dfrac{\pi}{6} - \text{sen}^2 \dfrac{\pi}{6}$

36. Un cohete es lanzado a nivel del suelo, en un ángulo constante de 60° hasta una distancia de 3.000 metros. Determine a qué altura se encuentra del suelo.

37. Sabiendo que el ángulo de elevación del sol, a cierta hora del día es de 30°, determine la longitud de la sombra que proyecta una persona que mide 1,6 m.

38. Desde un punto P situado a 12 metros de un edificio se observa un letrero luminoso que está en una ventana del edificio, bajo un ángulo de elevación de 30°, y desde el mismo punto P se observa el techo del edificio bajo un ángulo de elevación de 60°. Calcule la altura del edificio.

Nota: Para resolver ejercicios que incluyan ángulos cuyas funciones trigonométricas se desconozcan se debe hacer uso de la calculadora.

39. Desde lo alto de un edificio de 25m de altura se obtiene una medición de 35° para el ángulo de depresión de un quiosco situado en el mismo plano del edificio. ¿A qué distancia se encuentra el quiosco del edificio?

40. Desde lo alto de un acantilado se observan dos botes bajo ángulos de depresión de 20° y 30°, respectivamente. Determine la altura del acantilado sabiendo que la distancia entre los botes es 35m.

41. Un avión despega en un ángulo de 10° y vuela con una velocidad de $75\frac{m}{seg}$. ¿Cuánto tardará en alcanzar una altitud de 15.000 metros?

42. Una escalera de 8 metros se encuentra apoyada en una pared y forma con ésta un ángulo de 40°. Calcule la distancia entre la pared y el pie de la escalera.

Desafíos.

43. Grafica todas las funciones trigonométricas asignando algunos valores y aplicando las propiedades de periodicidad, paridad e imparidad y acotaciones.

44. Resolver las siguientes ecuaciones (Hallar todas las soluciones menores o iguales a 2π):

1) $\text{tg } x = 1$

2) $\text{sen } x = -\frac{1}{2}$

3) $\text{sen } x + 1 = 0$

4) $\cos x - 1 = 0$

5) $\text{tg}^2\ x - 1 = 0$

6) $\sec y = 2$

7) $2 \cos t + 1 = 0$

8) $2\ \text{sen}^2\ x - \text{sen } x = 0$

9) $2 \cos x = -\sqrt{3}$

10) $\sec^2 t - 2 = 0$

11) $2 \operatorname{sen} x = \csc x$

12) $4 \operatorname{sen} x = 3 \csc x$

13) $\sqrt{2} \cos x = \operatorname{ctg} x$

14) $\sec^2 x = 3 \operatorname{tg}^2 x - 1$

15) $\operatorname{sen} x = \cos x$

16) $\operatorname{tg} x = 3 \operatorname{ctg} x$

17) $\operatorname{tg}^2 t + \operatorname{tg} t = 0$

18) $\operatorname{sen}^2 t + \operatorname{sen} t \cos t = 0$

19) $3 - \operatorname{tg}^2 y = 0$

20) $2 \cos^2 x + \cos x = 0$

21) $\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 6 = 0$
(indicación: analice soluciones)

22) $\cos x + 2 \sec x + 3 = 0$

23) $\operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x + 1 = 0$

24) $2 \operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x + 1 = 0$

25) $2 \cos^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0$

26) $\cos 3x = 1$

27) $2 \operatorname{ctg}^2 x + \csc^2 x - 2 = 0$

28) $2 \cos^2 t + 3 \cos t + 1 = 0$

29) $1 - \operatorname{sen} t = \sqrt{3} \cos t$
(indicación: eleve al cuadrado y analice soluciones)

30) $4 \operatorname{sen}^2 u - 1 = 0$

31) $\operatorname{sen} x + \cos x = 1$
(indicación: eleve al cuadrado y analice situaciones)

32) $3 \operatorname{tg}^2 x - \sec^2 x - 5 = 0$

45. Resolver los triángulos ABC, dados:

1) $a = 30$	$b = 35$	$\beta = 35°$
2) $a = 25$	$c = 94$	$\alpha = 57°$
3) $a = 64$	$\alpha = 28°$	$\beta = 34°$
4) $\alpha = 15°$	$\beta = 55°$	$c = 104$
5) $b = 58$	$\beta = 58°$	$\gamma = 18°$
6) $a = 100$	$b = 100$	$c = 40$
7) $a = 70$	$b = 15$	$\gamma = 60°$
8) $b = 10$	$c = 20$	$\alpha = 40°$
9) $a = 14$ (analizar)	$b = 28$	$c = 50$

46. Una pequeña embarcación debe dirigirse desde una isla a un puerto en el continente, que se encuentra a 240 km de la isla. Debido a la fuerte corriente, después de navegar un tiempo, la embarcación se encuentra a 140 km de la isla y a 35° dirección N.E. Determine a qué distancia aproximada se encuentra del puerto y qué dirección debe tomar para corregir el curso.

47. Para llegar a casa Juanito debe cruzar un río de 30 m de ancho; él se encuentra justo frente a su casa, pero en la orilla opuesta. La corriente lo desvía 28° río arriba. ¿A qué distancia se encontrará de su casa cuando logre atravesar el río?

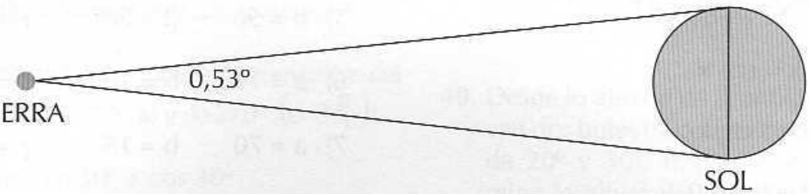
48. Un avión vuela 250 km desde un punto A en dirección 70° y luego 120 km en dirección 220°. ¿A qué distancia aproximada se encontrará del punto A?

49. Dos vehículos salen de una ciudad al mismo tiempo y circulan en carreteras rectas que forman entre sí un ángulo de 70°. Si viajan a 90 km/h y 110 km/h respectivamente, ¿a qué distancia se encontrarán después de 40 minutos?

Ejercicios

50. Un bote pesquero utiliza un equipo de ondas sonoras para detectar un banco de peces que se encuentra a 3 km de la embarcación y que se mueve a razón de 12 km/h en dirección 35° N.E. Si el bote avanza a razón de 20 km/h, determine cuánto tiempo tardará en alcanzar el banco de peces.

51. Al observar el sol desde la tierra se ve bajo un ángulo de 32′ (minutos, es decir, $\frac{32}{60}$ grados)



Si la distancia entre la tierra y el sol es aproximadamente 150.000.000 km, calcule el diámetro del sol.

Soluciones

2.

a) $\frac{\pi}{4}$ e) $5\frac{\pi}{4}$

b) $\frac{\pi}{12}$ f) $7\frac{\pi}{6}$

c) $5\frac{\pi}{6}$ g) $-\frac{\pi}{3}$

d) $5\frac{\pi}{3}$ h) $-3\frac{\pi}{4}$

3.

a) 135°   d) 11,25°   g) 57,32°

b) 40°   e) –60°   h) 19,1°

c) 252°   f) –150°   i) 114,6°

4.

$\text{sen } \alpha = \frac{1}{3}$ $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ $\text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$\csc \alpha = 3$ $\sec \alpha = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ $\text{ctg } \alpha = 2\sqrt{2}$

5.

$\text{sen } \alpha = \frac{4}{5}$ $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ $\text{tg } \alpha = \frac{3}{4}$

$\csc \alpha = \frac{5}{4}$ $\sec \alpha = \frac{5}{3}$ $\text{ctg } \alpha = \frac{4}{3}$

6. $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ $\cos\beta = \sqrt{\dfrac{5}{6}}$ $\text{tg}\,\beta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\csc\beta = \sqrt{6}$ $\sec\beta = \sqrt{\dfrac{6}{5}}$ $\text{ctg}\,\beta = \sqrt{5}$

7. No existe un ángulo agudo en tal triángulo (lo que no existe es ese triángulo rectángulo)

8. $-1 \leq \text{sen}\,\alpha \leq 1$

$-1 \leq \cos\alpha \leq 1$

9. La tangente y la cotangente varían entre menos infinito e infinito positivo. No tienen restricciones.

10. $\sec\alpha \leq -1$ o $\sec\alpha \geq 1$

$\csc\alpha \leq -1$ o $\sec\alpha \geq 1$

11. Las demostraciones debe hacerlas el estudiante. Ver ejercicios resueltos nº 6 al 10.

12. $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{\sqrt{21}}{5}$ $\cos\alpha = \dfrac{2}{5}$ $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\sqrt{21}}{5}$

$\csc\alpha = \dfrac{5}{\sqrt{21}}$ $\sec\alpha = \dfrac{5}{2}$ $\text{ctg}\,\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{21}}$

13. $\text{sen}\,\beta = \dfrac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}$ $\cos\beta = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ $\text{tg}\,\beta = \sqrt{11}$

$\csc\beta = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$ $\sec\beta = 2\sqrt{3}$ $\text{ctg}\,\beta = \dfrac{1}{\sqrt{11}}$

14. $\text{sen}\,\gamma = \dfrac{\sqrt{119}}{12}$ $\cos\gamma = \dfrac{5}{12}$ $\text{tg}\,\gamma = \dfrac{\sqrt{119}}{5}$

15. $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{3}{10}$ $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{91}}{10}$ $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{91}}$

$\csc\alpha = \dfrac{10}{3}$ $\sec\alpha = \dfrac{10}{\sqrt{91}}$ $\text{ctg}\,\alpha = \dfrac{\sqrt{91}}{3}$

16. $\text{sen}\,\beta = \dfrac{5}{\sqrt{61}}$ $\cos\beta = \dfrac{6}{\sqrt{61}}$ $\text{tg}\,\beta = \dfrac{5}{6}$

$\csc\beta = \dfrac{\sqrt{61}}{5}$ $\sec\beta = \dfrac{\sqrt{61}}{6}$ $\text{ctg}\,\beta = \dfrac{6}{5}$

17. $\dfrac{1-b}{\sqrt{1+b^2}}$

18. $-\dfrac{4a}{(1+a)^2}$

19. $2 \bullet \dfrac{1}{\sqrt{2}} \bullet \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 1$

20. $\dfrac{1}{2} \bullet \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \bullet \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 1$

21. $\operatorname{sen} \beta = -\dfrac{2}{5}$ $\cos \beta = \dfrac{1}{5}$ $\operatorname{tg} \beta = -2$

$\csc \beta = -\dfrac{5}{2}$ $\sec \beta = 5$ $\operatorname{ctg} \beta = -\dfrac{1}{2}$

22. $\operatorname{sen} \beta = -\dfrac{5}{\sqrt{29}}$ $\cos \beta = \dfrac{2}{\sqrt{29}}$ $\operatorname{tg} \beta = -\dfrac{5}{2}$

$\csc \beta = -\dfrac{\sqrt{29}}{5}$ $\sec \beta = \dfrac{\sqrt{29}}{2}$ $\operatorname{ctg} \beta = -\dfrac{2}{5}$

23. $\operatorname{sen} \beta = \dfrac{-1}{\sqrt{10}}$ $\cos \beta = \dfrac{-3}{\sqrt{10}}$ $\operatorname{tg} \beta = \dfrac{1}{3}$

$\csc \beta = -\sqrt{10}$ $\sec \beta = -\dfrac{\sqrt{10}}{3}$ $\operatorname{ctg} \beta = 3$

24. $\operatorname{sen} \beta = \dfrac{-3}{\sqrt{13}}$ $\cos \beta = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$ $\operatorname{tg} \beta = -\dfrac{3}{2}$

$\csc \beta = -\dfrac{\sqrt{13}}{3}$ $\sec \beta = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$ $\operatorname{ctg} \beta = -\dfrac{2}{3}$

25. $\operatorname{sen} \beta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\cos \beta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\operatorname{tg} \beta = -1$

$\csc \beta = \sqrt{2}$ $\sec \beta = -\sqrt{2}$ $\operatorname{ctg} \beta = -1$

26. Ver ejercicio resuelto nº 12 y tabla de la página 343.
27. Ídem.
28. Ídem.

29. $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

30. 0

31. $-(2+\sqrt{3})$

32. $$\frac{\sqrt{3}-1}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3} = \operatorname{ctg} 30^\circ$$

33. Primer miembro: $\dfrac{1+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 3$ y Segundo miembro: $2 + 1 = 3$

34. $$\sqrt{3} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{2}{3}}$$

$$\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

35. $$\frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

36. 2.598 m es la altura a la que se encuentra el cohete del suelo.

37. La persona proyecta una sombra de 92,3 cm.

38. El edificio mide 20,78 m. (hay información de más en el enunciado).

39. 17,5 m

40. 34,47 m

41. 19 min 11,8 seg.

42. 5,14 m

44. 1) 45°, 225° 2) 210°, 330° 3) $\frac{3\pi}{2}$ 4) 2π 5) $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

6) $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ 7) $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ 8) $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ 9) 150°, 210°

10) $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ 11) 45°, 135°, 225°, 315° 12) $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

13) $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ 14) 35,26° ; 144,74° ; 215,26° ; 324,74°

15) $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ 16) 60°, 120°, 240°, 300° 17) $0, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{7\pi}{4}$

18) $0, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{7\pi}{4}$ 19) $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ 20) $\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}$

21) No tiene 22) π 23) $\frac{3\pi}{2}$ 24) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$

25) $\frac{3\pi}{2}$ 26) 0°, 120°, 240°, 360° 27) $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

28) $\frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}$ 29) 90°, 330° 30) 30°, 150°, 210°, 330°

31) 0°, 90° 32) 50,77° ; 129,23° ; 230,77° ; 309,23°

45. 1) a = 29,45° g = 115,55° c = 55,05

2) no existe un triángulo con esas medidas 3) g = 118° b = 76,23 c = 120

4) g = 110° a = 28,64 b = 90,66 5) α = 104° a = 66,36 c = 21,13

6) $\alpha = \beta$ = 78,465° ; γ = 23,07° 7) α = 71,74° β = 48,26° c = 63,84

8) No existe un triángulo con esas medidas

9) No existe un triángulo con esas medidas ($28 + 14 < 50$)

46. 149 km 12,5° SE 47. 34 m

48. 158 km 49. 13,35 km

50. Si el barco avanza en dirección 33,6° NE alcanza al banco de peces en $\frac{1}{4}$ de hora.

Estudie usted otras posibilidades. ¿Se podrá demorar más de $\frac{1}{2}$ hora? ¿Cuál será el ángulo necesario para alcanzar a los peces en el mínimo de tiempo?

51. 1.387.546,5 km.

Prueba de selección múltiple

1. Exprese en radianes 270°

A. $\frac{2\pi}{2}$

B. $\frac{3\pi}{2}$

C. $\frac{3\pi}{4}$

D. $\frac{4\pi}{3}$

E. $\frac{3}{2}$

2. Exprese en grados $\frac{7\pi}{6}$ radianes

A. 210°

B. 21°

C. 280°

D. 420°

E. 350°

3. Si sen $\alpha = \frac{2}{5}$ entonces tg α =

A. $\frac{2}{21}$

B. $\frac{2}{\sqrt{21}}$

C. $\frac{\sqrt{21}}{2}$

D. $\frac{5}{\sqrt{21}}$

E. $\frac{\sqrt{21}}{5}$

4. $\text{sen}^2\, 60° + \cos^2 30° =$

A. $\frac{3}{2}$

B. $\frac{3}{4}$

C. 1

D. 3

E. $\frac{1+\sqrt{3}}{4}$

5. Si sec $\alpha = \sqrt{3}$, ¿cuál es el valor de $\cos^2 \alpha$?

A. 3

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{9}$

D. 9

E. otro

6. Si tg α = 0,7 ¿cuánto vale ctg α?

A. 0,3

B. –0,7

C. $\frac{7}{10}$

D. $\frac{10}{7}$

E. otro

7. Si 1 – tg β = 2, ¿cuánto vale β?

A. 90° y 270°

B. 0° y 180°

C. 45° y 225°

D. 135° y 315°

E. 60° y 30°

8. Si cosec α = 1, ¿cuánto vale α?

A. 0°

B. 90°

C. 180°

D. 270°

E. 45°

9. Si $\text{tg}^2\, \alpha = \sqrt{2} - 1$, ¿cuánto vale $\sec^2 \alpha$?

A. $1 + \sqrt{2}$

B. $1 - \sqrt{2}$

C. 2

D. $\sqrt{2}$

E. otro

10. Si sen α = cos α entonces el valor de α es:

A. 0° y 180°

B. 45° y 225°

C. 135° y 315°

D. todo $\alpha \in \mathbb{R}$

E. ninguno

11. Si cos x = $\frac{1}{2}$ entonces el valor de x es:

A. $\frac{\pi}{3}$

B. $\frac{\pi}{6}$

C. $\frac{\pi}{4}$

D. $\frac{3\pi}{4}$

E. otro

12. Si ctg x = –1, entonces ¿cuál es el valor de x?

A. $\frac{\pi}{4}$

B. $\frac{\pi}{2}$

C. $\frac{3\pi}{4}$

D. $\frac{5\pi}{4}$

E. $\frac{5\pi}{3}$

13. ¿Cuál de las afirmaciones siguientes es verdadera?

A. sen $\alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$

B. tg α - cos α = sec α

C. $1 + \sec^2 \alpha = \text{tg}^2\, \alpha$

D. $\text{sen}^2\, 90° + \cos^2 90° = \text{tg}^2\, 45°$

E. sec α - cosec α = 1

14. ¿Cuál de las afirmaciones siguientes es falsa?

A. $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \sec^2\alpha - \text{tg}^2\alpha$

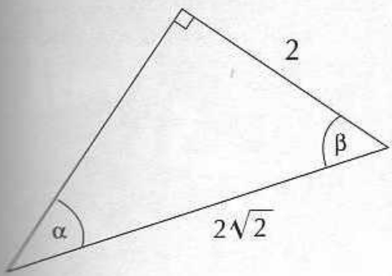
B. cos β • sec β = 1

C. tg 30° = ctg 60°

D. $\text{sen}^2\, 45° = \frac{1}{2}$

E. sec 45° + cosec 45° = 2

15. A partir de la figura, ¿qué relación es falsa?



A. $\alpha = \beta$

B. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\text{tg } \beta = 1$

D. $\text{cosec } \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

E. $\text{tg } \alpha = \cot \alpha$

16. Al expresar en radianes, un ángulo de 15° es equivalente a:

A. $\frac{\pi}{8}$

B. $\frac{\pi}{10}$

C. $\frac{\pi}{12}$

D. $\frac{\pi}{15}$

E. $\frac{\pi}{30}$

17. Al expresar en grados un ángulo de $\frac{5\pi}{12}$ es equivalente a:

A. 300°

B. 150°

C. 75°

D. 30°

E. 15°

18. La expresión $\text{cosec}^2 \alpha - 1$ es equivalente a:

A. $1 + \text{ctg}^2 \alpha$
B. $\text{ctg}^2 \alpha - 1$
C. $1 - \text{tg}^2 \alpha$
D. $\text{ctg}^2 \alpha$
E. $\text{tg}^2 \alpha$

19. La expresión $2 \cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha$ es equivalente a:

A. $2 - \text{sen}^2 \alpha$
B. $2 + \text{sen}^2 \alpha$
C. 2
D. $2 - \cos^2 \alpha$
E. $2 + \cos^2 \alpha$

20. La expresión $\text{sen}^2 \alpha \bullet \sec^2 \alpha$ es equivalente a:

A. $\text{tg } \alpha$

B. $\text{tg}^2 \alpha$

C. $\text{ctg } \alpha$

D. $\text{ctg}^2 \alpha$

e) 1

21. Si $\text{sen } \alpha = \frac{a}{a+1}$, entonces $\cos \alpha =$

A. $\frac{a+1}{a}$

B. $\frac{2a+1}{a+1}$

C. $\frac{a+1}{2a+1}$

D. $\frac{\sqrt{2a+1}}{a+1}$

E. $\frac{\sqrt{2a+1}}{a}$

22. Si $\text{ctg } \beta = 2$, entonces $\text{sen } \beta =$

A. $\frac{1}{\sqrt{5}}$

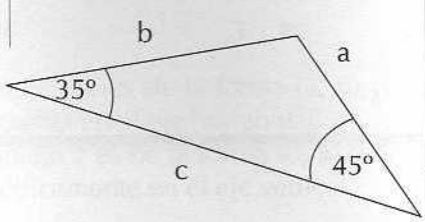
B. $\frac{2}{\sqrt{5}}$

C. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

D. $\frac{2}{\sqrt{3}}$

E. $\frac{1}{2}$

23. A partir de la figura, ¿qué relación es correcta?



A. $\frac{a}{\text{sen } 45°} = \frac{b}{\text{sen } 35°}$

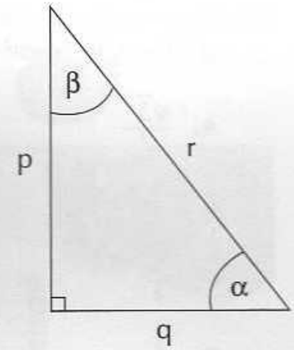
B. $\frac{\text{sen } 100°}{c} = \frac{\text{sen } 45°}{b}$

C. $\frac{\text{sen } 100°}{c} = \frac{\text{sen } 45°}{a}$

D. $\frac{\text{sen } 35°}{\text{sen } 100°} = \frac{c}{a}$

E. $\frac{a}{\text{sen } 35°} = \frac{\text{sen } 100°}{c}$

24. En $\triangle$ ABC de la figura, $\text{cosec } \beta =$



A. $\frac{q}{r}$

B. $\frac{p}{r}$

C. $\frac{r}{p}$

D. $\frac{r}{q}$

E. $\frac{p}{q}$

25. El valor de

$\text{sen } \frac{\pi}{2} + \text{sen } 3\frac{\pi}{2}$ es:

A. 1

B. 2

C. 0

D. –1

E. no está definido

Prueba de selección múltiple

26. ¿Cuál es el valor de sen 30° • cos 30° • ctg 30°

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{4}$

C. 2

D. 4

E. $\frac{3}{4}$

27. ¿Cuál es el valor de tg 60° • ctg 60° • sen^2 60°?

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{9}{2}$

C. $\frac{9}{4}$

D. $\frac{3}{4}$

E. $\frac{3}{2}$

28. Si sec β = 1,5 ¿cuál es el valor de sen β?

A. $\frac{3}{\sqrt{13}}$

B. $\frac{2}{\sqrt{13}}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

e) $\frac{2}{3}$

29. ¿Cuál es el valor de

$\text{tg}\,\frac{\pi}{4} + \text{tg}\,\frac{\pi}{2}$?

A. 1

B. $\frac{1}{2}$

C. 0

D. $\frac{1}{4}$

E. no está determinado

30. ¿Cuál(es) de la(s) siguiente(s) relaciones es o son verdaderas?

I) $\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6}$

II) $\text{tg}\,\frac{\pi}{4} - \text{ctg}\,3\frac{\pi}{4} = \csc\frac{\pi}{6}$

III) $\text{sen}^2\,\frac{\pi}{4} \bullet \cos^2\frac{\pi}{4} = 1$

A. Sólo I

B. Sólo II

C. Sólo III

D. Sólo I y II

E. I, II y III

Soluciones

1.	B	11.	B	21.	D
2.	A	12.	C	22.	A
3.	B	13.	D	23.	B
4.	A	14.	E	24.	D
5.	B	15.	D	25.	C
6.	D	16.	C	26.	E
7.	D	17.	C	27.	D
8.	B	18.	D	28.	C
9.	D	19.	A	29.	E
10.	B	20.	E	30.	A

CAPÍTULO 9 Números complejos

Definiciones y propiedades 9.1

Definición: Un número complejo es un par ordenado de números reales.
El conjunto de los números complejos lo simbolizamos por $\mathbb{C}$ y cada número complejo por la letra z.

$$\mathbb{C} = \{z = (a, b) / a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}.$$

Si $z = (a, b) \in \mathbb{C}$, "a" se llama parte real del complejo z y se denota por Re(z), y "b" se llama parte imaginaria del complejo z y se denota por Im(z).

9.1.1 Igualdad

Dados dos complejos $z_1 = (a, b)$ y $z_2 = (c, d)$.

$$z_1 = z_2 \text{ si y sólo si } \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

9.1.2 Representación geométrica

Geométricamente el conjunto de los números complejos representa el plano cartesiano. Existe una relación biunívoca entre los elementos del conjunto $\mathbb{C}$ y el conjunto de puntos del plano.

Sea $z = (a, b) \in \mathbb{C}$

- Si b = 0, entonces el complejo z es de la forma (a, 0) y se asimila al número real a. Geométricamente se representa en el eje horizontal.
- Si a = 0, entonces el complejo z es de la forma (0, b) y decimos que es un imaginario puro. Se representa geométricamente en el eje vertical.

9.1.3 Forma canónica de un complejo

El complejo $z = (a, b)$ se puede escribir en su forma canónica como $z = a + bi$, donde i es la unidad imaginaria. $i = \sqrt{-1}$ se cumple $i^2 = -1$.

9.1.4 Operaciones con números complejos

- **SUMA.**
  Sean
  $z_1 = (a, b) \qquad z_2 = (c, d)$
  $z_1 + z_2 = (a, b) + (c, d) = (a + c,\ b + d)$
  Sean
  $z_1 = a + bi \qquad z_2 = c + di$
  $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)\, i$

- **PRODUCTO.**
  Sean
  $z_1 = (a, b) \qquad z_2 = (c, d)$
  $z_1 \cdot z_2 = (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd,\ ad + bc)$
  Sean
  $z_1 = a + bi \qquad z_2 = c + di$
  $z_1 \cdot z_2 = (a + bi)\ (c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$

Observación: Para efectuar las operaciones con números complejos escritos en su forma canónica se procede como en el conjunto de los números reales considerando que $i^2 = -1$.

9.1.5 Estructura del conjunto $(\mathbb{C}, +, \bullet)$

El conjunto de los números complejos con las operaciones de suma y producto tiene estructura de Campo.

- **PROPIEDADES DE LA SUMA.**
  Sean $z_1, z_2, z_3, \in \mathbb{C}$.

  1. La suma es cerrada en $\mathbb{C}$

  $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$.

  2. La suma es asociativa en $\mathbb{C}$

  $\forall z_1, z_2$ y $z_3 \in \mathbb{C}, \quad (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

  3. La suma es conmutativa en $\mathbb{C}$

  $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

  4. Existe un elemento neutro para la suma en $\mathbb{C}$

  $\forall z \in \mathbb{C}, \exists!\ w \in \mathbb{C}$ tal que $z + w = z$.

5. Existe un elemento inverso para la suma en $\mathbb{C}$
$\forall\, z \in \mathbb{C}, \exists\ z` \in \mathbb{C}$ tal que $z + z` = w$ (w neutro aditivo).

Nota: El neutro aditivo es el complejo (0, 0) o $0 + 0i = 0$
El inverso aditivo de (a, b) es (– a, – b). Escrito en forma canónica, el inverso aditivo de $a + bi$ es $-a - bi$.
El inverso aditivo de z se denota por – z.

- **PROPIEDADES DEL PRODUCTO.**

Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

1. El producto es cerrado en $\mathbb{C}$
   $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{C}$.
2. El producto es asociativo en $\mathbb{C}$
   $\forall z_1, z_2$ y $z_3 \in \mathbb{C}, (z_1 \cdot z_2)\ z_3 = z_1\ (z_2 \cdot z_3)$.
3. El producto es conmutativo en $\mathbb{C}$
   $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \qquad z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
4. Existe un elemento neutro para el producto en $\mathbb{C}$
   $\forall z \in \mathbb{C}, \exists!\ w \in \mathbb{C}$ tal que $z \cdot w = z$.
5. Existe un elemento inverso para el producto en $\mathbb{C}$
   $\forall z \in \mathbb{C}, \exists\ z' \in \mathbb{C}$ tal que $z \cdot z' = w$ (neutro multiplicativo).

Nota: El neutro multiplicativo es el complejo (1, 0) o $1 + 0i = 1$.

El inverso multiplicativo de (a, b) es $\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$

Escrito en forma canónica, el inverso multiplicativo de $a + bi$ es $\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\ i$

El inverso multiplicativo de z se denota por z^{-1}.

El elemento (0, 0) no tiene inverso multiplicativo.

- **DISTRIBUTIVIDAD DEL PRODUCTO SOBRE LA SUMA**

Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

$\forall z_1, z_2$ y $z_3 \in \mathbb{C}$: $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$

Observación: Sean z y w dos complejos, definimos:

Resta: $z - w = z + (-w)$

División: $\frac{z}{w} = z \cdot w^{-1}$

9.1.6 Potencia de i

Las potencias de i son cíclicas y cada cuatro vuelven a repetir su valor.

$i = i$
$i^2 = -1$
$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$
$i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot -1 = 1$
$i^5 = i^4 \cdot i = i \qquad (i^5 = i)$

$i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i \quad = i^2 \quad = -1 \qquad (i^6 = i^2)$

$i^7 = i^6 \cdot i \;= -1 \cdot i \;= -i \qquad (i^7 = i^3)$

$i^8 = i^7 \cdot i \;= -i \cdot i \;= -i^2 \;= 1 \qquad (i^8 = i^4)$

Ejercicios resueltos

1. Dados los complejos $z_1 = 2 + 3i$, $\quad z_2 = -5 + i$
$z_3 = 2i$ y $z_4 = -5$.
Encontrar el valor de:

a) $z_1 + z_2 - z_3$ $\qquad$ **b)** $z_2\,(z_3 + z_4)$

c) $\dfrac{1}{z_2} + \dfrac{1}{z_3}$ $\qquad$ **d)** $\dfrac{z_1 + z_2}{2(z_3 - z_4)}$

Solución:

a) $z_1 + z_2 - z_3 = (2 + 3i) + (-5 + i) - (2i)$
$= 2 + 3i - 5 + i - 2i = -3 + 2i$

b) $z_2\,(z_3 + z_4) = (-5 + i)\;[(2i) + (-5)] = (-5 + i)\,(-5 + 2i)$
$= 25 - 10i - 5i + 2i^2 \; (i^2 = -1)$
$= 25 - 10i - 5i - 2$
$= 23 - 15i$

c) $\dfrac{1}{z_2} + \dfrac{1}{z_3} = \dfrac{1}{-5 + i} + \dfrac{1}{2i}$

Para dividir por a + bi se amplifica la fracción por a – bi.

$$= \frac{-5 - i}{(-5 + i)\,(-5 - i)} + \frac{-2i}{(2i)\,(-2i)}$$

$$= \frac{-5 - i}{25 - i^2} + \frac{-2i}{-4i_2}$$

$$= \frac{-5 - i}{26} + \frac{-2i}{4} + \frac{-10 - 2i - 26i}{52}$$

$$= -\frac{10}{52} - \frac{28}{52}\,i = -\frac{5}{26} - \frac{7}{23}\,i$$

d) $$\frac{z_1 + z_2}{2(z_3 - z_4)} = \frac{(2 + 3i) + (-5 + i)}{2\,((2i) - (-5))} = \frac{-3 + 4i}{10 + 4i} =$$

$$= \frac{(-3 + 4i)\,(10 \cdot 4i)}{(10 + 4i)\,(10 - 4i)} = \frac{-30 + 12i + 40i - 16i^2}{100 - 16i^2}$$

$$= \frac{-14 + 52i}{116} = \frac{7}{58} = \frac{13}{29}\,i$$

2. Dados los complejos $z_1 = 5 + \dfrac{1}{2}\,i$, $\quad z_2 = -3 - \dfrac{3}{4}\,i$,

$z_3 = -i \quad$ y $\quad z_4 = 1$, encontrar:

a) $\mathrm{Re}\,(z_1 - z_3)$ $\qquad$ **b)** $\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{z_2} + z_3\right)$

c) $\text{Re}\left(\dfrac{z_4}{z_1}\right)$ **d)** $2\ \text{Im}\left(\dfrac{z_3}{z_4}\right)$

Solución:

a) $\text{Re}\,(z_1 - z_3) = \text{Re}\left((5 + \frac{1}{2}\,i) - (-\,i)\right) = \text{Re}\left(5 + \frac{3}{2}\,i\right) = 5$

b)
$$\text{Im}\left(\frac{1}{z_2} + z_3\right) = \text{Im}\left[\frac{1}{-3 - \frac{3}{4}\,i} + (-i)\right]$$
$$= \text{Im}\left[\frac{-3 + \frac{3}{4}\,i}{\left(-3 - \frac{3}{4}\,i\right)\left(-3 + \frac{3}{4}\,i\right)} - i\right]$$
$$= \text{Im}\left[\frac{-3 + \frac{3}{4}\,i}{9 - \frac{9}{16}\,i^2} - i\right] = \text{Im}\left[\frac{-3}{\frac{153}{16}} + \frac{\frac{3}{4}}{\frac{153}{16}}\,i - i\right]$$
$$= \text{Im}\left(-\frac{16}{51} + \frac{4}{51}\,i - i\right)$$
$$= \text{Im}\left(-\frac{16}{51} - \frac{47}{51}\,i\right) = -\frac{47}{51}$$

c)
$$\text{Re}\left(\frac{z_4}{z_1}\right) = \text{Re}\left[\frac{1}{5 + \frac{1}{2}\,i}\right] = \text{Re}\left[\frac{5 - \frac{1}{2}\,i}{\left(5 + \frac{1}{2}\,i\right)\left(5 - \frac{1}{2}\,i\right)}\right]$$
$$= \text{Re}\left[\frac{5 - \frac{1}{2}\,i}{25 - \frac{1}{2}\,i^2}\right] = \text{Re}\left[\frac{5}{\frac{101}{4}} - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{101}{4}}\,i\right]$$
$$= \text{Re}\left(\frac{20}{101} + \frac{2}{101}\,i\right) = \frac{20}{101}$$

d) $2\ \text{Im}\left(\dfrac{z_3}{z_4}\right) = 2\ \text{Im}\left(\dfrac{-i}{1}\right) = 2\ \text{Im}\,(-\,i) = 2 \bullet (-\,1) = -\,2$

3. Encontrar x e y para que se cumpla la siguiente igualdad:

$$2x - 3 + xi = x + y - 2yi - i - 1$$

Solución:

$$2x - 3 + xi = x + y - 1 - (2y + 1)\,i$$
$$\Downarrow$$
$$\left.\begin{aligned} 2x - 3 &= x + y - 1 \\ x &= -\,2y - 1 \end{aligned}\right| \qquad \left.\begin{aligned} x - y &= 2 \\ x + 2y &= -\,1 \end{aligned}\right| \qquad x = 1 \text{ e } y = -\,1$$

4. Sabiendo que el neutro multiplicativo en $\mathbb{C}$ es $z = 1 + 0i = 1$, demostrar que el inverso multiplicativo de a + bi es:

$$\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\,i$$

Solución:

Sea $z = (x + yi)$ el inverso pedido. Se debe cumplir que:

$$
\begin{aligned}
z \bullet (a + bi) &= 1 \\
(x + yi)\,(a + bi) &= 1 \\
ax - by + (ay + bx)\,i &= 1 + 0\,i \\
&\Downarrow
\end{aligned}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
ax - by &= 1 \\
ay + bx &= 0
\end{aligned}\right|
$$

resolviendo el sistema obtenemos:

$x = \dfrac{a}{a^2 + b^2}$ e $y = \dfrac{-b}{a^2 + b^2}$, luego

El inverso multiplicativo de (a + bi) es:

$$\left(\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\,i\right)$$

5. Encontrar el valor de:

$a = \dfrac{i^5 - i^7}{-i^{11} + i^9}$ $b = \dfrac{i^{18} - i^{133}}{i^{24} + i^{111}}$

Solución:

a) $i^5 = i^4 \bullet i = 1 \bullet i = i$

$i^7 = i^4 \bullet i^3 = 1 \bullet i^2 \bullet i = -\,i$

$i^{11} = i^8 \bullet i^3 = (i^4)^2 \bullet i^3 = 1^2 \bullet (-\,i) = -\,i$

$i^9 = i^8 \bullet i = i$

$$\frac{i^5 - i^7}{-i^{11} + i^9} = \frac{i - (-i)}{i + i} = \frac{2i}{2i} = 1$$

b) $i^{18} = (i^4)^4 \bullet i^2 = -\,1$

$i^{135} = (i^4)^{33} \bullet i^3 = -\,i$

$i^{24} = (i^4)^6 = 1$

$i^{111} = (i^4)^{27} \bullet i^3 = -\,i$

$$\frac{i^{18} - i^{135}}{i^{24} + i^{111}} = \frac{-1 + i}{1 - i} = \frac{(-1 + i)\,(1 + i)}{(1 - i)\,(1 + i)}$$

$$= \frac{-1 - i + i + i^2}{1 - i^2} = \frac{-2}{2} = -1$$

6. Encontrar el valor de **a)** $\dfrac{2\sqrt{3} + \sqrt{2}\,i}{3\sqrt{2} - 4\sqrt{3}\,i}$ **b)** $(1 + i)^{16}$

Solución:

a) $$\frac{2\sqrt{3} + \sqrt{2}\,i}{3\sqrt{2} - 4\sqrt{3}\,i} = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{2}\,i}{3\sqrt{2} - 4\sqrt{3}\,i} \bullet \frac{3\sqrt{2} + 4\sqrt{3}\,i}{3\sqrt{2} + 4\sqrt{3}\,i}$$

$$= \frac{6\sqrt{6} + 24i + 6i + 4\sqrt{6}\,i^2}{18 - 48\,i^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{6} + 30i}{66} = \frac{\sqrt{6}}{33} + \frac{5}{11}\,i$$

b) $(1 + i)^{16} = [(1 + i)^2]^8 = [1 + 2\,i + i^2]^8 = (2i)^8 = 256.$

7. Sea $2x + (3y - 6)\,i + 3$ un número complejo.

Determinar los valores de x e y para que la expresión dada sea:

a) un número imaginario puro

b) un número real

c) cero

d) igual a $2 - 5i$

Solución:

$2x + (3y - 6)\,i + 3 = (2x + 3) + (3y - 6)\,i$

a) Para que sea imaginario puro, su parte real debe ser cero:

$$2x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3}{2}$$

b) Para que sea un número real, su parte imaginaria debe ser cero:

$$3y - 6 = 0 \Rightarrow y = 2$$

c) Para que sea cero, la parte real y la parte imaginaria deben ser ambas cero:

$$x = -\frac{3}{2} \quad \wedge \quad y = 2$$

d) Para que sea igual a $2 - 5i$

$$2x + 3 = 2 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$3y - 6 = -5 \Rightarrow y = \frac{1}{3}$$

Ejercicios

1. Encuentre las raíces de los siguientes números complejos:

a) $\sqrt{-25}$ **b)** $\sqrt{-81}$

c) $\sqrt{-36}$ **d)** $\sqrt{-144}$

2. Efectúe las siguientes operaciones:

a) $\sqrt{-25} + \sqrt{-4} - 2\sqrt{-16} =$

b) $3\sqrt{-49} - 2\sqrt{-25} + \sqrt{-169} =$

3. Escriba los inversos aditivos de los siguientes números complejos:

a) $2 - 3i$ **b)** $-1 - i$ **c)** $6 - 2i$ **d)** $-i$

4. Efectúe las siguientes operaciones:

a) $(2 + 3i) + (5 - 6i)$

b) $(3 - i) + (2 - 4i)$

c) $(5 + 4i) + (-1 - i)$

d) $(6 + i) - i$

e) $(8 - 4i) - (2 + i)$

f) $(3 - i) - (5 + 4i)$

g) $-2 - (6 - 2i)$

h) $(1 - i) - (1 + i)$

5. Efectúe los siguientes productos:

a) $(2 - 3i)(4 - i)$

Ejercicios

b) $(5 + 2i)(-1 - 6i)$

c) $(3 - 5i)(4 + i)$

d) $(-3 - 2i)(-1 + 6i)$

e) $(-2 + i)(-3 - i)$

f) $(1 + 2i)(3 - i)$

g) $(4 - 2i)(5 + i)$

h) $(3 + 2i)(7 - i)$

6. Efectúe los siguientes productos:

a) $(3 - 2i)(3 + 2i)$

b) $(1 - 5i)(1 + 5i)$

c) $(-6 + i)(-6 - i)$

d) $(4 - 3i)(4 + 3i)$

e) $(-1 - i)(-1 + i)$

f) $(-5 - 3i)(-5 + 3i)$

g) $i \bullet (-i)$

h) $2i \bullet (-2i)$

7. Calcule las siguientes divisiones:

a) $(2 + 5i) : (3 - 2i)$

b) $(1 - 4i) : (6 - 2i)$

c) $(3 - 2i) : (1 + i)$

d) $(1 - i) : (2 - 4i)$

e) $(4 + 2i) : (5 - i)$

f) $(2 + i) : (2 - i)$

g) $(1 - i) : (-i)$

h) $(6 + 2i) : i$

8. Calcule los inversos multiplicativos de los siguientes números complejos:

a) $1 - 2i$ b) $-1 + 2i$ c) $4 - i$

d) $3 + i$ e) $-i$ f) $2i$

9. Calcule las siguientes potencias de i:

a) i^{-1} b) i^2 c) i^{16} d) i^{125}

e) $i^{1.003}$ f) i^{-2} g) i^{-3} h) i^{-4}

i) i^{-5} j) i^{-6}

10. Calcule el cuadrado de los siguientes números complejos:

a) $3 + 2i$ b) $5 - 3i$ c) $1 + i$

d) $-2 + i$ e) $-1 - i$ f) $2 - 2i$

11. Calcule:

a) $(1 - i^2)^6$ b) $(i^{22} + i^{30})^4$

c) $(i^5 + i^{-12})^2$ d) $(i^{-3} - i^{-5})^{-2}$

12. Verifique que los complejos $3 - i$ y $3 + i$ son solución de la ecuación $x^2 - 6x + 10 = 0$

13. Calcule:

a) $\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} =$

b) $\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} + \frac{1}{i^5} + \frac{1}{i^6} + \frac{1}{i^7} + \frac{1}{i^8} =$

14. Si $z_1 = (2, 3)$, $z_2 = (1, -2)$, $z_3 = (-5, 0)$ y $z_4 = (0, 4)$, encuentre:

a) $z_1 + z_2 - z_3$

b) $2z_1 - 3z_2$

c) $z_4(z_1 + z_2)$

d) $(z_1 - z_2)(z_3 + z_4)$

e) $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$

f) $\frac{1}{z_3}(z_1 + z_4)$

g) $\frac{z_1 - z_2}{z_1 z_2}$

h) $\frac{1}{z_4}(z_2 - z_3 + z_1)$

15. Si $z_1 = 3 - 5i$, $z_2 = 6 + i$, $z_3 = 4 - 9i$ y $z_4 = 5i$, encuentre:

a) $z_1 - z_2 + z_4$

b) $2 - z_1 + 5z_3$

c) $4z_3(z_1 - z_2)$

d) $2z_1 z_2 - 3z_3 z_4$

e) $(1 - z_1)(1 + z_2)$

f) $2z_1(z_1 - z_2 z_3)$

g) $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{2z_2}$

h) $\frac{z_1 z_2}{z_3 z_4}$

16. Efectúe las siguientes operaciones:

a) $(2\sqrt{2}-\sqrt{3}i)(3\sqrt{2}-i)$

b) $\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}\,i}{\sqrt{3}-2\sqrt{2}\,i}$

17. Considerando que al complejo $x + yi$ corresponde el par ordenado (x, y) grafique los siguientes números complejos en el plano cartesiano:

a) $z_1 = 2 + 3i$ **b)** $z_2 = -5 - 2i$

c) $z_3 = -8 + i$ **d)** $z_4 = 2 - 3i$

e) $z_5 = -5 + 2i$ **f)** $z_6 = -8 - i$

Compare z_1 con z_4, z_2 con z_5 y z_3 con z_6

18. Determine los números reales x e y que satisfagan la siguiente igualdad:

a) $2x - 3i + y = xi - 2i + 2yi + 1$

b) $(2x - i) + (y - i) = (2 - 3i) - (x + 2yi)$

c) $(x + i)(y - 3i) = 1 - 7i$

d) $(2x - i)(-y + 2i) = -10 + 11i$

19. Encuentre un número complejo cuyo cuadrado sea $-3 - 4i$

20. Determine x para que el cociente

$\dfrac{2x-i}{1+i}$ sea imaginario puro.

21. Encuentre x para que $\dfrac{1}{2x-i}$ sea un número real.

22. Determine x para que el producto de $(1 - 2i)(x - 5i)$ sea un número real.

23. Determine x e y tales que:
$(x + yi)^2 = -16 - 30i$

24. Calcule los productos siguientes:

a) $(2 - 3i)\,i$ **b)** $(4 + 2i)\,i$

c) $(5 - 3i)\,i$ **d)** $(-2 + i)\,i$

e) $(-3 - 2i)\,i$

25. Grafique el primer factor y el producto del ejercicio anterior. Una el origen con el número complejo y observe cuánto gira cada uno.

26. Pruebe que
$(a + bi)\,i = -b + ai\ \forall\ a, b \in \mathbb{R}$

27. Calcule los siguientes productos:

a) $(3 - 2i)\,i^2$ **b)** $(2 + i)\,i^2$

c) $(-4 - 3i)\,i^2$ **d)** $(-1 + 3i)\,i^2$

28. Grafique el primer factor y el producto en los ejercicios del problema anterior. Una los puntos con el origen de coordenadas y observe cuánto gira cada uno.

29. Encuentre a para que el producto $(2a - 3i)(5 + i)$ sea un imaginario puro.

30. Determine un número complejo cuyo cuadrado sea $8 - 6i$.

31. Determine los números reales x e y que satisfagan la siguiente condición:
$(2 + xi) : (1 - 2i) = y + i$

32. Calcule el valor de:
$z^2 - 2z + 1$ si $z = 2 - 3i$

33. Calcule el valor de:
$z^2 - 5z + 4$ si $z = 1 + i$

34. Calcule el valor de:
$2z^2 - z - 3$ si $z = -1 - 3i$

35. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $(1 - z)(1 + i) = 2 - i$

b) $z(1 - 2i) + 3 = 1 - 2z + i$

c) $\dfrac{1-z}{1+z} = \dfrac{2-i}{1+4i}$

d) $\dfrac{z}{i} + \dfrac{1-z}{2i} = 0$

e) $\dfrac{2z}{1+i} - \dfrac{z}{1-i} = 3 + 4i$

36. Si $z = 4 - 3i$, encuentre la parte real de $\dfrac{1}{z^2}$

37. Calcule la raíz cuadrada de :

a) $3 + 4i$ **b)** $21 + 20i$ **c)** $-15 + 8i$

d) $5 + 12i$ **e)** $8i$ **f)** $2i$

Sugerencia: plantee un sistema de ecuaciones.

Ejercicios

38. Determine z en la ecuación:

$$\frac{z}{3+4i} - \frac{1-z}{5i} = \frac{5}{3-4i}$$

39. Resuelva el sistema:

$$\begin{cases} 2wi + (1-i)\,z = 3 \\ (1-i)\,w + 4z = 2+i \end{cases}$$

40. Encuentre $z \in \mathbb{C}$ tal que $z + \frac{1}{z} = 0$

41. Calcule el valor de:

$$\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \ldots + \frac{1}{i^{50}}$$

42. Calcule el valor de:

$$\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \ldots + \frac{1}{i^{100}}$$

43. Demuestre que

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z}{z+w}\right) + \mathrm{Re}\left(\frac{w}{w+z}\right) = 1$$

44. Demuestre que

$$\mathrm{Re}\,(zw) = \mathrm{Re}\,(z)\,\mathrm{Re}\,(w) - \mathrm{Im}\,(z)\,\mathrm{Im}\,(w)$$

45. Demuestre que

$$\mathrm{Im}\,(zw) = \mathrm{Re}\,(z)\,\mathrm{Im}\,(w) + \mathrm{Im}\,(z)\,\mathrm{Re}\,(w)$$

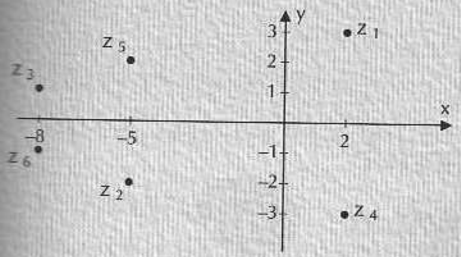
Soluciones

1. a) $5i$ b) $9i$ c) $6i$ d) $12i$
2. a) $-i$ b) $24i$
3. a) $-2+3i$ b) $1+i$ c) $-6+2i$ d) i
4. a) $7-3i$ b) $5-5i$ c) $4+3i$ d) 6 e) $6-5i$ f) $-2-5i$ g) $-8+2i$ h) $-2i$
5. a) $5-14i$ b) $7-32i$ c) $17-17i$ d) $15-16i$ e) $7-i$ f) $5+5i$ g) $22-6i$ h) $23+11i$
6. a) 13 b) 26 c) 37 d) 25 e) 2 f) 34 g) 1 h) 4
7. a) $\frac{-4}{13}+\frac{19}{13}i$ b) $\frac{7}{20}-\frac{11}{20}i$ c) $\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$ d) $\frac{3}{10}+\frac{1}{10}i$ e) $\frac{9}{13}+\frac{7}{13}i$ f) $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$ g) $1+i$ h) $2-6i$
8. a) $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$ b) $-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$ c) $\frac{4}{17}+\frac{1}{17}i$ d) $\frac{3}{10}-\frac{1}{10}i$ e) i f) $-\frac{1}{2}i$
9. a) $-i$ b) -1 c) 1 d) i e) $-i$ f) -1 g) i h) 1 i) $-i$ j) -1
10. a) $5+12i$ b) $16-30i$ c) $2i$ d) $3-4i$ e) $2i$ f) $-8i$
11. a) 64 b) 16 c) $2i$ d) $-\frac{1}{4}$
13. a) 0 b) 0
14. a) (8, 1) b) (1, 12) c) (– 4, 12) d) (– 25, – 21) e) $\left(\frac{23}{65}, \frac{11}{65}\right)$ f) $\left(\frac{-2}{5}, -\frac{7}{5}\right)$ g) $\left(\frac{3}{65}, \frac{41}{65}\right)$ h) $\left(\frac{1}{4}, -2\right)$
15. a) $-3-i$ b) $19-40i$ c) $-264+12i$ d) $-89-114i$ e) $-19+33i$ f) $270+570i$ g) $\frac{213}{1.258}+\frac{84}{629}i$ h) $\frac{99}{485}-\frac{67}{97}i$

16. a) $12 + \sqrt{3} - \left(2\sqrt{2} + 3\sqrt{6}\right)$

b) $\dfrac{10}{11} + \dfrac{3\sqrt{6}}{11}\,i$

17.



18. a) $x = 1,\ y = -1$ b) $x = \dfrac{5}{6},\ y = \dfrac{1}{2}$

c) $x = 2,\ y = -1$ d) $x = 2,\ y = 3$

$x = \dfrac{1}{3},\ y = -6$ $x = \dfrac{3}{4},\ y = 8$

19. $-1 + 2i;\ 1 - 2i$

20. $x = \dfrac{1}{2}$

21. No existe, porque no cumple la condición pedida.

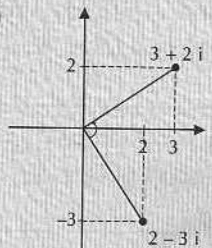
22. $x = -\dfrac{5}{2}$

23. $x = \pm\ 3 \quad y = \pm\ 5$

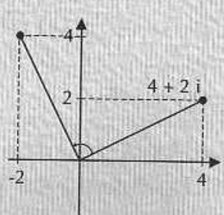
24. a) $3 + 2i$ b) $-2 + 4i$ c) $3 + 5i$

d) $-1 - 2i$ e) $2 - 3i$

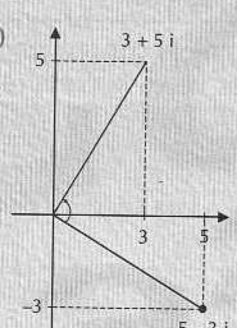
25. a)



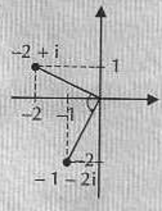
b)



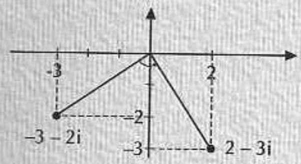
c)



d)



e)

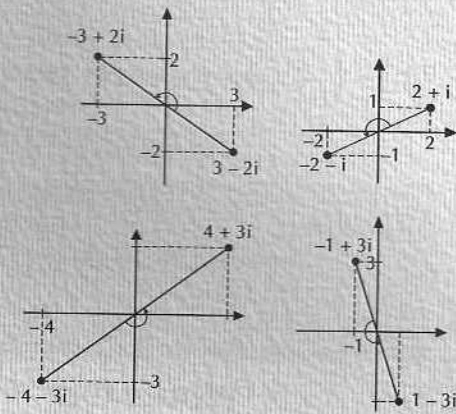


En todos los casos se observa que el giro es de 90º.

En general $(a + bi)\ i = -b + ai$

27. a) $-3 + 2i$ b) $-2 - i$ c) $4 + 3i$ d) $1 - 3i$

28.



Se observa un giro de 180º.

29. $a = \dfrac{-3}{10}$

30. $3 - i,\ \ -3 + i$

31. $x = 1;\ \ y = 0$

32. $-8 - 6i$

33. $-1 - 3i$

34. $-18 + 15i$

35. a) $z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}\,i$ b) $z = -\dfrac{8}{13} - \dfrac{1}{13}\,i$

c) $z = \dfrac{2}{3} + i$ d) $z = -1$

e) $-\dfrac{9}{5} + \dfrac{13}{5}\,i$

36. $\dfrac{7}{625}$

37) a) $\pm(2+i)$ b) $\pm(5+2i)$

c) $\pm(1+4i)$ d) $\pm(3+2i)$

e) $\pm(2+2i)$ f) $\pm(1+i)$

38) $z = -1+2i$

39) $w = \frac{1}{10} - \frac{9}{10}i$; $z = \frac{7}{10} + \frac{1}{2}i$

40) $z = \pm i$

41) $-1-i$ 42) 0

Conjugado y módulo de un complejo 9.2

9.2.1 Conjugado de un complejo

Sea $z = a + bi$ un número complejo.

Definición:

Se llama conjugado del complejo z al complejo

$$\bar{z} = a - bi$$

- **PROPIEDADES.**

Sean z y w dos números complejos, entonces, se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\bar{\bar{z}} = z$	El conjugado del conjugado de z es z.
2. $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$	El conjugado de una suma es igual a la suma de los conjugados de los sumandos.
3. $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$	El conjugado de un producto es igual al producto de los conjugados de los factores.
4. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$, $w \neq (0, 0)$	El conjugado de un cociente es igual al cociente de los conjugados.
5. $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$	La suma de un complejo con su conjugado es igual a dos veces la parte real del complejo.
6. $z - \bar{z} = 2 \operatorname{Im}(z)\, i$	La diferencia de un complejo con su conjugado es igual a dos veces la parte imaginaria del complejo.
7. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$	Un complejo es real si y sólo si es igual a su conjugado.

Para las demostraciones, ver ejercicios resueltos.

9.2.2 Módulo de un complejo

Sea $z = a + bi$ un número complejo.

Definición:

Se llama módulo o valor absoluto de z al número real $|z|$ definido por $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

- **PROPIEDADES.**

Sean z y w dos números complejos, entonces, se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\lvert \operatorname{Re}(z) \rvert \le \lvert z \rvert$	El valor absoluto de la parte real de un complejo es menor o igual al valor absoluto del complejo.
2. $\lvert \operatorname{Im}(z) \rvert \le \lvert z \rvert$	El valor absoluto de la parte imaginaria de un complejo es menor o igual al valor absoluto del complejo.
3. $z = 0 \Leftrightarrow \lvert z \rvert = 0$	Un complejo es cero si y sólo si su valor absoluto es cero.
4. $\lvert z \rvert = \lvert -z \rvert = \lvert \bar{z} \rvert$	El valor absoluto de un complejo es igual al valor absoluto de su inverso aditivo y de su conjugado.
5. $\lvert z \cdot w \rvert = \lvert z \rvert \cdot \lvert w \rvert$	El valor absoluto de un producto de complejos es igual al producto de los valores absolutos de los factores.
6. $\left\lvert \frac{z}{w} \right\rvert = \frac{\lvert z \rvert}{\lvert w \rvert}$	El valor absoluto de un cociente de números complejos es igual al cociente de los valores absolutos de los números.
7. $\lvert z + w \rvert \le \lvert z \rvert + \lvert w \rvert$	El valor absoluto de una suma de números complejos es menor o igual a la suma de los valores absolutos de los números complejos.

La propiedad número 7 recibe el nombre de Desigualdad Triangular.

Para las demostraciones, ver los ejercicios resueltos.

Ejercicios resueltos

1. Dados los números complejos

$z_1 = 3 - 5i$, $z_2 = -6 + 3i$, $z_3 = -2i$, $z_4 = 5$. Encontrar:

a) el conjugado de cada uno **b)** el valor absoluto de cada uno

c) $\overline{z_1 + z_2 - 2z_3}$ **d)** $|z_1 \cdot z_3|$

Solución:

a) Si $z_1 = 3 - 5i$, entonces $\overline{z_1} = 3 + 5i$

Si $z_2 = -6 + 3i$, entonces $\overline{z_2} = -6 - 3i$

Si $z_3 = -2i$, entonces $\overline{z_3} = 2i$

Si $z_4 = 5$, entonces $\overline{z_4} = 5$

b) Si $z_1 = 3 - 5i$, entonces $|z_1| = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$

Si $z_2 = -6 + 3i$, entonces $|z_2| = \sqrt{(-6)^2 + 3^2} = \sqrt{45}$

Si $z_3 = -2i$, entonces $|z_3| = \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$

Si $z_4 = 5$, entonces $|z_4| = \sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$

c) $\overline{z_1 + z_2 - 2z_3} = \overline{(3-5i) + (-6+3i) - 2(-2i)}$

$= \overline{-3 + 2i} = -3 - 2i$

d) $|z_1 \cdot z_3| = |(3-5i) \cdot (-2i)| = |-10 - 6i| = \sqrt{100 + 36} = \sqrt{136}$

2. Demostrar que $\bar{\bar{z}} = z$. (Propiedad 1)

Solución: Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$

$$\bar{\bar{z}} = \overline{\overline{a+bi}} = \overline{a - bi} = a + bi = z$$

3. Demostrar que $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$ (Propiedad 2)

Solución: Sean $z = a + bi$, $w = c + di \in \mathbb{C}$

$$\overline{z+w} = \overline{(a+bi)+(c+di)} = \overline{(a+c)+(b+d)i}$$

$$= (a + c) - (b + d)i = (a - bi) + (c - di) = \bar{z} + \bar{w}$$

4. Demostrar que $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ (Propiedad 3)

Solución: Sean $z = a + bi$, $w = c + di \in \mathbb{C}$

$$\overline{z \cdot w} = \overline{(a+bi)(c+di)} = \overline{(ac-bd)+(ad+bc)i}$$

$$= (ac - bd) - (ad + bc)i = ac - adi + bdi^2 - bci$$

$$= a(c - di) - bi(c - di) = (a - bi)(c - di) = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

5. Demostrar que $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$ (propiedad 4)

Solución: Sean $z = a + bi$, $w = c + di \in \mathbb{C}$

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \overline{\left(\frac{a+bi}{c+di}\right)} = \overline{\frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i}$$

$$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} - \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

$$= \frac{ac - bdi^2 - bci + adi}{c^2+d^2}$$

$$= \frac{c(a-bi)+di(a-bi)}{(c+di)(c-di)}$$

$$= \frac{(a-bi)(c+di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{a-bi}{c-di} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$$

6. Demostrar **a)** $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\,(z)$ (Propiedades 5 y 6)

b) $z - \bar{z} = 2\,\mathrm{Im}\,(z)i$

Solución: Sea $z = a + bi$

a) $z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 2\,\mathrm{Re}\,(z)$

b) $z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi = 2\,\mathrm{Im}\,(z)\,i$

7. Demostrar $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$ (Propiedad 7)

Solución: Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$) **Hip:** $z \in \mathbb{R}$

Tesis: $z = \bar{z}$

$z \in \mathbb{R} \Rightarrow a + bi \in \mathbb{R} \Rightarrow b = 0 \Rightarrow z = a \Rightarrow \bar{z} = a$

$\therefore z = \bar{z}$

$\Leftarrow$) **Hip:** $z = \bar{z}$

Tesis: $z \in \mathbb{R}$

$z = \bar{z} \Rightarrow a + bi = a - bi \Rightarrow a = a$

$y \;\; b = -b \Rightarrow 2b = 0$

$b = 0$

$\therefore z = a$ luego $z \in \mathbb{R}$

8. Determinar un número complejo tal que su cuadrado sea igual a su conjugado.

Solución: Sea $x + yi$ el número complejo pedido.

$(x + yi)^2 = x - yi$

$x^2 - y^2 + 2xyi = x - yi$

$\Downarrow$

$$\left.\begin{aligned} x^2 - y^2 &= x \\ 2xy &= -y \end{aligned}\right\} \text{ cuya solución es } x = -\frac{1}{2} \quad y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

luego los números buscados son

$$\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) y \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \qquad \text{Comprobarlo.}$$

9. Probar que **a)** $|\,\mathrm{Re}\,(z)\,| \le |z|$

b) $|\,\mathrm{Im}\,(z)\,| \le |z|$ (Propiedades 1 y 2)

Solución: Sea $z = a + bi$

a) $|\text{Re}(z)| = |a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2+b^2} = |z|$

luego $|\text{Re}(z)| \leq |z|$

b) $|\text{Im}(z)| = |b| = \sqrt{b^2} \leq \sqrt{a^2+b^2} = |z|$

luego $|\text{Im}(z)| \leq |z|$

10. Probar que $z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$ (Propiedad 3)

Solución: Sea $z = a + bi$

$\Rightarrow)$ $z = 0 \Rightarrow a + bi = 0 \Rightarrow a = 0 \wedge b = 0$

luego $\sqrt{a^2+b^2} = |z| = 0$

$\Leftarrow)$ $|z| = 0 \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2} = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = 0 \wedge b = 0$

luego $z = a + bi = 0$

11. Probar que $|z| = |-z| = |\bar{z}|$ (Propiedad 4)

Solución: Sea $z = a + bi$

$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2+b^2}$

$|-z| = |-a-bi| = \sqrt{(-a)^2+(-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2}$

$|\bar{z}| = |a - bi| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2}$

luego $|z| = |-z| = |\bar{z}|$

12. Demostrar $|z \bullet w| = |z| \bullet |w|$ (Propiedad 5)

Solución: Sean $z = a + bi,$ $w = c + di \in \mathbb{C}$

$|z \bullet w| = |(a + bi) \bullet (c + di)| = |(ac - bd) + (ad + bc)\,i|$

$$= \sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}$$

$$= \sqrt{a^2c^2 - \cancel{2abcd} + b^2d^2 + a^2d^2 + \cancel{2abcd} + b^2c^2}$$

$$= \sqrt{a^2\left(c^2 + d^2\right) + b^2\left(c^2 + d^2\right)} = \sqrt{\left(a^2 + b^2\right)\left(c^2 + d^2\right)}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \bullet \sqrt{c^2 + d^2} = |z| \bullet |w|$$

13. Demostrar $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$ (Propiedad 6)

Solución: Sean $z = a + bi,$ $w = c + di \in \mathbb{C}.$

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \left|\frac{a+bi}{c+di}\right| = \left|\frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i\right|$$

$$= \sqrt{\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)^2 + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2c^2 + \cancel{2abcd} + b^2d^2 + b^2c^2 - \cancel{2abcd} + a^2d^2}{\left(c^2+d^2\right)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2\left(c^2+d^2\right)+b^2\left(c^2+d^2\right)}{\left(c^2+d^2\right)^2}} = \sqrt{\frac{\left(a^2+b^2\right)\cancel{\left(c^2+d^2\right)}}{\left(c^2+d^2\right)^{\cancel{2}}}}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}} = \frac{|z|}{|w|}$$

14. Probar que $z \bullet \bar{z} = |z|^2$

Solución: Sea $z = a + bi$

$$z \bullet \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = |z|^2$$

15. Probar que $|z + w| \leq |z| + |w|$ (Propiedad 7)

Solución: Sean $z, w \in \mathbb{C}$

$$
\begin{aligned}
|z+w|^2 &= (z+w)\left(\overline{z+w}\right) && \text{(ver ejercicio 14)}\\
&= (z+w)\left(\bar{z}+\bar{w}\right) && \text{(Prop. 2 de conjugado)}\\
&= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} &&\\
&= |z|^2 + z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} + |w|^2 && \left(w\bar{z} = \overline{z\bar{w}}\right)\\
&= |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(z\bar{w}\right) + |w|^2 && \text{(Prop. 5 de conjugado)}\\
&\leq |z|^2 + 2\,\left|\mathrm{Re}\left(z\bar{w}\right)\right| + |w|^2 && (x \leq |x| \quad \text{I } x \in \mathbb{R})\\
&\leq |z|^2 + 2\,|z\bar{w}| + |w|^2 && \text{(Prop. 1 de valor absoluto)}\\
&= |z|^2 + 2\,|z|\,|\bar{w}| + |w|^2 && \text{(Prop. 5 de valor absoluto)}\\
&= |z|^2 + 2\,|z|\,|w| + |w|^2 && \text{(Prop. 4 de valor absoluto)}\\
&= (|z| + |w|)^2 &&
\end{aligned}
$$

Luego:

$|z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$ extrayendo raíz cuadrada.

$|z + w| \leq |z| + |w|$

16. Determinar el valor de a para que el valor absoluto del cociente $(3 - 2i) : (a + i)$ sea 3.

Solución:

$$\left|\frac{3-2i}{a+i}\right| = 3$$

$$\left|\frac{(3-2i)(a-i)}{(a+i)(a-i)}\right| = 3$$

$$\left|\frac{(3a-2)}{a^2+1} - \frac{(2a+3)i}{a^2+1}\right| = 3$$

$$\sqrt{\frac{(3a-2)^2}{\left(a^2+1\right)^2} + \frac{\left(-(2a+3)\right)^2}{\left(a^2+1\right)^2}} = 3$$

$$\sqrt{\frac{9a^2 - \cancel{12a} + 4 + 4a^2 + \cancel{12a} + 9}{\left(a^2+1\right)^2}} = 3$$

$$\sqrt{\frac{13\cancel{\left(a^2+1\right)}}{\left(a^2+1\right)^{\cancel{2}}}} = 3$$

$$\sqrt{\frac{13}{a^2+1}} = 3$$

$$\frac{13}{a^2+1} = 9$$

$$9a^2 + 9 = 13$$

$$a^2 = \frac{4}{9}$$

$$a = \pm\frac{2}{3}$$

Ejercicios

1. Dados los siguientes números complejos, encuentre su conjugado.
   a) $6 - 2i$ b) $4 - i$ c) $3 + 4i$
   d) $-2i$ e) 5 f) $\frac{1}{2} + \sqrt{2}\ i$
2. Calcule el valor absoluto de los siguientes números complejos.
   a) $3 - 2i$ b) $9 - i$ c) $3 + 5i$
   d) $1 - i$ e) $-i$ f) $3 - i$
3. Dados los números complejos $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = 4 + i$, $z_3 = -2i$ y $z_4 = 1 - i$, encuentre:
   a) $|z_3 \cdot z_2|$ f) $|\overline{\overline{z_1} - z_2}|$
   b) $|\overline{z_1 - z_3}|$ g) $|z_1\ z_2 + \overline{z_3\ z_4}|$
   c) $\dfrac{\overline{z_1 - z_2}}{\overline{z_4}}$ h) $|z_1\ (z_2 - \overline{z_4})|$
   d) $|(z_2 - z_3)\ z_4|$ i) $\overline{z_1} + \overline{z_2\ z_3}$
   e) $\left|\dfrac{z_3}{\overline{z_3 + z_4}}\right|$ j) $\dfrac{1}{|z_1|} - \dfrac{1}{|z_2|}$
4. Calcule el valor absoluto de $\dfrac{i^8}{i^4 - i^3}$
5. Determine el valor de a para que el valor absoluto de $(a - 2i)$ sea 3.
6. Encuentre x para que el valor absoluto de $(1 - xi)(1 + i)$ sea 10.
7. Encuentre el valor de b para que el valor absoluto del cociente $(b - 2i) : (3 - i)$ sea 2.
8. Determine x para que el conjugado de $(x - i)(1 - 3i)$ sea igual a $(-1 + 7i)$.
9. Calcule el conjugado y el valor absoluto de $(i^4 - i^{-11})^{-3}$.
10. Si $z = a + bi$, encuentre la parte real y la parte imaginaria de $\dfrac{1 - \bar{z}}{1 + \bar{z}}$
11. Determine los números complejos tales que su módulo sea 5 y la parte real de su cuadrado sea 7.
12. Encuentre z complejo tal que $|z|^2 = 37$ y $\operatorname{Im}(z^2) = 12$.
13. Demuestre que $\forall\ z, w \in \mathbb{C}$, se cumple que $$\frac{|z + w|^2 + |z - w|^2}{2} = |z|^2 + |w|^2$$
14. Demuestre que si dos complejos z y w tienen módulo 1, entonces $$\left|\frac{1 - \bar{z}\ w}{z - w}\right| = 1$$
15. Demuestre que $\forall\ z \in \mathbb{C}$, $\overline{z^2} = \left(\bar{z}\right)^2$
16. Encuentre $z \in \mathbb{C}$ tal que: $|1 - z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |z|$.
17. Demuestre que $i^{4n+q} = i^q$ $\forall\ n, q \in \mathbb{N}$.
18. Determine un número $z \in \mathbb{C}$ tal que su cuadrado sea el triple de su conjugado.
19. Encuentre los complejos que satisfagan que la mitad de su cuadrado es igual a un tercio de su conjugado.
20. Pruebe que si $w + \dfrac{1}{w}$ es real, entonces $\operatorname{Im}(w) = 0 \vee |w| = 1$.

Soluciones

1. a) $6 + 2i$ b) $4 + i$ c) $3 - 4i$ d) $2i$ e) 5 f) $\frac{1}{2} + \sqrt{2}\ i$
2. a) $\sqrt{13}$ b) $\sqrt{82}$ c) $\sqrt{34}$ d) $\sqrt{2}$ e) 1 f) $\sqrt{10}$
3. a) $2\sqrt{17}$ b) 3 c) $1 + 2i$ d) $5\sqrt{2}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ f) $\sqrt{2}$
   g) $\sqrt{153}$ h) $\sqrt{117}$ i) $5 + 10i$ j) $\frac{1}{\sqrt{13}} - \frac{1}{\sqrt{17}}$
4. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 5. $a = \pm\sqrt{5}$ 6. $x = \pm 7$ 7. $x = \pm 6$ 8. $x = 2$ 9. $-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$; $\frac{\sqrt{2}}{4}$

10. $\frac{1-a^2-b^2}{(1+a)^2+b^2}; \ \frac{2b}{(1+a)^2+b^2}$

11. $(4+3i), (-4-3i), (4-3i), (-4+3i)$

12. $(6+i), (-6-i), (-1-6i), (1+6i)$

13. Use la propiedad $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

14. Eleve al cuadrado la igualdad y considere $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

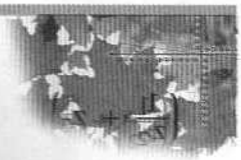
16. $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \ ; \ z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

17. Recuerde que $i^{4a+q} = (i^4)^u \cdot i^q$ y $i^4 = 1$

18. $z_1 = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} i; \ z_2 = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} i$

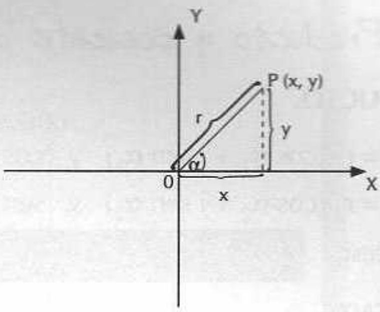
19. $z_1 = -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} i \ ; \ z_2 = -\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} i$

Representación trigonométrica o forma polar de un número complejo 9.3



9.3.1 Definición de razones trigonométricas

Sea P (x, y) un punto del plano cartesiano tal que OP forma un ángulo α con el eje x.
Sea OP = r.
Recordemos que:



Seno α $= \frac{y}{r}$ = sen α

Coseno α $= \frac{x}{r}$ = cos α

Tangente α $= \frac{y}{x}$ = tg a

9.3.2 Representacón trigonométrica del complejo z = a + bi

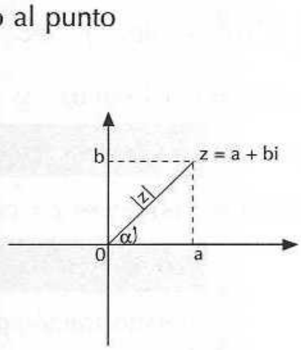
El complejo z = a + bi geométricamente representa un punto en el plano cartesiano.

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ es la distancia del origen del plano al punto representado por z. A esta distancia la llamamos r.

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ *(1)*

Sea α el ángulo definido por el vector $\overrightarrow{oz}$ y el eje x.

El ángulo α se llama argumento del complejo z.



α está definido para todo $z \neq 0$

En la figura se ve que

$a = |z| \cos \alpha$ y $b = |z| \operatorname{sen} \alpha$ (*2*)

Sea $z = a + bi$, aplicando las relaciones (*1*) y (*2*) se tiene que

$$z = |z| \cos \alpha + |z| \operatorname{sen} \alpha\, i$$

$$z = r (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$$

Para escribir un complejo $z = a + bi$ en su forma trigonométrica calculamos

1° $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

2° Ubicamos α tal que $\cos \alpha = \frac{a}{r}$ y $\operatorname{sen} \alpha = \frac{b}{r}$

o bien ubicamos α tal que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$, pero se debe cuidar de determinar el cuadrante donde se encuentra el complejo z.

Ejemplo: Escribir $z = 2 + 2i$ en forma trigonométrica.

$r = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \alpha = 45°$

luego $z = 2\sqrt{2} (\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°)$

9.3.3 Producto y cociente de complejos en forma polar

PRODUCTO.

Si $z_1 = r_1 (\cos \alpha_1 + i \operatorname{sen} \alpha_1)$ y $\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$

$z_2 = r_2 (\cos \alpha_2 + i \operatorname{sen} \alpha_2)$ y $\operatorname{sen} (\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$

entonces: $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [\cos (\alpha_1 + \alpha_2) + i \operatorname{sen} (\alpha_1 + \alpha_2)]$

COCIENTE.

Si $z_1 = r_1 (\cos \alpha_1 + i \operatorname{sen} \alpha_1)$

$z_2 = r_2 (\cos \alpha_2 + i \operatorname{sen} \alpha_2)$, $z_2 \neq 0$

entonces: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos (\alpha_1 - \alpha_2) + i \operatorname{sen} (\alpha_1 - \alpha_2)]$

9.3.4 Potenciación de números complejos en forma polar

Si $z = r (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$ y $n \in \mathbb{N}$,

entonces: $z^n = r^n (\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha)$

Nota: Si $r = 1$ entonces $z = \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha$

$$(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)^n = \cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha$$

(Demostración pág. 404 - ejercicios propuestos).

Esta fórmula se conoce con el nombre de fórmula de De Moivre y también es válida si n es negativo.

9.3.5 Radicación de números complejos en forma polar

Si $z = r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right),\ k = 0, 1\ldots n-1$$

NOTA: Se pueden obtener todas las raíces n-ésimas de un complejo z si se multiplica una de estas raíces por todas las raíces n-ésimas de la unidad.

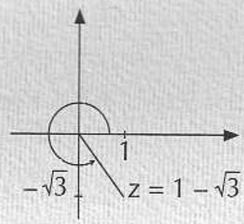
Ejercicios resueltos

1. Encontrar la forma polar de los números complejos siguientes:

a) $1 - \sqrt{3}\,i$ **b)** $-1 + i$ **c)** $2i$ **d)** 4

Solución:

a) $z = 1 - \sqrt{3}\,i$

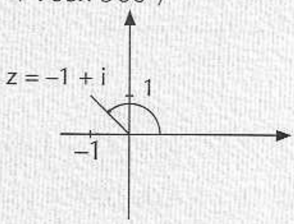


$r = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = 2$

$\text{tg}\,\alpha = \frac{-\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \alpha = 300^\circ$

luego: $z = 1 - \sqrt{3}\,i = 2(\cos 300^\circ + i\,\text{sen}\,300^\circ)$

b) $z = -1 + i$

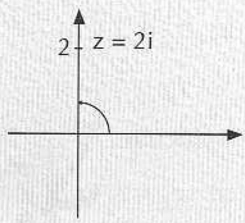


$r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\text{tg}\,\alpha = \frac{1}{-1} = -1 \Rightarrow \alpha = 135^\circ$

luego: $z = -1 + i = \sqrt{2}(\cos 135^\circ + i\,\text{sen}\,135^\circ)$

c) $z = 2i$



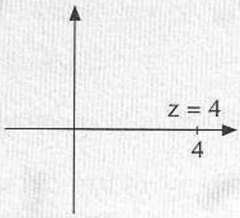
$r = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$

$\text{tg}\,\alpha = \frac{2}{0}$ no está definida,

significa que α vale 90°

luego: $z = 2(\cos 90^\circ + i\,\text{sen}\,90^\circ)$

d) $z = 4$



$r = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4$

$\text{tg}\,\alpha = \frac{0}{4} = 0 \Rightarrow \alpha = 0^\circ$

luego: $z = 4(\cos 0^\circ + i\,\text{sen}\,0^\circ)$

2. Escribir los siguientes complejos en su forma rectangular (a + bi).

a) $3 \cdot (\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)$ **b)** $\sqrt{2}\ (\cos 135^\circ + i \operatorname{sen} 135^\circ)$

c) $2\ (\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ)$ **d)** $3\ (\cos 180^\circ + i \operatorname{sen} 180^\circ)$

Solución:

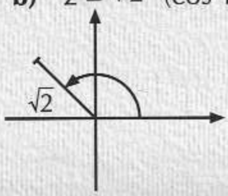
Para transformar los números complejos de su forma polar en su forma rectangular basta calcular los valores del seno y del coseno del ángulo señalado.

Para resolver estos problemas es conveniente tener a mano la siguiente tabla:

α	30°	45°	60°
sen α	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
tg α	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

a) $z = 3\ (\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\ i\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\ i$

b) $z = \sqrt{2}\ (\cos 135^\circ + i \operatorname{sen} 135^\circ) = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\ i\right) = -1 + i$



$\cos 135^\circ = \cos (90^\circ + 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\operatorname{sen} 135^\circ = \operatorname{sen} (90^\circ + 45^\circ) = \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

c) $z = 2\ (\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ) = 2\ (0 + i) = 2\ i$

d) $z = 3\ (\cos 180^\circ + i \operatorname{sen} 180^\circ) = 3\ (-1 + 0\ i) = -3$

3. Efectuar el producto de los siguientes números complejos:

a) $z_1 = 2\ (\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)$ **b)** $z_1 = \sqrt{2}\ (\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ)$

$z_2 = 3\ (\cos 15^\circ + i \operatorname{sen} 15^\circ)$ $z_2 = \sqrt{3}\ (\cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ)$

Solución:

a) $z_1 \cdot z_2 = [2\ (\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)]\ [3\ (\cos 15^\circ + i \operatorname{sen} 15^\circ)]$

$= 6\ (\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ)$

b) $z_1 \cdot z_2 = [\sqrt{2}\ (\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ)]\ [\sqrt{3}\ (\cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ)]$

$= \sqrt{6}\ (\cos 300^\circ + i \operatorname{sen} 300^\circ)$

4. Efectuar el cociente de los siguientes números complejos:

a) $z_1 = 4\ (\cos 25^\circ + i \operatorname{sen} 25^\circ)$ **b)** $z_1 = \sqrt{2}\ (\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ)$

$z_2 = 2\ (\cos 80^\circ + i \operatorname{sen} 80^\circ)$ $z_2 = \sqrt{2}\ (\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ)$

Solución:

a) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{4\ (\cos 25° + i \text{ sen } 25°)}{2\ (\cos 80° + i \text{ sen } 80°)} = 2\ (\cos (-55°) + i \text{ sen } (-55°))$

$= 2\ (\cos 305° + i \text{ sen } 305°)$

b) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{2}\ (\cos 120° + i \text{ sen } 120°)}{\sqrt{2}\ (\cos 90° + i \text{ sen } 90°)} = \cos 30° + i \text{ sen } 30°$

5) Encontrar la potencia indicada de cada número complejo:

a) $(5 + 2i)^6$ **b)** $(3 - 2i)^4$ **c)** $(-8 - i)^5$

Solución:

Es conveniente transformar primero los números complejos a su forma polar.

a) $z = 5 + 2i$ es un punto del primer cuadrante y por lo tanto èl argumento α será un ángulo menor que 90°.

Si $\text{tg } \alpha = \frac{2}{5}$, entonces $\alpha = \text{arctg } \frac{2}{5} = 21{,}8°$

$r = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$

luego $z = 5 + 2i = \sqrt{29}\ (\cos 21{,}8° + i \text{ sen } 21{,}8°)$

y $z^6 = (\sqrt{29}\,)^6\ (\cos (6 \cdot 21{,}8°) + i \text{ sen } (6 \cdot 21{,}8°))$

$= 24.389\ (\cos 130{,}8° + i \text{ sen } 130{,}8°)$

Pasando este complejo a su forma cartesiana

$z^6 = 24.389\ (-0.6534 + 0{,}7570\, i) = -15.935{,}8 + 18.462{,}5\, i$

$\therefore\ (5 + 2i)^6 \approx -15.935{,}8 + 18.462{,}5\, i$

b) $z = 3 - 2i$ es un punto del cuarto cuadrante, luego $270° < \alpha < 360°$

Si $\text{tg } \alpha = \frac{-2}{3}$, entonces $\alpha = 326{,}3°$

$r = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$

$z = 3 - 2i = \sqrt{13}\ (\cos 326{,}3° + i \text{ sen } 326{,}3°)$

$z^4 = (3 - 2i)^4 = (\sqrt{13}\,)^4\ (\cos (4 \cdot 326{,}3°) + i \text{ sen } (4 \cdot 326{,}3°))$

$= 169\ (\cos 225{,}2° + i \text{ sen } 225{,}2°)$

que en la forma cartesiana es:

$z^4 = 169\ (-0{,}7046 - 0{,}7095\, i) = -119{,}1 - 119{,}9\, i$

$\therefore\ (3 - 2i)^4 = -119{,}1 - 119{,}9\, i \approx -119 - 120\, i$

c) $z = 8 - i$ es un punto del tercer cuadrante y por lo tanto

$180° < \alpha < 270°$

Si $\text{tg } \alpha = \frac{1}{8}$, entonces $\alpha = \text{arctg } \frac{1}{8} = 187{,}1°$

$r = \sqrt{64 + 1} = \sqrt{65}$

$z \;= -8 - i = \sqrt{65}\ (\cos 187{,}1^{\circ} + i \operatorname{sen} 187{,}1^{\circ})$

$z^5 \;= (\sqrt{65}\,)^5\ (\cos (5 \cdot 187{,}1^{\circ}) + i \operatorname{sen} (5 \cdot 187{,}1^{\circ}))$

$\;= 34.063\ (\cos 215{,}5^{\circ} + i \operatorname{sen} 215{,}5^{\circ})$

que en la forma cartesiana es:

$z^5 = 34.063\ (-0{,}814 - 0{,}581\ i) = -27.727{,}3 - 19.790{,}6\ i$

$\therefore\ (-8 - i)^5 = -27.727 - 19.790\ i$

6. Calcular el valor de $(1 + i)^{100}$

Solución: $z = 1 + i = \sqrt{2}\ (\cos 45^{\circ} + i \operatorname{sen} 45^{\circ})$

$z^{100} = (1 + i)^{100} = (\sqrt{2}\,)^{100}\ (\cos 4.500^{\circ} + i \operatorname{sen} 4.500^{\circ})$

$(1 + i)^{100} = 1{,}1 \cdot 10^{15}\ (\cos 180^{\circ} + i \operatorname{sen} 180^{\circ})$

$= 1{,}1 \cdot 10^{15}\ (-1 + 0i) = -1{,}1 \cdot 10^{15}$

$\therefore\ (1 + i)^{100} = -1{,}1 \cdot 10^{15}$

7. Encontrar todas las raíces indicadas de:

a) $\sqrt[5]{1}$ **b)** $\sqrt[3]{1 - i}$ **c)** $\sqrt[4]{\sqrt{3} + i}$ y representarlas gráficamente.

Solución: a) $z = 1 = (\cos 0^{\circ} + i \operatorname{sen} 0^{\circ})$

$$\sqrt[5]{1} = \cos \frac{2k\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{5}$$

Si $k = 0 : z_1 = \cos 0^{\circ} + i \operatorname{sen} 0^{\circ} = 1$

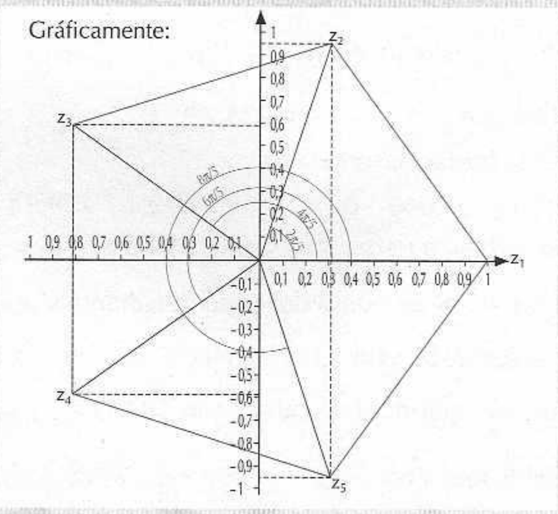
Si $k = 1 : z_2 = \cos \frac{2\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{5} = 0{,}31 + 0{,}95\ i$

Si $k = 2 : z_3 = \cos \frac{4\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{5} = -0{,}81 + 0{,}59\ i$

Si $k = 3 : z_4 = \cos \frac{6\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{6\pi}{5} = -0{,}81 - 0{,}59\ i$

Si $k = 4 : z_5 = \cos \frac{8\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{8\pi}{5} = 0{,}31 - 0{,}95\ i$

Gráficamente:



b) $z = 1 - i = \sqrt{2}\ (\cos 315^{o} + i \operatorname{sen} 315^{o})$

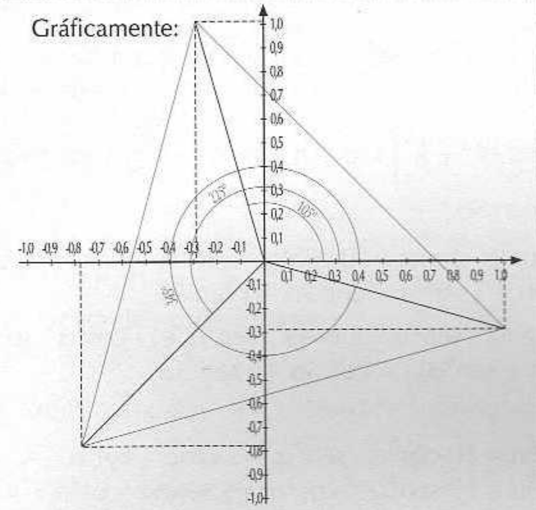
$$\sqrt[3]{1-i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos \frac{315^{o} + k\ 360^{o}}{3} + i \operatorname{sen} \frac{315^{o} + k\ 360^{o}}{3}\right)$$

Si $k = 0 : 1{,}1\ (\cos 105^{o} + i \operatorname{sen} 105^{o}) = -\ 0{,}29 + 1{,}06\ i$

Si $k = 1 : 1{,}1\ (\cos 225^{o} + i \operatorname{sen} 225^{o}) = -\ 0{,}78 - 0{,}78\ i$

Si $k = 2 : 1{,}1\ (\cos 345^{o} + i \operatorname{sen} 345^{o}) = 1{,}06 - 0{,}29\ i$

Gráficamente:



c) $z = \sqrt{3} + i = 2\ (\cos 30^{o} + i \operatorname{sen} 30^{o})$

$$\sqrt[4]{\sqrt{3} + i} = \sqrt[4]{2}\left(\cos \frac{30^{o} + k\ 360^{o}}{4} + i \operatorname{sen} \frac{30^{o} + k\ 360^{o}}{4}\right)$$

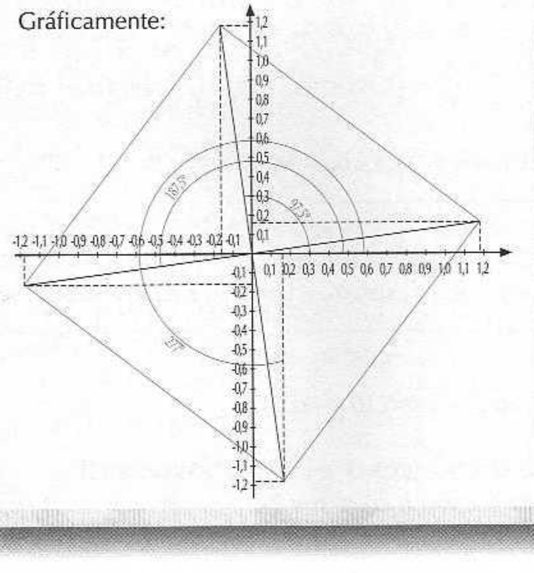
Si $k = 0 : 1{,}19\ (\cos 7{,}5^{o} + i \operatorname{sen} 7{,}5^{o}) = 1{,}18 + 0{,}16\ i$

Si $k = 1 : 1{,}19\ (\cos 97{,}5^{o} + i \operatorname{sen} 97{,}5^{o}) = -\ 0{,}16 + 1{,}18\ i$

Si $k = 2 : 1{,}19\ (\cos 187{,}5^{o} + i \operatorname{sen} 187{,}5^{o}) = -\ 1{,}18 - 0{,}16\ i$

Si $k = 3 : 1{,}19\ (\cos 277{,}5^{o} + i \operatorname{sen} 277{,}5^{o}) = 0{,}16 - 1{,}18\ i$

Gráficamente:



8. Usando la fórmula de De Moivre, hallar una expresión para sen 5 α y para cos 5 α en función de sen α y cos α

Solución:

Se tiene, según la fórmula de De Moivre que $(\cos\alpha + i\ \text{sen}\ \alpha)^5 = \cos 5\alpha + i\ \text{sen}\ 5\alpha$

Desarrollando el primer miembro de esta ecuación de acuerdo al teorema del binomio e igualando tenemos:

$(\cos\alpha + i\ \text{sen}\ \alpha)^5 = \cos 5\alpha + i\ \text{sen}\ 5\alpha$

$$\binom{5}{0}\cos^5\alpha + \binom{5}{1}\cos^4\alpha\ \ i\ \text{sen}\ \alpha + \binom{5}{2}\cos^3\alpha\,(i\ \text{sen}\ \alpha)^2 +$$

$$\binom{5}{3}\cos^2\alpha\,(i\ \text{sen}\ \alpha)^3 + \binom{5}{4}\cos\alpha\,(i\ \text{sen}\ \alpha)^4 + \binom{5}{5}(i\ \text{sen}\ \alpha)^5$$

$= \cos 5\alpha + i\ \text{sen}\ 5\alpha$

$\cos^5\alpha + 5\,i\cos^4\alpha\ \ \text{sen}\alpha - 10\cos^3\alpha\ \ \text{sen}^2\alpha - 10i\cos^2\alpha\ \ \text{sen}^3\alpha + 5\cos\alpha\ \ \text{sen}^4\alpha + i\ \text{sen}^5\alpha = \cos 5\alpha + i\ \text{sen}\ 5\alpha$

$\cos^5\alpha - 10\cos^3\alpha\ \ \text{sen}^2\alpha + 5\cos\alpha\ \ \text{sen}^4\alpha + (5\cos^4\alpha\ \ \text{sen}\alpha - 10\cos^2\alpha\ \ \text{sen}^3\alpha + \text{sen}^5\alpha)\,i = \cos 5\alpha + i\ \text{sen}\ 5\alpha$

De donde:

$\cos 5\alpha = \cos^5\alpha - 10\cos^3\alpha\ \ \text{sen}^2\alpha + 5\cos\alpha\ \ \text{sen}^4\alpha$

$\text{sen}\ 5\alpha = \text{sen}^5\alpha - 10\ \text{sen}^3\alpha\ \ \cos^2\alpha + 5\ \text{sen}\alpha\ \ \cos^4\alpha$

9. Demostrar que si $z_1 = r_1(\cos\alpha_1 + i\ \text{sen}\ \alpha_1)$ y
$z_2 = r_2(\cos\alpha_2 + i\ \text{sen}\ \alpha_2)$, entonces
$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i\ \text{sen}(\alpha_1 + \alpha_2)]$

Solución:

$z_1 \cdot z_2 = [r_1(\cos\alpha_1 + i\ \text{sen}\ \alpha_1)]\,[r_2(\cos\alpha_2 + i\ \text{sen}\ \alpha_2)]$

$= r_1 r_2[\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \text{sen}\ \alpha_1\ \text{sen}\ \alpha_2 + i(\text{sen}\ \alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\alpha_1\ \text{sen}\ \alpha_2)]$

$= r_1 r_2[\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i\ \text{sen}(\alpha_1 + \alpha_2)]$

10. Demostrar que si $z_1 = r_1(\cos\alpha_1 + i\ \text{sen}\ \alpha_1)$ y
$z_2 = r_2(\cos\alpha_2 + i\ \text{sen}\ \alpha_2)$, entonces
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i\ \text{sen}(\alpha_1 - \alpha_2)]$

Solución:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\alpha_1 + i\ \text{sen}\ \alpha_1)}{r_2(\cos\alpha_2 + i\ \text{sen}\ \alpha_2)}\cdot\frac{(\cos\alpha_2 - i\ \text{sen}\ \alpha_2)}{(\cos\alpha_2 - i\ \text{sen}\ \alpha_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\ \frac{\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \text{sen}\ \alpha_1\ \text{sen}\ \alpha_2 + i(\text{sen}\ \alpha_1\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1\ \text{sen}\ \alpha_2)}{\cos^2\alpha_2 + \text{sen}^2\alpha_2}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\ [\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i\ \text{sen}(\alpha_1 - \alpha_2)]$$

11. Demostrar que si $z = r(\cos\alpha + i\ \text{sen}\ \alpha)$, entonces
$z^n = r^n(\cos n\alpha + i\ \text{sen}\ n\alpha)\ \forall\, n \in \mathbb{N}$

Solución:

La demostración de esta fórmula la haremos por inducción. Es decir, la verificamos para n = 1, la suponemos verdadera para n = k y con esta hipótesis la demostramos para n = k + 1.

Si $n = 1$ $\quad z = r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$, verdadero.

Hip: si $n = k$

$z^k = r^k(\cos k\alpha + i \operatorname{sen} k\alpha)$

Tesis: si $n = k + 1$

$z^{k+1} = r^{k+1}[\cos(k+1)\alpha + i \operatorname{sen}(k+1)\alpha]$

Demostración:

Por hipótesis:

$z^k = r^k(\cos k\alpha + i \operatorname{sen} k\alpha) \qquad /\cdot z$

$z^{k+1} = r^k(\cos k\alpha + i \operatorname{sen} k\alpha) \cdot r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$

$z^{k+1} = r^k \cdot r[\cos(k\alpha + \alpha) + i \operatorname{sen}(k\alpha + \alpha)]$

$z^{k+1} = r^{k+1}[\cos(k+1)\alpha + i \operatorname{sen}(k+1)\alpha]$

$\therefore$ Se ha demostrado que:

$z^n = r^n[\cos(n\alpha) + i \operatorname{sen}(n\alpha)]$

12. Demostrar que si $z = r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$, entonces:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)$$

$k = 0, 1, \ldots n - 1$

Solución:

Supongamos que $\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)} = \rho(\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta)$ y encontremos ρ y β

$\sqrt[n]{r\left(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha\right)} = \rho(\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta) \qquad (\ )^n$

$r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha) = \rho^n[\cos(n\beta) + i \operatorname{sen}(n\beta)]$

$\Downarrow$

$$\left.\begin{aligned} r\cos\alpha &= \rho^n\cos(n\beta) \\ r\operatorname{sen}\alpha &= \rho^n\operatorname{sen}(n\beta) \end{aligned}\right| \qquad (\ )^2$$

$$\left.\begin{aligned} r^2\cos^2\alpha &= \rho^{2n}\cos^2(n\beta) \\ r^2\operatorname{sen}^2\alpha &= \rho^{2n}\operatorname{sen}^2(n\beta) \end{aligned}\right| \qquad \text{sumando}$$

$r^2 = \rho^{2n} \Rightarrow \rho = \sqrt[n]{r}$

reemplazando ρ en la segunda ecuación del sistema:

$r\operatorname{sen}\alpha = \left(\sqrt[n]{r}\right)^n \operatorname{sen}(n\beta) \qquad / : r$

$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(n\beta)$

$\Downarrow$

$n\beta = \alpha + 2k\pi$

$\beta = \dfrac{\alpha + 2k\pi}{n} \qquad k = 0, 1, 2\ldots$

Luego,

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)$$

con $k = 0, 1, 2\ldots, n - 1$ ya que para valores de n enteros menores que 0 o mayores que $n - 1$ los valores empiezan a repetirse.

13. Resolver la ecuación $x^6 - 2x^3 = -2$

Solución:

Haciendo $u = x^3$ nos queda $u^2 - 2u + 2 = 0$ cuyas soluciones son: $u_1 = 1 + i$ y $u_2 = 1 - i$

Como $u = x^3$ debemos resolver

a) $x^3 = 1 + i \Rightarrow x = \sqrt[3]{1 + i}$

b) $x^3 = 1 - i \Rightarrow x = \sqrt[3]{1 - i}$

a) $(1 + i)^{1/3} = [\sqrt{2}\,(\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°)]^{1/3}$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{45° + k \cdot 360°}{3} + i \operatorname{sen}\frac{45° + k \cdot 360°}{3}\right)$$

Si $k = 0$: $1{,}12\,(\cos 15° + i \operatorname{sen} 15°) = 1{,}08 + 0{,}29i$

Si $k = 1$: $1{,}12\,(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°) = -0{,}79 + 0{,}79i$

Si $k = 2$: $1{,}12\,(\cos 255° + i \operatorname{sen} 255°) = -0{,}29 - 1{,}08i$

b) $(1 - i)^{1/3} = [\sqrt{2}\,(\cos 315° + i \operatorname{sen} 315°)]^{1/3}$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^{1/3}\left(\cos\frac{315° + k \cdot 360°}{3} + i \operatorname{sen}\frac{315° + k \cdot 360°}{3}\right)$$

Si $k = 0$: $1{,}12\,(\cos 105° + i \operatorname{sen} 105°) = -0{,}29 + 1{,}08i$

Si $k = 1$: $1{,}12\,(\cos 225° + i \operatorname{sen} 225°) = 0{,}79 - 0{,}79i$

Si $k = 2$: $1{,}12\,(\cos 345° + i \operatorname{sen} 345°) = 1{,}08 - 0{,}29i$

Así vemos que las 6 soluciones de la ecuación $x^6 - 2x^3 + 2 = 0$ son

$x_1 = 1{,}08 + 0{,}29i$ $\quad x_2 = -0{,}79 + 0{,}79i$ $\quad x_3 = -0{,}29 - 1{,}08i$

$x_4 = -0{,}29 + 1{,}08i$ $\quad x_5 = 0{,}79 - 0{,}79i$ $\quad x_6 = 1{,}08 - 0{,}29i$

Ejercicios

1. Escriba los siguientes complejos en su forma polar.

a) $1 - i$ **b)** $\sqrt{3} + i$ **c)** $-3 + \sqrt{3}\,i$ **d)** $2 + i$

e) $-2 - 2i$ **f)** $-7 + 3i$ **g)** $6 - 7i$ **h)** $1 + 9i$

i) $10 + i$ **j)** $-6i$ **k)** -5 **l)** $12i$

2. Escriba los siguientes complejos en su forma rectangular $(a + bi)$

a) $4\,(\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°)$ **b)** $3\,(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°)$

c) $\sqrt{3}$ (cos 30° + i sen 30°)
d) cos 60° + i sen 60°
e) 4 (cos 270° + i sen 270°)
f) 2 (cos 210° + i sen 210°)
g) 5 (cos 240° + i sen 240°)
h) 3 (cos 330° + i sen 330°)
i) 12 (cos 180° + i sen 180°)
j) $\frac{1}{2}$ (cos 315° + i sen 315°)
k) $\sqrt{2}$ (cos 225° + i sen 225°)
l) 5 (cos 270° + i sen 270°)

3. Efectúe los siguientes productos $z_1 z_2$
a) $z_1 = 2$ (cos 240° + i sen 240°)
$z_2 = \frac{1}{2}$ (cos 60° + i sen 60°)
b) $z_1 = \sqrt{2}$ (cos 30° + i sen 30°)
$z_2 = \sqrt{6}$ (cos 150° + i sen 150°)
c) $z_1 = 3$ (cos 25° + i sen 25°)
$z_2 = 2$ (cos 65° + i sen 65°)
d) $z_1 = 2$ (cos 130° + i sen 130°)
$z_2 = 5$ (cos 95° + i sen 95°)

4. Efectúe los siguientes productos $z_1 z_2$
a) $z_1 = 3$ (cos 22° + i sen 22°)
z_2 = cos 35° + i sen 35°
b) $z_1 = \sqrt{2}$ (cos 30° + i sen 30°)
$z_2 = 12$ (cos 20° + i sen 20°)
c) $z_1 = 2$ (cos 120° + i sen 120°)
$z_2 = 4$ (cos 100° + i sen 100°)
d) $z_1 = 3$ (cos 220° + i sen 220°)
$z_2 = \sqrt{3}$ (cos 130° + i sen 130°)
e) $z_1 = 2$ (cos 190° + i sen 190°)
$z_2 = 2$ (cos 330° + i sen 330°)

5. Efectúe los siguientes cocientes $\frac{z_1}{z_2}$
a) $z_1 = \sqrt{3}$ (cos 210° + i sen 210°)
$z_2 = 3$ (cos 60° + i sen 60°)
b) $z_1 = 2$ (cos 350° + i sen 350°)
$z_2 = 4$ (cos 140° + i sen 140°)
c) $z_1 = 8$ (cos 10° + i sen 10°)
$z_2 = 4$ (cos 340° + i sen 340°)
d) $z_1 = 6$ (cos 345° + i sen 345°)
$z_2 = 2$ (cos 300° + i sen 300°)

6. Efectúe los siguientes cocientes $\frac{z_1}{z_2}$
a) $z_1 = 3$ (cos 25° + i sen 25°)
$z_2 = 2$ (cos 30° + i sen 30°)
b) $z_1 = \sqrt{3}$ (cos 12° + i sen 12°)
$z_2 = \sqrt{2}$ (cos 10° + i sen 10°)
c) $z_1 = 12$ (cos 130° + i sen 130°)
$z_2 = 4$ (cos 52° + i sen 52°)
d) $z_1 = 5$ (cos 250° + i sen 250°)
$z_2 = 4$ (cos 20° + i sen 20°)
e) $z_1 = \sqrt{2}$ (cos 15° + i sen 15°)
$z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (cos 350° + i sen 350°)

7. Calcule las siguientes potencias:
a) $(3 + 2i)^4$ e) $(-2 - i)^5$
b) $(5 - i)^5$ f) $(-3 + i)^4$
c) $(-5 + 2i)^6$ g) $(1 + 2i)^6$
d) $(1 - i)^4$ h) $(5 - 2i)^3$

8. Calcule el valor de $(1 - i)^{50}$

9. Encuentre todas las raíces indicadas y represéntelas gráficamente
a) $\sqrt[5]{2}$ b) $\sqrt[4]{1+i}$ c) $\sqrt[3]{8-i}$

10. Resuelva la ecuación $x^4 + 1 = 0$

11. Resuelva la ecuación $x^3 + 2 + 2i = 0$

12. Pruebe que:
a) $\text{sen } 3x = 3 \text{ sen } x - 4 \text{ sen}^3 x$
b) $\cos 3x = -3 \cos x + 4 \cos^3 x$

13. Resuelva la ecuación
$x^6 + 4x^3 + 5 = 0$

14. Encuentre dos números que sumados den 4 y multiplicados den 8.

1. a) $\sqrt{2}$ (cos 315° + i sen 315°)

   b) 2 (cos 30° + i sen 30°)

   c) $2\sqrt{3}$ (cos 150° + i sen 150°)

   d) $\sqrt{5}$ (cos 26,5° + i sen 26,5°)

   e) $2\sqrt{2}$ (cos 225° + i sen 225°)

   f) $\sqrt{58}$ (cos 156,8° + i sen 156,8°)

   g) $\sqrt{85}$ (cos 310,6° + i sen 310,6°)

   h) $\sqrt{82}$ (cos 83,7° + i sen 83,7°)

   i) $\sqrt{101}$ (cos 5,7°+ i sen 5,7°)

   j) 6 (cos 270° + i sen 270°)

   k) 5 (cos 180° + i sen 180°)

   l) 12 (cos 90° + i sen 90°)

2. a) $2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,i$ b) $-\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}\,i$

   c) $\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$ d) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$

   e) $-4i$ f) $-\sqrt{3} - i$

   g) $-\frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}\,i$ h) $\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\,i$

   i) -12 j) $+\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\,i$

   k) $-1 - i$ l) $-5i$

3. a) 0.5 – 0.87 i b) $-2\sqrt{3}$

   c) 6i d) $-5\sqrt{2} - 5\sqrt{2}\,i$

4. a) 1,63 + 2,52 i b) 10,9 + 13 i

   c) – 6,13 – 5,14 i d) 5,12 – 0,9 i

   e) – 3,76 + 1,37 i

5. a) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\,i$ b) $-\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}\,i$

   c) $\sqrt{3} + i$ d) $\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}\,i$

6. a) 1,5 – 0,13 i b) 1,22 + 0,04 i

   c) 0,62 + 2,93 i d) – 0,80 – 0,96 i

   e) 1,81 + 0,85 i

7. a) – 119 + 120 i b) 1.900 – 2.876 i

   c) – 15.939 – 18.460 i d) – 4

   e) – 38 – 41 i f) 28 – 96 i

   g) 117 + 44 i h) 65 – 142 i

8. $-2^{25}\,i$

9. a) 1,15; (0,36 + 1,09 i); (– 0,93 + 0,68 i);

   (– 0,93 – 0,68 i); (0,36 – 1,09 i)

   b) (3,92 + 0,78 i); (– 0,78 + 3,92 i);

   (– 3,92 – 0,78 i); (0,78 – 3,92 i)

   c) (– 1,86 + 3,56 i); (– 2,15 – 3,39 i);

   (4,02 – 0,08 i)

10. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,i\right); \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,i\right)$

    $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,i\right); \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,i\right)$

11. (0,37 + 1,37 i); (– 1,37 – 0,37 i); (1 – i)

12. Usar fórmula de De Moivre para $(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)^3$

13. $x_1 = 1,29 + 0,20\,i$

    $x_2 = -0,82 + 1,02\,i$

    $x_3 = -0,47 - 1,22\,i$

    $x_4 = -0,47 + 1,22\,i$

    $x_5 = -0,82 - 1,02\,i$

    $x_6 = 1,29 - 0,20\,i$

14. 2 + 2 i; 2 – 2i

Prueba de selección múltiple

1. El valor de
$\sqrt{-25} + 2\sqrt{-4} - \sqrt{-36}$
es:

A. $3i$
B. $4i$
C. $5i$
D. $6i$
E. $-6i$

2. El inverso aditivo de
$-2-5i$ es:

A. $-2+5i$
B. $2-5i$
C. $2+5i$
D. $-5-2i$
E. $5+2i$

3. Si $z_1 = 4-2i$ y
$z_2 = -3+5i$ entonces
$z_1 + z_2 =$

A. $1-3i$
B. $7+3i$
C. $1+3i$
D. $-1+3i$
E. $-7-3i$

4. Si $z_1 = 2-5i$ y
$z_2 = -5i$ entonces
$z_1 - z_2 =$

A. $2+10i$
B. $2-10i$
C. $-2+10i$
D. $-2-10i$
E. 2

5. Si $z_1 = 3-2i$ y
$z_2 = 4+i$ entonces
$z_1 \bullet z_2 =$

A. $14+5i$
B. $14-5i$
C. $-14-5i$
D. $-14+5i$
E. $5-14i$

6. Si $z_1 = 4-2i$ y
$z_2 = -3+6i$ entonces
$z_1 : z_2 =$

A. $-\frac{8}{15} + \frac{2}{5}i$
B. $\frac{8}{15} - \frac{2}{5}i$
C. $\frac{8}{15} + \frac{2}{5}i$
D. $-\frac{8}{15} - \frac{2}{5}i$
E. $\frac{2}{5} + \frac{8}{15}i$

7. El inverso multiplicativo
de $1+2i$ es:

A. $-\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$
B. $\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$
C. $-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$
D. $1-2i$
E. $-1-2i$

8. El valor de i^{112} es:

A. 0
B. 1
C. -1
D. i
E. $-i$

9. El valor de i^{-13} es:

A. 0
B. 1
C. -1
D. i
E. $-i$

10. El valor de
$(i^{11} + i^{-5})^6$ es:

A. 64
B. -64
C. 32
D. -32
E. 16

11. El valor de
$(-i^{17} + i^{126})^2$ es:

A. 1
B. -1
C. i
D. $-i$
E. $2i$

12. Si $z = -1+3i$
entonces z^2 es:

A. $8-6i$
B. $-8+6i$
C. $-8-6i$
D. $6+8i$
E. $-6+8i$

Prueba de selección múltiple

13. Si $z = -3 + 5i$, entonces $1 + z + z^2 =$

A. $18 - 25i$

B. $-18 - 25i$

C. $18 + 25i$

D. $20 + 25i$

E. $-20 + 25i$

14. El valor de

$\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} + \frac{1}{i^5}$ es:

A. 0

B. 1

C. -1

D. i

E. $-i$

15. Si $z_1 = 2 - i$,

$z_2 = -2i$ y $z_3 = 4 + 2i$,

entonces $\frac{1}{z_1}(z_2 + z_3) =$

A. $\frac{8}{5} + \frac{8}{5}i$

B. $-\frac{8}{5} - \frac{4}{5}i$

C. $\frac{4}{5} + \frac{8}{5}i$

D. $-\frac{4}{5} - \frac{8}{5}i$

E. $\frac{4}{5} - \frac{8}{5}i$

16. Si $z_1 = 4 - 2i$ y $z_2 = 5 + 6i$, entonces $\operatorname{Re}(z_1 z_2)$ es:

A. 9

B. 12

C. 14

D. 20

E. 32

17. Son soluciones de la ecuación

$x^2 - 2x + 5 = 0$

I) $(1 + 2i)$ II) $(1 - 2i)$

III) 2

A. I y II

B. I y III

C. II y III

D. sólo III

E. ninguna

18. La diferencia entre los complejos z_1 y z_2 es: $3 + 6i$, si $z_2 = 2z_1$ entonces z_2 vale

A. $-3 - 6i$

B. $-6 - 12i$

C. $3 - 6i$

D. $6 - 12i$

E. $6 + 12i$

19. Si $z = 1 - i$ y $A \cdot z^2 = 1$, entonces A vale

A. $-\frac{1}{2}i$

B. $\frac{1}{2}i$

C. $1 + 2i$

D. $1 - 2i$

E. $-1 - i$

20. El valor de $(i^{-2} - i^{-1})^{-2}$ es:

A. $2i$

B. $-2i$

C. $\frac{-1}{2i}$

D. $\frac{1}{2i}$

E. $1 - i$

21. En la igualdad $2x - 1 + i = 3 + i$, x vale

A. 0

B. 1

C. 2

D. -1

E. i

22. En la igualdad $(x - 2yi)(1 - i) = 7 + i$ los valores de x e y respectivamente son:

A. $2\ ;\ 3$

B. $3\ ;\ 2$

C. $2\ ;\ -3$

D. $3\ ;\ -2$

E. $-2\ ;\ -3$

23. El número complejo cuyo cuadrado es $3 - 4i$ es:

A. $2 - i$

B. $2 + i$

C. $-2 - i$

D. $-3 + i$

E. $3 - i$

24. Para que $\frac{x + i}{1 + i}$ sea un imaginario puro, x debe valer:

A. 1

B. -1

C. 0

D. 2

E. -2

25. Para que $\frac{1-2i}{3x-i}$ sea un número real, x debe tomar el valor:

A. 6

B. -6

C. $1/6$

D. $-1/6$

E. 1

26. Si $z = 1 - i$, entonces $2z^2 - z + 1$ vale:

A. 3

B. -3

C. $3i$

D. $-3i$

E. $3 + 3i$

27. En la ecuación $z(1-i) + 3 = 1 - 2i + 2z$, z vale:

A. 2

B. -2

C. $2i$

D. $-2i$

E. $1 - 2i$

28. Si $z = 2 - 3i$, la parte imaginaria de $\frac{1}{z^2}$ es:

A. 12

B. $12 \cdot 13$

C. $12 \cdot 13^2$

D. $12 \cdot 13^{-2}$

E. 13

29. El valor de $z \in \mathbb{C}$ que satisface la ecuación $z - \frac{1}{z} = 0$

A. cualquier complejo

B. 1 y -1

C. $1 - 2i$

D. i

E. $-i$

30. Si $z = 1 - 3i$, entonces $\bar{z}$ es:

A. $-1 + 3i$

B. $1 + 3i$

C. $-1 - 3i$

D. $1 + \frac{1}{3}i$

E. $1 - \frac{1}{3}i$

31. Si $z_1 = 1 - 2i$ y $z_2 = 3i$, entonces $\frac{|z_1|}{|z_2|}$ es:

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{2}{3}$

E. 1

32. El valor absoluto de $\frac{i^{10}}{i^4 + i^3}$ es:

A. $\sqrt{2}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. 1

E. $\frac{2}{\sqrt{2}}$

33. El conjugado de $(i^{-5} + i^{-12})^{-1}$ es:

A. $1 + i$

B. $1 - i$

C. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

D. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

E. $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

34. Un complejo cuya parte real es 3 y cuyo valor absoluto es $\sqrt{13}$ es:

A. $-3 + 2i$

B. $-3 + 2i$

C. $3 - 2i$

D. $3 - 3i$

E. $3 + 3i$

35. Un número complejo tal que su cuadrado es la mitad de su conjugado es:

A. $\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$

B. $-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$

C. $\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$

D. $\frac{1}{4} + \frac{3}{4}i$

E. $\frac{1}{4} - \frac{3}{4}i$

36. El complejo $-2 + 2i$ en forma polar es:

A. $2\sqrt{2}$ (cos 45° + i sen 45°)

B. $\sqrt{2}$ (cos 45° + i sen 45°)

C. $2\sqrt{2}$ (cos 135° + i sen 135°)

D. $2\sqrt{2}$ (cos 225° + i sen 225°)

E. $2\sqrt{2}$ (cos 315° + i sen 315°)

Prueba de selección múltiple

37. El complejo 5 (cos 180° + i sen 180°) en su forma cartesiana es:

A. 5
B. -5
C. $5i$
D. $-5i$
E. $-5+5i$

38. Si $z_1 = \sqrt{2}$ (cos 40° + i sen 40°) y $z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (cos 20° + i sen 20°), entonces $z_1 \cdot z_2 =$

A. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
B. $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$
C. $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
D. $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$
E. $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

39. Si $z_1 = 2$ (cos 290° + i sen 290°) y $z_2 = 3$ (cos 100° + i sen 100°), entonces $z_1 \cdot z_2 =$

A. $3\sqrt{3} - 3i$
B. $3\sqrt{3} + 3i$
C. $3 + 3\sqrt{3}i$
D. $3 - 3\sqrt{3}i$
E. $-3\sqrt{3} - 3i$

40. Si $z_1 = 4$ (cos 100° + i sen 100°) y $z_2 = 2$ (cos 55° + i sen 55°), entonces $\frac{z_1}{z_2} =$

A. $2 + 2i$
B. $2 - 2i$
C. $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$
D. $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$
E. $-\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

41. Si $z_1 = 6$ (cos 40° + i sen 40°) y $z_2 = 3$ (cos 280° + i sen 280°), entonces $\frac{z_1}{z_2} =$

A. $-2 - 2\sqrt{3}i$
B. $-1 - \sqrt{3}i$
C. $-1 + \sqrt{3}i$
D. $1 + \sqrt{3}i$
E. $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$

42. El valor de $(-2+i)^5$

A. $-38 + 41i$
B. $-38 - 41i$
C. $38 + 41i$
D. $32 + 41i$
E. $32 - 41i$

43. Son raíces cuarta de -1:

I) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$
II) $-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$
III) $-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$
IV) $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$

A. sólo I
B. sólo I y IV
C. sólo II y III
D. todas
E. ninguna

44. Dos números cuya suma es 5 y su producto es 25 son:

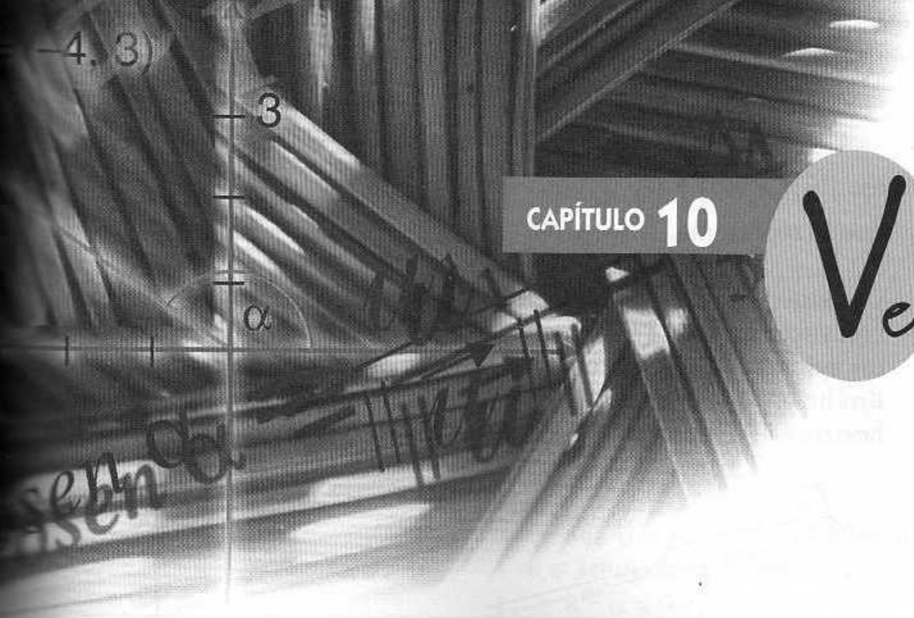
A. $\frac{5+2\sqrt{3}}{2}i$; $\frac{5-2\sqrt{3}}{2}i$
B. $\frac{5+3\sqrt{3}}{2}i$; $\frac{5-3\sqrt{3}}{2}i$
C. $\frac{5+4\sqrt{3}}{2}i$; $\frac{5-4\sqrt{3}}{2}i$
D. $\frac{5+5\sqrt{3}}{2}i$; $\frac{5-5\sqrt{3}}{2}i$
E. $2+\sqrt{3}\,i$; $3-\sqrt{3}\,i$

45. Es solución de la ecuación $x^3 + 2 = -2i$

A. $1 + i$
B. $-1 + i$
C. $2 + i$
D. $-2 + i$
E. $1 - i$

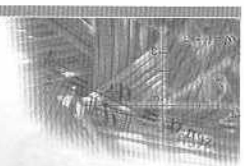
Soluciones

1. A	8. B	15. A	22. D	29. B	36. C	43. D
2. C	9. E	16. E	23. A	30. B	37. B	44. D
3. C	10. B	17. A	24. B	31. B	38. A	45. E
4. E	11. E	18. B	25. C	32. C	39. B	
5. B	12. C	19. B	26. D	33. D	40. C	
6. D	13. B	20. C	27. A	34. C	41. C	
7. B	14. E	21. C	28. D	35. B	42. C	



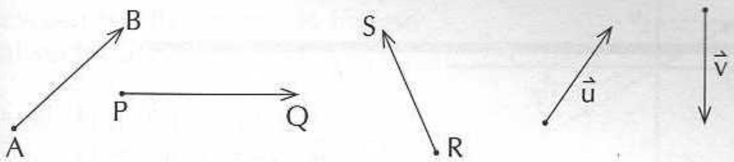
CAPÍTULO 10 Vectores

Definiciones 10.1



Llamamos **vector** a un segmento dirigido. A su punto inicial lo llamamos **origen** y a su punto final **extremo**. Distinguimos el extremo porque en él dibujamos una punta de flecha.

Denotamos un vector: $\overline{AB}$, $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{RS}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$.



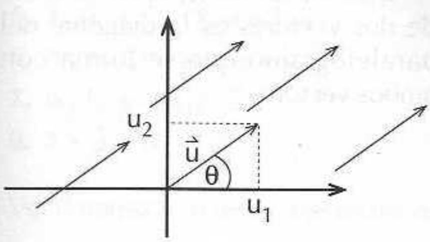
Cada vector se caracteriza por tener **magnitud, dirección** y **sentido**.

La **magnitud** o **longitud** es la distancia entre su origen y su extremo y se llama **valor absoluto, módulo** o **norma** del vector. Se designa por $||\overline{AB}||$ o $||\vec{v}||$.

La **dirección** es la dirección de la recta que contiene al vector y de todas sus paralelas. Se representa por el ángulo θ, que se forma entre la horizontal y la recta que contiene al vector.

Cada dirección admite dos **sentidos**, y éste está dado por la punta de la flecha.

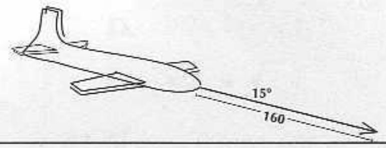
Todos los vectores que trasladados paralelamente coinciden, constituyen el mismo vector. En un sistema de referencia cartesiano, los asimilamos con el vector cuyo origen es el (0, 0) y cuyo extremo es (u_1, u_2).



u_1 y u_2 se llaman coordenadas del vector $\vec{u} = (u_1, u_2)$.

El valor absoluto, módulo o norma del vector $\vec{u} = (u_1, u_2)$ es: $||\vec{u}|| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ y corresponde a la longitud de la flecha que lo representa.

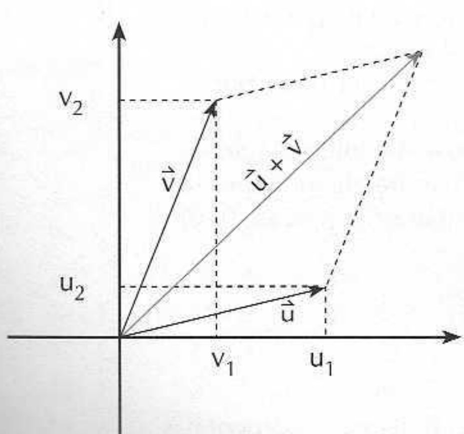
Existen múltiples situaciones de la vida real que se representan con vectores; éstas se llaman magnitudes vectoriales. Por ejemplo: un avión se dirige a aterrizar a una velocidad constante de 160 Km/hr en una trayectoria que forma un ángulo de 15° con la horizontal. El sentido está dado hacia la pista.



Otras situaciones como el número de hijos en una familia, la edad de una persona o el valor de una casa quedan perfectamente definidas con un número. No requieren de una dirección ni de un sentido para precisarlas. Estas se llaman MAGNITUDES ESCALARES.

10.2 Operaciones con Vectores

10.2.1 Suma de vectores

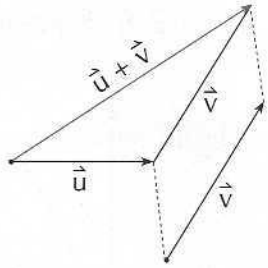


Sean $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ vectores, entonces:

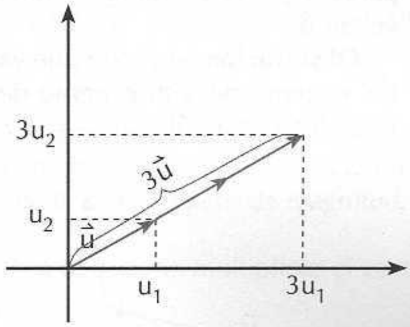
$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

Geométricamente, el vector suma de dos vectores es la diagonal del paralelogramo que se forma con ambos vectores.

También podemos decir que el vector suma está representado por la flecha que resulta al unir el origen de $\vec{u}$ con el extremo de $\vec{v}$, después de haber trasladado paralelamente $\vec{v}$ hasta que su origen coincida con el extremo de $\vec{u}$.



10.2.2 Producto por escalar



Sea $\vec{u} = (u_1, u_2)$ un vector y $k \in \mathbb{R}$ un escalar, entonces:

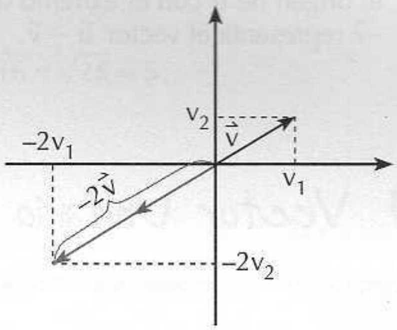
$k \bullet \vec{u} = (ku_1, ku_2)$

Geométricamente, el vector producto por escalar resulta de poner el vector a continuación de sí mismo tantas veces como indica el escalar. En la figura $k = 3$.

Si el escalar es negativo ($k < 0$), entonces el vector producto por escalar resulta de sentido inverso al vector $\vec{u}$.

Nota: El vector $\vec{0} = (0, 0)$

El vector $-\vec{u} = -1 \bullet \vec{u}$



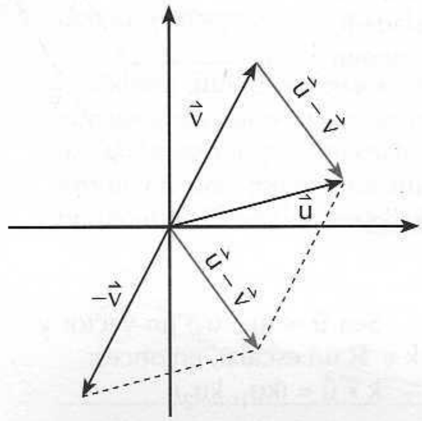
10.2.3. Propiedades de la suma y el producto por escalar

Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores y k_1, k_2 escalares en $\mathbb{R}$.

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2. $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
3. $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
4. $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$
5. $k_1 (\vec{u} + \vec{v}) = k_1\vec{u} + k_1\vec{v}$
6. $(k_1 + k_2)\, \vec{u} = k_1\vec{u} + k_2\vec{u}$
7. $(k_1 k_2)\vec{u} = k_1(k_2\vec{u})$
8. $1 \bullet \vec{u} = \vec{u}$

Ver demostraciones en ejercicios resueltos N°3.

10.2.4 Resta de vectores



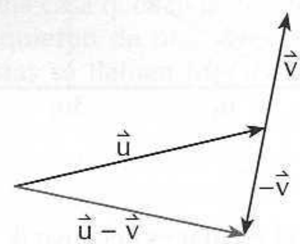
Sean $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ dos vectores, entonces:

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

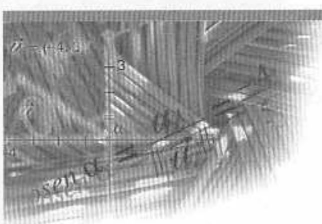
Geométricamente, para restar el vector $\vec{v}$ del vector $\vec{u}$ dibujamos desde el mismo origen de $\vec{u}$ el vector $-\vec{v}$ y la diagonal del paralelogramo así formado es el vector $\vec{u} - \vec{v}$.

Observación: el vector que va del extremo de $\vec{v}$ al extremo de $\vec{u}$ también es $\vec{u} - \vec{v}$.

Además, podemos decir que si a continuación del vector $\vec{u}$ dibujamos $-\vec{v}$, la flecha que une el origen de $\vec{u}$ con el extremo de $-\vec{v}$ representa el vector $\vec{u} - \vec{v}$.



10.3 Vector Unitario



10.3.1 Definición

Se llama VECTOR UNITARIO al vector cuyo valor absoluto o norma es 1.

Ejemplo: $\vec{u} = \left(\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right)$ $\quad ||\vec{u}|| = \sqrt{\frac{144}{169} + \frac{25}{169}} = \sqrt{\frac{169}{169}} = 1$

$\vec{v} = \left(\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ $\quad ||\vec{v}|| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{5}{9}} = \sqrt{\frac{9}{9}} = 1$

Hay dos vectores unitarios especiales denotados por:

$\hat{\imath} = (1, 0)$ $\hat{\jmath} = (0, 1)$

Cualquier vector puede ser escrito como combinación lineal (C.L) de ambos:

Ejemplo: $(5, 2) = 5(1, 0) + 2(0, 1) = 5\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$

Observamos que $\hat{\imath}$ indica la componente horizontal y $\hat{\jmath}$ señala la componente vertical del vector.

10.3.2 Normalizar un vector

Se llama normalizar un vector $\vec{u}$ al procedimiento utilizado para conseguir otro vector $\hat{u}$ con la misma dirección y sentido que el vector original pero de magnitud, módulo o norma 1.

Para ello, basta multiplicar el vector dado por el inverso de su norma:

Ejemplo 1:

Sea $\vec{u} = (3,4)$; $||\vec{u}|| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

Entonces,

$$\hat{u} = \frac{1}{||\vec{u}||} \cdot \vec{u} = \frac{1}{5}(3,4) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

en efecto, $||\hat{u}|| = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = 1$

Ejemplo 2:

Sea $\vec{u} = 2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$; $||\vec{u}|| = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

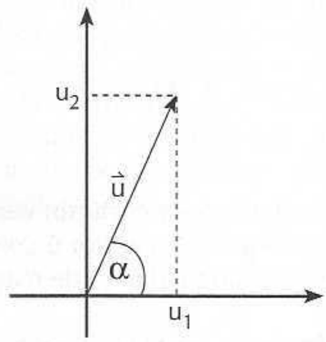
Entonces,

$$\hat{u} = \frac{1}{||\vec{u}||} \cdot \vec{u} = \frac{1}{2\sqrt{5}}(2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}) = \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{\imath} + \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{\jmath}$$

en efecto, $||\hat{u}|| = \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{4}{5}} = 1$

10.4 Descomposición de un vector

Sea $\vec{u} = (u_1, u_2)$ un vector cualquiera. Este puede descomponerse en su parte horizontal y su parte vertical como sigue: llamamos α al ángulo medido desde el eje horizontal al vector $\vec{u}$, entonces:



$\cos \alpha = \dfrac{u_1}{||\vec{u}||}$ y $\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{u_2}{||\vec{u}||}$, luego

$u_1 = ||\vec{u}|| \cos \alpha$ y $u_2 = ||\vec{u}|| \operatorname{sen} \alpha$

Es decir, el vector $\vec{u} = (u_1, u_2)$ puede escribirse:

$\vec{u} = ||\vec{u}|| \cos \alpha \, \hat{\imath} + ||\vec{u}|| \operatorname{sen} \alpha \, \hat{\jmath}$

Ejercicios resueltos

1. Sean $\vec{u} = (2, 4)$, $\vec{v} = (-3, 1)$ y los escalares $k_1 = 3$ y $k_2 = -1$

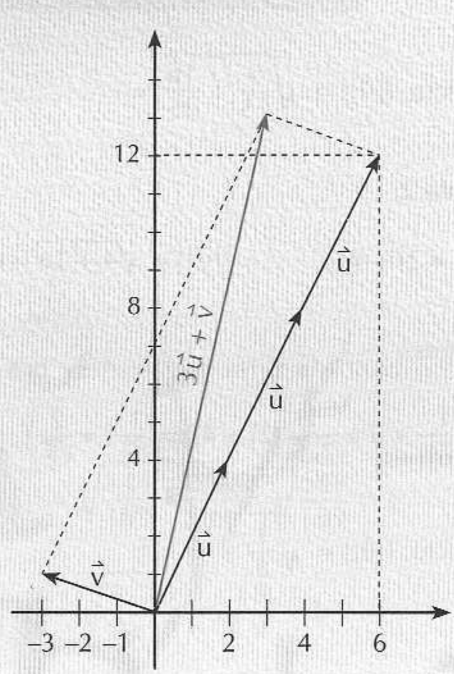
a) Hallar y graficar $k_1\vec{u} + \vec{v}$

b) Calcular $k_2(\vec{u} + \vec{v})$

Solución:

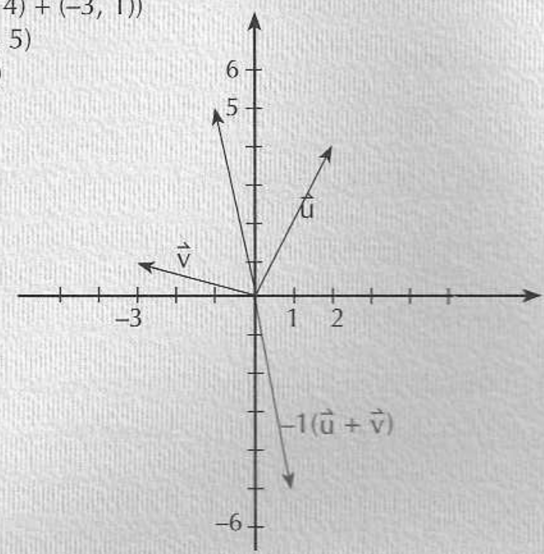
a) $k_1\vec{u} + \vec{v} = 3(2, 4) + (-3, 1)$
$= (6, 12) + (-3, 1)$
$= (3, 13)$

Gráficamente:



b) $k_2(\vec{u} + \vec{v}) = -1((2, 4) + (-3, 1))$
$= -1(-1, 5)$
$= (1, -5)$

Gráficamente:



2. Determinar la norma del vector $\vec{u} = (-5, 3)$

Solución: $||\vec{u}|| = ||(-5, 3)|| = \sqrt{(-5)^2 + 3^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$

3. Demostrar las siguientes propiedades de la suma y el producto por escalar.

a) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

Demostración:

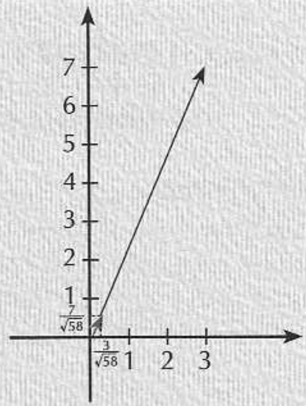
$\vec{u} + \vec{v} = (u_1, u_2) + (v_1, v_2)$ (sumando los vectores)
$= (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ (aplicando conmutatividad de la suma en $\mathbb{R}$)
$= (v_1 + u_1, v_2 + u_2)$ (Descomponiendo una suma de vectores en sumandos)
$= (v_1, v_2) + (u_1, u_2)$
$= \vec{v} + \vec{u}$

b) $(k_1 + k_2)\vec{u} = k_1\vec{u}, k_2\vec{u}$

Demostración:

$(k_1 + k_2)\vec{u} = (k_1 + k_2)(u_1, u_2)$ (multiplicando por escalar)
$= \big((k_1 + k_2)u_1, (k_1 + k_2)u_2\big)$ (aplicando distributividad del producto sobre la suma en $\mathbb{R}$.)
$= (k_1u_1 + k_2u_1, k_1u_2 + k_2u_2)$ (descomponiendo la suma de vectores en sumandos)
$= (k_1u_1, k_1u_2) + (k_2u_1, k_2u_2)$ (aplicando producto por escalar)
$= k_1(u_1, u_2) + k_2(u_1, u_2)$
$= k_1\vec{u} + k_2\vec{u}$

4. Normalizar el vector $\vec{u} = 3\hat{\imath} + 7\hat{\jmath}$



Solución:

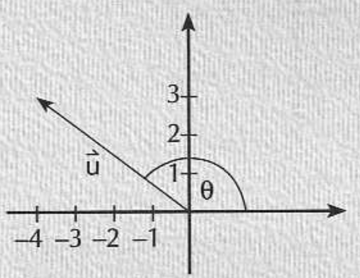
$$\vec{u} = \frac{1}{||\vec{u}||} \bullet \vec{u}$$

$$||\vec{u}|| = \sqrt{9 + 49} = \sqrt{58}$$

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{58}}(3\hat{\imath} + 7\hat{\jmath}) = \frac{3}{\sqrt{58}}\hat{\imath} + \frac{7}{\sqrt{58}}\hat{\jmath}$$

$$\vec{u} \approx (0.4, 0.9)$$

5. Hallar la norma y la dirección del vector $\vec{u} = (-4, 3)$



Solución:

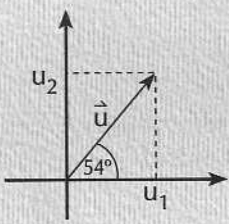
a) $||\vec{u}|| = \sqrt{(-4)^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$

b) $\cos\theta = \dfrac{u_1}{||\vec{u}||} = \dfrac{-4}{5}$

$$\theta = \arccos\left(\frac{-4}{5}\right) = 143{,}1°$$

La norma del vector $\vec{u}$ es 5 y su dirección es de 143,1°.

6. Hallar las componentes horizontal y vertical del vector de norma $\sqrt{12}$ y dirección 54°.



Solución:
Sabemos que

$u_1 = ||\vec{u}||\cos\theta$ y $u_2 = ||\vec{u}||\operatorname{sen}\theta$

Por lo tanto:

$u_1 = \sqrt{12}\cos 54° \approx 3{,}4641 \bullet 0{,}5878 = 2{,}0362$

$u_2 = \sqrt{12}\operatorname{sen} 54° \approx 3{,}4641 \bullet 0{,}8090 = 2{,}8025$

7. Determinar el valor de m para que el vector $\vec{u} = \frac{3}{4}\hat{\imath} + 2m\hat{\jmath}$ sea un vector unitario.

Solución: un vector unitario es aquel cuya norma es 1.
Por lo tanto:

$$||\vec{u}|| = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + (2m)^2} = 1$$

$$\frac{9}{16} + 4m^2 = 1$$

$$4m^2 = \frac{7}{16}$$

$$m^2 = \frac{7}{64}$$

$$m = \pm\frac{\sqrt{7}}{8}$$

Luego los vectores unitarios que resultan son:

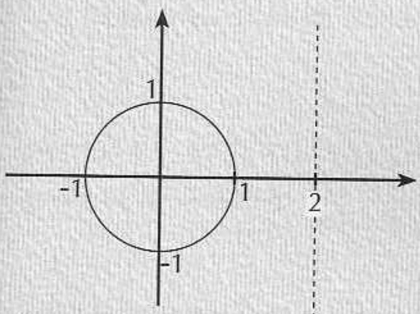
$$\vec{u} = \frac{3}{4}\hat{\imath} + \frac{\sqrt{7}}{8}\hat{\jmath} \qquad \text{y} \qquad \vec{u} = \frac{3}{4}\hat{\imath} - \frac{\sqrt{7}}{8}\hat{\jmath}$$

8. Determinar el valor de m para que el vector $\vec{u} = 2\hat{\imath} + m\hat{\jmath}$ sea un vector unitario.

Solución: Para que $\vec{u}$ sea unitario debemos hacer $||\vec{u}|| = 1$.

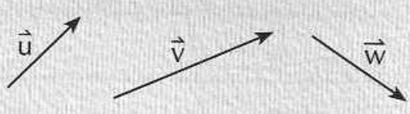
$$||\vec{u}|| = \sqrt{2^2 + m^2} = \sqrt{4 + m^2} = 1$$
$$4 + m^2 = 1$$
$$m^2 = -3$$

No existe un número real tal que su cuadrado sea −3. Esto se debe a que ningún vector de $\mathbb{R}^2$ cuya primera coordenada sea 2 puede ser unitario.



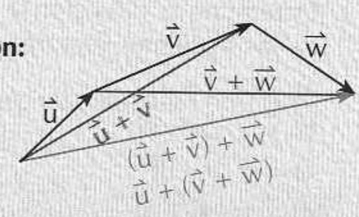
Observe que el lugar geométrico de todos los vectores unitarios es circunferencia de radio 1.

9. Dados los vectores:



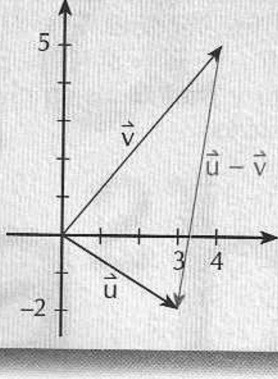
mostrar geométricamente que $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

Solución:

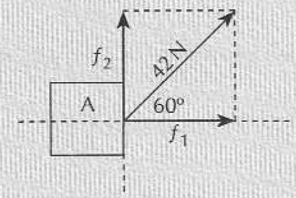


10. Dado los vectores $\vec{u} = (3, -2)$ y $\vec{v} = (4, 5)$, hallar la norma del vector $\vec{u} - \vec{v}$. Graficarlo.

Solución: $||\vec{u} - \vec{v}|| = \sqrt{(3-4)^2 + (-2-5)^2} = \sqrt{1 + 49} = \sqrt{50}$



11. En un punto A de un objeto se aplica una fuerza de 42N en dirección 60°. Calcular la magnitud de la fuerza que actúa en forma horizontal y de la fuerza que actúa en forma vertical.



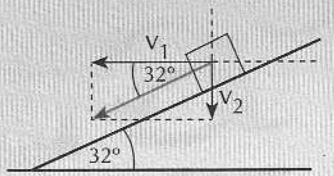
Solución:

$f_1 = 42 \cos 60° = 21\text{N}$

$f_2 = 42 \text{ sen } 60° = 21\sqrt{3}\text{ N}$

La fuerza que actúa en dirección vertical es de $21\sqrt{3}$ N y la que actúa en forma horizontal es de 21N.

12. Un móvil se desliza en un plano inclinado en 32° con una velocidad instantánea de 12 m/seg. Calcular la componente horizontal y la componente vertical de dicha velocidad.



$v_1 = -12 \cos 32° = -10{,}18$ m/seg

$v_2 = -12 \text{ sen } 32° = -6{,}36$ m/seg

Ejercicios

1. Determine cuáles de las siguientes medidas se representan por vectores y cuáles por escalares:

a) 5 hijos

b) 25 panes

c) 18 km/hr

d) $25.000

e) La velocidad de aproximación de un avión.

f) Desaceleración a 5 m/seg^2.

2. Determine la dirección y la norma de los siguientes vectores. Dibújelos en el plano cartesiano.

a) $\vec{u} = (5,2)$

b) $\vec{u} = (2,-7)$

c) $\vec{u} = (-5,1)$

d) $\vec{u} = (-6,-3)$

e) $\vec{u} = (5, \sqrt{2})$

f) $\vec{u} = (-\sqrt{5}, \sqrt{3})$

3. Determine la dirección y la norma de los siguientes vectores.

a) $\vec{v} = 2\hat{\imath} + 7\hat{\jmath}$

b) $\vec{v} = -5\hat{\imath} - 3\hat{\jmath}$

c) $\vec{v} = 2\hat{\imath} - 9\hat{\jmath}$

d) $\vec{v} = -4\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}$

e) $\vec{v} = \frac{1}{3}\hat{\imath} + \frac{25}{4}\hat{\jmath}$

f) $\vec{v} = -3\hat{\imath} + \frac{1}{2}\hat{\jmath}$

4. Realice las siguientes operaciones entre los vectores $\vec{u} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$, $\vec{v} = 4\hat{\imath} - \hat{\jmath}$, $\vec{w} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$, $\vec{p} = -5\hat{\imath}$, $\vec{s} = 6\hat{\jmath}$ y grafiquelos en el sistema cartesiano.

a) $\vec{u} + \vec{v}$

b) $2\vec{u} - 3\vec{v}$

c) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

d) $\vec{u} - 5\vec{p}$

e) $3(\vec{u} + \vec{s})$

f) $\vec{p} - 2\vec{u} + 3\vec{w}$

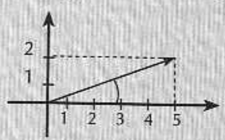
5. Escriba los siguientes vectores como combinación lineal de los vectores $\hat{\imath} = (1, 0)$ y $\hat{\jmath} = (0, 1)$.
   a) $\vec{u} = (2, 5)$
   b) $\vec{v} = (3, -2)$
   c) $\vec{w} = (-8, -3)$
   d) $\vec{u} = (-5, 0)$
   e) $\vec{v} = (7, 0)$
   f) $\vec{w} = (0, -3)$
6. Encuentre un vector unitario que tenga la misma dirección que el vector dado.
   a) $\vec{u} = (4, 2)$
   b) $\vec{u} = (-6, 1)$
   c) $\vec{u} = (5, -3)$
   d) $\vec{u} = (-3, -4)$
   e) $\vec{u} = (3, 8)$
   f) $\vec{u} = (-5, 0)$
7. Encuentre un vector unitario que tenga la misma dirección que el vector dado.
   a) $\vec{v} = 3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}$
   b) $\vec{v} = \hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$
   c) $\vec{v} = -2\hat{\imath} - 6\hat{\jmath}$
   d) $\vec{v} = 4\hat{\imath} - \hat{\jmath}$
   e) $\vec{v} = -6\hat{\imath}$
   f) $\vec{v} = 4\hat{\jmath}$
8. Normalice los siguientes vectores
   a) $\vec{u} = (6, 2)$
   b) $\vec{v} = (-9, 3)$
   c) $\vec{w} = (5, -8)$
   d) $\vec{u} = (-1, -3)$
   e) $\vec{v} = (1, 1)$
   f) $\vec{w} = (0, 5)$
9. Normalice los siguientes vectores.
   a) $\vec{u} = 3\hat{\imath} - 5\hat{\jmath}$
   b) $\vec{v} = -2\hat{\imath} + \hat{\jmath}$
   c) $\vec{w} = -3\hat{\jmath}$
   d) $\vec{u} = 2\hat{\imath} + \sqrt{2}\,\hat{\jmath}$
   e) $\vec{v} = \frac{1}{2}\hat{\imath} - \frac{3}{4}\hat{\jmath}$
   f) $\vec{w} = -\sqrt{5}\,\hat{\imath}$
10. Encuentre la longitud y dirección de los siguientes vectores:
    a) $\vec{u} = (-5, 7)$
    b) $\vec{v} = (3, -2)$
    c) $\vec{w} = (10, 8)$
    d) $\vec{u} = (-6, -3)$
    e) $\vec{v} = (-5, 0)$
    f) $\vec{w} = (0, 3)$
11. Encuentre la longitud y dirección de los siguientes vectores:
    a) $\vec{u} = 2\hat{\imath} - 5\hat{\jmath}$
    b) $\vec{v} = \hat{\imath} + 6\hat{\jmath}$
    c) $\vec{w} = \sqrt{2}\,\hat{\imath} + \sqrt{2}\hat{\jmath}$
    d) $\vec{u} = 5\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}$
    e) $\vec{v} = 2\hat{\imath}$
    f) $\vec{w} = -4\hat{\jmath}$
12. Encuentre las componentes horizontal y vertical de los vectores, conocida su magnitud y su dirección.
    a) $\sqrt{2}$, 45°
    b) 5, 30°
    c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$, 60°
    d) 10, 12°
    e) 12, $\frac{\pi}{4}$
    f) 100, 115°
    g) 25, 90°
    h) 4, 135°
    i) 8, 212°
    j) 3, 270°
    k) 18, $\frac{3\pi}{4}$
    l) 5, π
13. Dados los vectores $\vec{u} = 3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}$ y $\vec{v} = 6\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$, encuentre la norma del vector $2\vec{u} - 3\vec{v}$.
14. Para trasladar horizontalmente un objeto desde un punto A hasta un punto B se aplica una fuerza de 30N en dirección 30°. Calcular la magnitud de la fuerza que actúa en la dirección AB y la fuerza que actúa en dirección normal a AB.

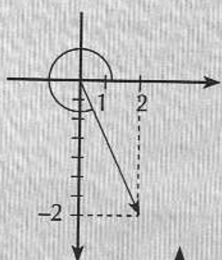
15. Un avión se desplaza en dirección 60° NO a una velocidad de 800 km/hr y no hay viento. Al llegar a cierto punto de su trayectoria se encuentra con un viento sobre él de 60 km/hr en dirección 30° NO. Calcule la velocidad real del avión al ser expuesto a ese viento.

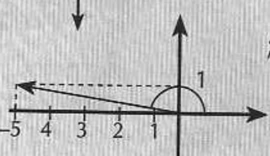
16. Una persona desea cruzar un río en bote a una velocidad media de 32 km/hr y sabe que el agua fluye a 8 km/hr. ¿Qué velocidad y en qué dirección debe imprimir a su bote para mantener un rumbo perpendicular a la orilla del río?

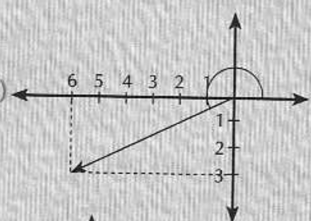
Soluciones

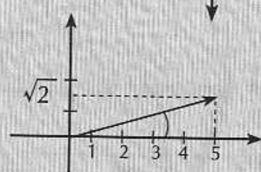
1. a) escalar b) escalar c) vectorial
   d) escalar e) vectorial f) vectorial

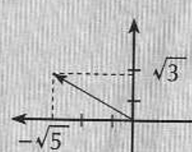
2. a)  ; $\sqrt{29}$; 21,8°

   b)  ; $\sqrt{53}$; 285,9°

   c)  ; $\sqrt{26}$; 168,7°

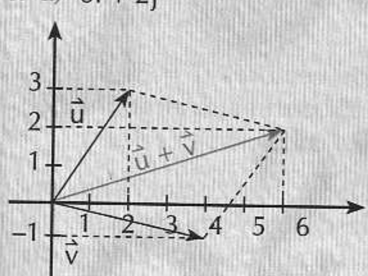
   d)  ; $3\sqrt{5}$; 206,6°

   e)  ; $3\sqrt{3}$; 15,8°

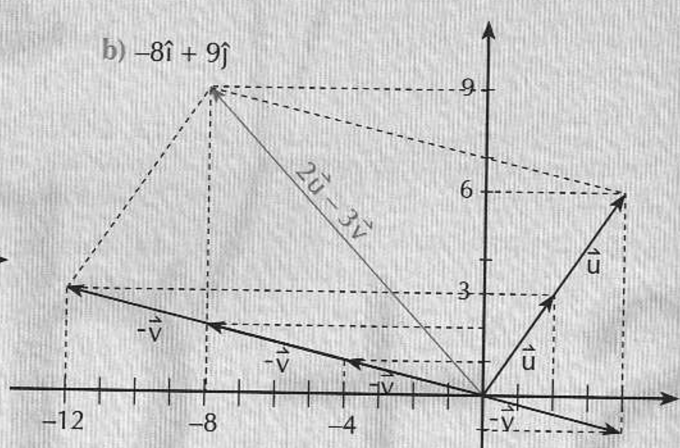
   f)  ; $2\sqrt{2}$; 142,2°

3. a) $\sqrt{53}$; 74,05° b) $\sqrt{34}$; 210,96° c) $\sqrt{85}$; 282,5°
   d) $\sqrt{41}$; 141,34° e) 6,26; 86,95° f) 3,0414; 189,5°

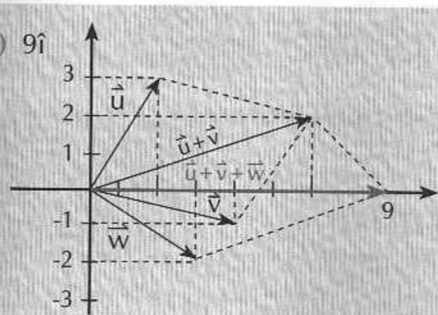
4. a) $6\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$



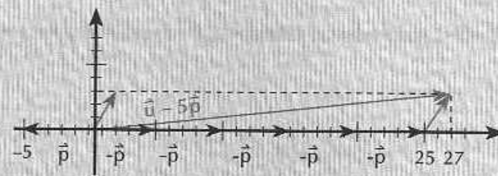
   b) $-8\hat{\imath} + 9\hat{\jmath}$



c) $9\hat{\imath}$



d) $27\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$



e) $6\hat{\imath} + 27\hat{\jmath}$

f) $-12\hat{\jmath}$

5. a) $2\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}$ d) $-5\hat{\imath}$
b) $3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$ e) $7\hat{\jmath}$
c) $-8\hat{\imath} - 3\hat{\jmath}$ f) $-3\hat{\jmath}$

6. a) $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ d) $\left(\frac{-3}{5}, \frac{-4}{5}\right)$
b) $\left(\frac{-6}{\sqrt{37}}, \frac{1}{\sqrt{37}}\right)$ e) $\left(\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{4\sqrt{10}}{5}\right)$
c) $\left(\frac{5}{\sqrt{34}}, \frac{-3}{\sqrt{34}}\right)$ f) $(-1,0)$

7. a) $\frac{3}{\sqrt{34}}\hat{\imath} + \frac{5}{\sqrt{34}}\hat{\jmath}$ d) $\frac{4}{\sqrt{17}}\hat{\imath} - \frac{1}{\sqrt{17}}\hat{\jmath}$
b) $\frac{1}{\sqrt{17}}\hat{\imath} + \frac{4}{\sqrt{17}}\hat{\jmath}$ e) $-\hat{\imath}$
c) $-\frac{1}{\sqrt{10}}\hat{\imath} - \frac{3}{\sqrt{10}}\hat{\jmath}$ f) $\hat{\jmath}$

8. a) $\left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ d) $\left(\frac{-1}{\sqrt{10}}, \frac{-3}{\sqrt{10}}\right)$
b) $\left(\frac{-9}{10}, \frac{3}{10}\right)$ e) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
c) $\left(\frac{5}{\sqrt{93}}, \frac{-8}{\sqrt{93}}\right)$ f) $(0,1)$

9. a) $\frac{3}{\sqrt{34}}\hat{\imath} - \frac{5}{\sqrt{34}}\hat{\jmath}$ d) $\frac{2}{\sqrt{6}}\hat{\imath} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\jmath}$
b) $\frac{-2}{\sqrt{5}}\hat{\imath} + \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{\jmath}$ e) $\frac{2}{\sqrt{13}}\hat{\imath} - \frac{3}{\sqrt{13}}\hat{\jmath}$
c) $-\hat{\jmath}$ f) $-\hat{\imath}$

10. a) 8,6; 125,50° d) $3\sqrt{5}$; 206,57°
b) 3,6; 213,69° e) 5; 180°
c) 12,81; 38,66° f) 3, 90°

11. a) 5,39; 21,80° d) 6,40; 321,34°
b) 6,08; 80,54° e) 2; 0°
c) 2; 45° f) 4; 270°

12. a) (1,1) g) (0, 25)
b) $\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right)$ h) $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$
c) $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$ i) (–6,78; –4,24)
d) (9, 78; 2,08) j) (0, –3)
e) $\left(\frac{12}{\sqrt{2}}, \frac{12}{\sqrt{2}}\right)$ k) $(9\sqrt{2}, -9\sqrt{2})$
f) (–42,26; 90,63) l) (–5, 0)

13. 20

14. $f_1 = 15\sqrt{3}$ $f_2 = 15$

15. El avión se desplaza a 852,47 km/hr en dirección 147,98° NO.

16. 32,98 km/hr; 104° con la orilla.

Producto Punto (o producto escalar) 10.5

10.5.1. Definición

Sean $\vec{u} = (u_1, u_2) = u_1\hat{\imath} + u_2\hat{\jmath}$ y
$\vec{v} = (v_1, v_2) = v_1\hat{\imath} + v_2\hat{\jmath}$ vectores.

Se llama PRODUCTO PUNTO entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ al escalar que se obtiene de la siguiente forma:

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2$$

Ejemplo: $\vec{u} = (3, 2) = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$
$\vec{v} = (5, -6) = 5\hat{\imath} - 6\hat{\jmath}$

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = 3 \bullet 5 + 2 \bullet (-6) = 15 - 12 = 3$$

Nota: El producto punto se llama también producto escalar (no confundir con el producto por escalar) debido a que su resultado es un escalar.

10.5.2. Propiedades

Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores y k un escalar en $\mathbb{R}$, entonces:

1. $(\vec{u} + \vec{v}) \bullet \vec{w} = \vec{u} \bullet \vec{w} + \vec{v} \bullet \vec{w}$

2. $\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$

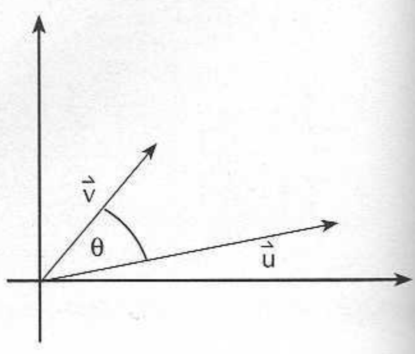
3. $(k\vec{u}) \bullet \vec{v} = \vec{u} \bullet (k\vec{v}) = k(\vec{u} \bullet \vec{v})$

4. $\vec{u} \bullet \vec{u} = ||\vec{u}||^2 > 0$; $\quad \vec{u} \bullet \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

10.5.3 Ángulo entre vectores

Como sabemos, cualquier vector se puede representar por un segmento dirigido con origen en el origen del sistema cartesiano.

Llamamos θ al ángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. El ángulo $0 \le \theta \le \pi$ será cero si ambos vectores tienen igual dirección y sentido y será π si ambos vectores tienen igual dirección y sentidos opuestos.



El ángulo θ formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, ambos distintos de cero, se obtiene a través de la expresión:

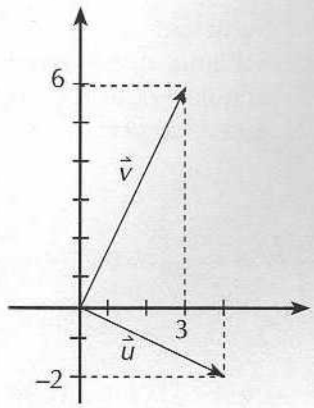
$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{||\vec{u}||\ ||\vec{v}||}$$

Ver ejercicio resuelto n°2

Dos vectores se dicen PARALELOS si están contenidos en la misma recta que pasa por el origen. Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores paralelos, entonces existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = k\,\vec{v}$

Dos vectores se dicen ORTOGONALES si están contenidos en rectas perpendiculares que pasan por el origen. Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales si y sólo si $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$.

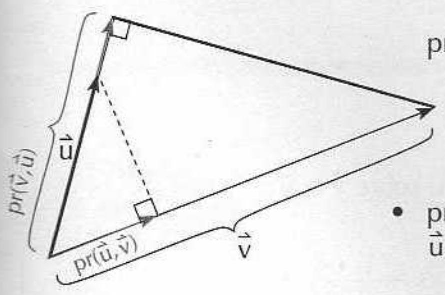
Ejemplo:



Sean $\vec{u} = (4, -2) = 4\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$
$\vec{v} = (3, 6) = 3\hat{\imath} + 6\hat{\jmath}$

$\vec{u} \bullet \vec{v} = 12 + -12 = 0$

10.5.4 Proyección de un vector sobre otro



Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores distintos de cero. Se llama:

- proyección vectorial de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ al vector:

$$pr(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{||\vec{v}||^2}\,\vec{v}$$

- proyección vectorial de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ al vector:

$$pr(\vec{v},\vec{u}) = \frac{\vec{v} \bullet \vec{u}}{||\vec{u}||^2}\,\vec{u}$$

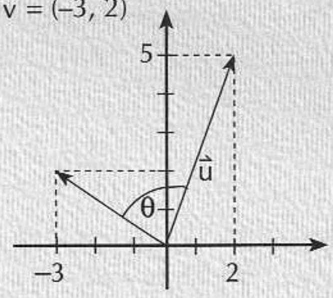
Ver ejercicio n°4

Ejercicios resueltos

1. Dados los vectores $\vec{u} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$, $\vec{v} = -\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}$ y $\vec{w} = 6\hat{\imath} - 3\hat{\jmath}$. Hallar $(\vec{u} + \vec{v}) \bullet \vec{w}$

   Solución:
   Primero sumamos $\vec{u} + \vec{v} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{\imath} + 5\hat{\jmath} = 2\hat{\imath} + 7\hat{\jmath}$
   Ahora hacemos $(\vec{u} + \vec{v}) \bullet \vec{w} = (2\hat{\imath} + 7\hat{\jmath}) \bullet (6\hat{\imath} - 3\hat{\jmath})$
   $= 2 \bullet 6 + 7(-3) = -9$

2. Determinar el ángulo formado por los vectores $\vec{u} = (2, 5)$ y $\vec{v} = (-3, 2)$



   Solución:
   Sabemos que el coseno del ángulo entre dos vectores está dado por:

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|} = \frac{2 \bullet -3 + 5 \bullet 2}{\sqrt{29} \bullet \sqrt{13}} = \frac{4}{\sqrt{377}} \approx 0{,}2060$$

$$\theta = 78{,}1°$$

3. Hallar el valor de m para que los vectores $\vec{u} = m\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}$ y $\vec{v} = 4\hat{\imath} - (1 + m)\hat{\jmath}$ sean ortogonales.

   Solución:
   Para que dos vectores sean ortogonales, el ángulo θ formado entre ellos debe ser de 90°; por lo tanto, $\cos\theta = \cos 90° = 0$

   Sabemos que $\cos\theta = \dfrac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|}$

   Para que este valor sea cero, $\vec{u} \bullet \vec{v}$ debe ser cero,

$$\begin{aligned} \therefore\ \vec{u} \bullet \vec{v} = 4m - 5(1 + m) &= 0 \\ 4m - 5 - 5m &= 0 \\ -5 - m &= 5 \\ m &= -5 \end{aligned}$$

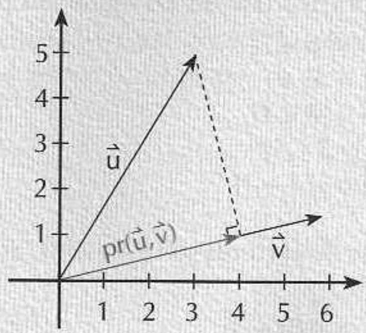
4. Determinar la proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ si $\vec{u} = 3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}$ y $\vec{v} = 6\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$.

   Solución: Sabemos que $\mathrm{pr}(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \bullet \vec{v}$

   Es decir, $\mathrm{pr}(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{3 \bullet 6 + 5 \bullet 2}{40}(6\hat{\imath} + 2\hat{\jmath})$

$$= \frac{28}{40}(6\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}) = \frac{21}{5}\hat{\imath} + \frac{7}{5}\hat{\jmath}.$$

Gráficamente:



5. Determinar el ángulo obtuso del triángulo ABC sabiendo que $A = (3, 1)$, $B = (6, 6)$ y $C = (-2, 2)$.

Solución:

Tenemos que: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

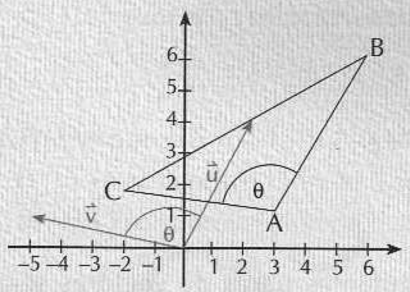
$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{AB} = (6, 6) - (3, 1) = (3, 5)$

y $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$

$\therefore \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{AC} = (-2, 2) - (3, 1) = (-5, 1)$



Si llamamos $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (3, 5)$ y $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (-5, 1)$ el problema se reduce a calcular el ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Luego $\cos\theta = \dfrac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{||\vec{u}||\ ||\vec{v}||} = \dfrac{-15 + 5}{\sqrt{34} \bullet \sqrt{26}} = \dfrac{-10}{2\sqrt{221}} \approx -0{,}3363$

Así $\theta = \cos^{-1}(-0{,}3363) = 109{,}65°$

Ejercicios

1. Dados los vectores $\vec{u} = (3, -1)$, $\vec{v} = (5, 2)$ y $\vec{w} = (1, 6)$. Calcule.

a) $\vec{u} \bullet \vec{v}$
b) $\vec{u} \bullet \vec{w}$
c) $\vec{v} \bullet \vec{w}$
d) $(\vec{u} + \vec{v}) \bullet \vec{w}$
e) $3\vec{u} \bullet \vec{v}$
f) $\vec{u} \bullet 3\vec{v}$
g) $3\vec{u} \bullet 2\vec{v}$
h) $\vec{u} \bullet \vec{u}$
i) $\vec{w} \bullet \vec{w}$

Ejercicios

2. Encuentre el ángulo formado por cada uno de los siguientes pares de vectores.

a) $\vec{u} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath}$ $\quad\vec{v} = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$
b) $\vec{u} = -3\hat{\imath} - \hat{\jmath}$ $\quad\vec{v} = 5\hat{\imath} + \hat{\jmath}$
c) $\vec{u} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$ $\quad\vec{v} = -\hat{\imath} - 3\hat{\jmath}$
d) $\vec{u} = 4\hat{\imath} + \hat{\jmath}$ $\quad\vec{v} = \hat{\imath} + 5\hat{\jmath}$
e) $\vec{u} = 3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}$ $\quad\vec{v} = -5\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$

3. Determine si los siguientes pares de vectores son paralelos. Si lo son, determine si tienen igual o distinto sentido.

a) $\vec{u} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$ $\quad\vec{v} = 4{,}5\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$
b) $\vec{u} = \hat{\imath} + 5\hat{\jmath}$ $\quad\vec{v} = -\hat{\imath} - 5\hat{\jmath}$
c) $\vec{u} = 12\hat{\imath} - 6\hat{\jmath}$ $\quad\vec{v} = -16\hat{\imath} + 8\hat{\jmath}$
d) $\vec{u} = -\sqrt{2}\hat{\imath} + \sqrt{2}\hat{\jmath}$ $\quad\vec{v} = 2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$
e) $\vec{u} = -2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}$ $\quad\vec{v} = -3\hat{\imath} + 6\hat{\jmath}$
f) $\vec{u} = 5\hat{\imath} + \hat{\jmath}$ $\quad\vec{v} = 6\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$

4. Determine cuáles de los siguientes pares de vectores son ortogonales y cuáles no lo son.

a) $\vec{u} = 2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath}$ $\quad\vec{v} = 4\hat{\imath} + \hat{\jmath}$
b) $\vec{u} = 6\hat{\imath} - \hat{\jmath}$ $\quad\vec{v} = 3\hat{\imath} - 18\hat{\jmath}$
c) $\vec{u} = 6\hat{\imath} - \hat{\jmath}$ $\quad\vec{v} = -3\hat{\imath} - 18\hat{\jmath}$
d) $\vec{u} = 4\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$ $\quad\vec{v} = -\hat{\imath} - \hat{\jmath}$
e) $\vec{u} = 5\hat{\imath}$ $\quad\vec{v} = -8\hat{\jmath}$
f) $\vec{u} = 6\hat{\imath}$ $\quad\vec{v} = -12\hat{\imath}$

5. Encuentre el valor de m para que los siguientes pares de vectores sean ortogonales.

a) $\vec{u} = 3\hat{\imath} - m\hat{\jmath}$ $\quad\vec{v} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$
b) $\vec{u} = m\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$ $\quad\vec{v} = 2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath}$
c) $\vec{u} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath}$ $\quad\vec{v} = m\hat{\imath} + \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right)\hat{\jmath}$
d) $\vec{u} = \frac{1}{2}\hat{\imath} + \frac{3}{4}\hat{\jmath}$ $\quad\vec{v} = \hat{\imath} - m\hat{\jmath}$
e) $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\imath} - \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\jmath}$ $\quad\vec{v} = (m + 1)\hat{\imath} - \hat{\jmath}$
f) $\vec{u} = 2m\hat{\imath} - \hat{\jmath}$ $\quad\vec{v} = 4\hat{\imath} + 6m\hat{\jmath}$

6. Encuentre el o los valores de m para que los siguientes pares de vectores sean ortogonales. Analice la pertinencia de las soluciones.

a) $\vec{u} = 2m\hat{\imath} - 3\hat{\jmath}$ $\quad\vec{v} = m\hat{\imath} - (m + 1)\hat{\jmath}$
b) $\vec{u} = 4\hat{\imath} - 2m\hat{\jmath}$ $\quad\vec{v} = 5\hat{\imath} - m\hat{\jmath}$
c) $\vec{u} = (3m - 1)\hat{\imath} - 2$ $\quad\vec{v} = m\hat{\imath} + 6\hat{\jmath}$
d) $\vec{u} = m\hat{\imath} - 3m\hat{\jmath}$ $\quad\vec{v} = 6\hat{\imath} + (2m - 1)\hat{\jmath}$
e) $\vec{u} = \hat{\imath} + \hat{\jmath}$ $\quad\vec{v} = m\hat{\imath} - 2m\hat{\jmath}$
f) $\vec{u} = -5\hat{\imath} - m\hat{\jmath}$ $\quad\vec{v} = -3\hat{\imath} + (m + 2)\hat{\jmath}$

7. Demuestre que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

8. Determine la proyección del vector $\vec{u}$ sobre el vector $\vec{v}$ y la proyección del vector $\vec{v}$ sobre el vector $\vec{u}$. Grafique.

a) $\vec{u} = -5\hat{\imath} + \hat{\jmath}$ $\qquad \vec{v} = 6\hat{\jmath}$

b) $\vec{u} = 5\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$ $\qquad \vec{v} = \hat{\imath} + 8\hat{\jmath}$

c) $\vec{u} = -\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$ $\qquad \vec{v} = 6\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}$

d) $\vec{u} = \frac{3}{4}\hat{\imath} + 9\hat{\jmath}$ $\qquad \vec{v} = \sqrt{2}\hat{\imath} - 3\hat{\jmath}$

e) $\vec{u} = 6\hat{\imath}$ $\qquad \vec{v} = 3\hat{\imath} - 5\hat{\jmath}$

9. Dado el vector $\vec{u} = 5\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$, encuentre su proyección sobre el eje *x* y sobre el eje *y*.

10. Dado el vector $\vec{u} = 3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}$

a) Encuentre $\vec{u} \cdot \hat{\imath}$

b) Encuentre $\vec{u} \cdot \hat{\jmath}$

c) Compare estas soluciones con las del ejercicio anterior. Establezca alguna conclusión.

11. Pruebe que si $\vec{u} = u_1\hat{\imath} + u_2\hat{\jmath}$, entonces:

i) $\vec{u} \cdot \hat{\imath}$ es la proyección de $\vec{u}$ sobre el eje *x*.

ii) $\vec{u} \cdot \hat{\jmath}$ es la proyección de $\vec{u}$ sobre el eje *y*.

12. Encuentre un vector cualquiera que sea ortogonal al vector dado:

a) $\vec{u} = (3, -6)$

b) $\vec{u} = (-1, 15)$

c) $\vec{u} = (2, -3)$

d) $\vec{u} = (-5, -1)$

e) $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$

f) $\vec{u} = (-\sqrt{2}, \sqrt{3})$

g) $\vec{u} = (2{,}5; -3)$

h) $\vec{u} = (-0{,}5; -3{,}5)$

13. Un vector de $\mathbb{R}^2$ es un par ordenado $\vec{u} = (u_1, u_2)$. Generalizando, un vector de $\mathbb{R}^n$ es una n-upla ordenada.

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \ldots..u_n)$

Pruebe que en $\mathbb{R}^n$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

14. Sean $\vec{u} = (3\sqrt{3}, 3)$, $\vec{v} = (3, 3\sqrt{3})$ y $\vec{w} = (-3, 3\sqrt{3})$. Determine el ángulo formado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$, el ángulo formado por $\vec{u}$ y $\vec{w}$ y el ángulo formado por $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

Ejercicios

15. Determine el ángulo obtuso del triángulo formado por los puntos A=(2, 2), B=(5, 1) y C=(1, 5)

16. Se tienen los puntos A=(2, 1), B=(0, 3) y C=(6, 0). Determine el ángulo obtuso del triángulo ABC.

17. Sea ABC el triángulo formado por los vértices A=(–4, 2), B=(1, –4) y C=(3, 6). Determine la medida de los segmentos en que h_c divide al lado AB.

18. Sea ABC el triángulo formado por los vértices A=(–1, –1), B=(4, 2) y C=(–4, 3). Calcule medida de los segmentos en que la altura h_b divide al lado AC.

19. Sea ABC el triángulo formado por los vértices A=(–1, 3), B=(4, –2) y C=(8, 3). Determine la medida de los segmentos que h_a genera en el lado BC.

20. Encuentre ambas alturas del paralelogramo formado por los vectores $\vec{u} = (6, 2)$ y $\vec{v} = (3, 4)$.

21. Sea ABCD el paralelogramo cuyos vértices son A=(0, 0), B=(6, –4), C=(9, –2), D=(3, 2). Determine su área.

Soluciones

1. a) 13 b) -3 c) 17 d) 14 e) 39 f) 39 g) 78 h) 10 i) 37

2. a) 90° b) 172,9° c) 45° d) 64,65° e) 90°

3. a) sí, igual. b) sí, distinto. c) sí, distinto. d) no. e) no. f) no.

4. a) no. b) no. c) sí. d) no. e) sí. f) no.

5. a) $-\frac{3}{2}$ b) 3 c) $-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}$ d) $\frac{2}{3}$ e) –2 f) 0.

6. a) No existe. b) No existe. c) $\frac{1 \pm \sqrt{73}}{6}$

   d) $\frac{1}{2}$; si m = 0, $\vec{u} = 0$ y no podemos hablar de ortogonalidad.

   e) No existe. f) 3, –5.

7. $\vec{u} \bullet \vec{v} = (u_1, u_2) \bullet (v_1, v_2) = u_1v_1 + u_2v_2 = v_1u_1 + v_2u_2 = (v_1, v_2) \bullet (u_1, u_2) = \vec{v} \bullet \vec{u}$.

8. a) $\hat{j}$ b) $0{,}3\hat{i} + 2{,}6\hat{j}$ c) $1{,}08\hat{i} + 0{,}9\hat{j}$ d) $-3{,}33\hat{i} + 7{,}27\hat{j}$ e) $1{,}59\hat{i} - 2{,}65\hat{j}$.

9. $5\hat{i}$; $2\hat{j}$.

10. a) $3\hat{i}$ b) $5\hat{j}$.

11. a) Representemos el eje x por el vector $\vec{v} = (x, 0) = x\hat{i}$, $pr(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{u_1\,x + u_2\,0}{x^2} \bullet x\hat{i} = u_1\hat{i}$ que es la proyección del vector $\vec{u}$ sobre el eje x.
b) Idem considerando al eje y como el vector $\vec{v} = (0, y)$.

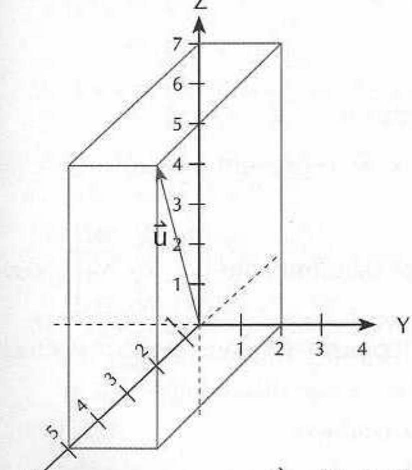
12. a) (2, 1) b) (15, 1) c) (6, 4) d) (2, −10) e) (2, −3) f) $(\frac{\sqrt{6}}{2}, 1)$ g) $(\frac{12}{15}, 2)$ h) (−7, 1)

13. Ver respuesta ejercicio 7.
14. 30°, 90°, 60°.
15. 126,87°
16. 120,9°.
17. 1,42; 6,39.
18. 5,6; 0,6.
19. 0,78; 5,62.
20. 2,85; 3,6.
21. 24.

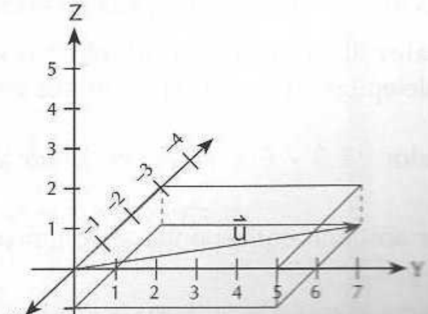
Vectores en el espacio $\mathbb{R}^3$ 10.6

10.6.1 Definiciones

Un vector de $\mathbb{R}^3$ es un segmento dirigido en el espacio tridimensional. Análogamente a lo enunciado en el punto 10.1, todos los vectores de $\mathbb{R}^3$ pueden considerarse con origen en el origen del sistema cartesiano y extremo en cualquier punto del espacio.



$\vec{u} = (5, 2, 7)$



$\vec{u} = (-3, 5, -1)$

Llamamos:

$\hat{\imath} = (1, 0, 0)$ al vector unitario en la dirección x.
$\hat{\jmath} = (0, 1, 0)$ al vector unitario en la dirección y.
$\hat{k} = (0, 0, 1)$ al vector unitario en la dirección z.

Cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ se puede escribir como combinación lineal de los vectores $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$.

Las operaciones vectoriales mencionadas en el presente capítulo se extienden todas a $\mathbb{R}^3$. Ver ejercicios resueltos.

Además:

$\hat{\imath} \bullet \hat{\imath} = 1$	$\hat{\imath} \bullet \hat{\jmath} = 0$
$\hat{\jmath} \bullet \hat{\jmath} = 1$	$\hat{\imath} \bullet \hat{k} = 0$
$\hat{k} \bullet \hat{k} = 1$	$\hat{\jmath} \bullet \hat{k} = 0$

10.6.2. Producto vectorial o producto cruz

En forma especial se define el producto vectorial o producto cruz para vectores de $\mathbb{R}^3$ de la siguiente forma:

Sean: $\vec{u} = u_1\hat{\imath} + u_2\hat{\jmath} + u_3\hat{k}$ y
$\vec{v} = v_1\hat{\imath} + v_2\hat{\jmath} + v_3\hat{k}$ vectores de $\mathbb{R}^3$

entonces el producto vectorial entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es el vector:

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\hat{\imath} - (u_3v_1 - u_1v_3)\hat{\jmath} + (u_1v_2 - u_2v_1)\hat{k}$$

Obsérvese que los coeficientes de $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$ son el desarrollo de determinantes 2 x 2 (ver cap. 9.5), por lo tanto:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \hat{\imath} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \hat{\jmath} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \hat{k} \qquad \text{o}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Observaciones:

1. El vector $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ es ortogonal al vector $\vec{u}$ y al vector $\vec{v}$.
2. El valor absoluto del producto "mixto" $\vec{u} \bullet \vec{v} \times \vec{w}$ representa el volumen del paralelepípedo generado por los tres vectores.
3. El valor de $\vec{u} \bullet \vec{v} \times \vec{w}$ se encuentra al calcular el determinante $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$, cuyo valor absoluto corresponde al volumen del paralelepípedo formado por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.
4. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$ que forman un ángulo θ, entonces, $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|$ sen θ. (Ver ejercicio resuelto nº 2).

Ejercicios resueltos

1. Dados $\vec{u} = (3, 2, 5)$ y $\vec{v} = (-3, 1, 0)$, encuentre $\vec{u} \times \vec{v}$ y $\vec{v} \times \vec{u}$.

Solución:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 3 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5\hat{\imath} - 15\hat{\jmath} + 9\hat{k}$$

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 5\hat{\imath} + 15\hat{\jmath} - 9\hat{k}$$

Observamos que el vector $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$, es decir, al conmutar dos vectores en un producto cruz se generan vectores en sentidos opuestos y con igual magnitud.

2. Dados los vectores $\vec{u} = (3, 1, 5)$ y $\vec{v} = (4, 2, -3)$.

   a) Calcular el ángulo θ formado por ellos.

   b) Calcular $||\vec{u}||\ ||\vec{v}||$ sen θ.

   c) Calcular $||\vec{u} \times \vec{v}||$.

   d) Comparar los valores de b) y c).

Solución:

a) Sabemos que $\cos\theta = \dfrac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{||\vec{u}||\ ||\vec{v}||}$.

$$\cos\theta = \frac{3 \bullet 4 + 1 \bullet 2 + 5 \bullet {}^{-}3}{\sqrt{9+1+25} \bullet \sqrt{16+4+9}} = \frac{-1}{\sqrt{1.015}} \approx -0{,}0314$$

de donde $\theta = 91{,}7987°$.

b) $||\vec{u}||\ ||\vec{v}||$ sen $\theta = \sqrt{35} \bullet \sqrt{29}$ sen $91{,}7987° = 31{,}843$.

c) $$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 3 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-3-10)\hat{\imath} - (-9-20)\hat{\jmath} + (6-4)\hat{k}$$

$\vec{u} \times \vec{v} = (-13, 29, 2)$ y

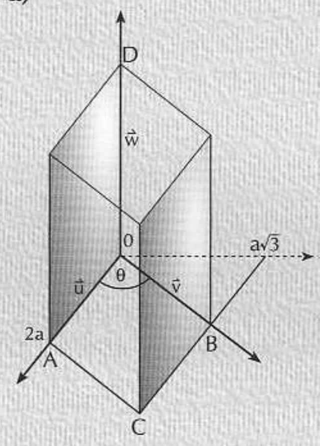
$||\vec{u} \times \vec{v}|| = \sqrt{169 + 841 + 4} = \sqrt{1.014} \approx 31{,}843$

d) Los resultados de b) y c) son iguales. Con ello hemos dado un ejemplo de que $||\vec{u} \times \vec{v}|| = ||\vec{u}||\ ||\vec{v}||$ sen θ, donde θ es el ángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

3. Determinar el volumen del paralelepípedo formado por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{u} \times \vec{v}$ en $\mathbb{R}^3$ si $\vec{u} = (2a, 0, 0)$, $\vec{v} = (a, a\sqrt{3}, 0)$.

Solución: Veremos dos formas.

a)



Calculemos $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}$.

$$\vec{w} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2a & 0 & 0 \\ a & a\sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} = 0\hat{\imath} - 0\hat{\jmath} + 2\sqrt{3}a^2\hat{k}$$

$$\vec{w} = (0, 0, 2\sqrt{3}\, a^2)$$

Se trata entonces de un paralelepípedo cuya base es el paralelogramo ACBO y su altura es $||\vec{w}|| = OD$

El área de las bases OA × BA (base • altura), donde $OA = ||\vec{u}||$ y $BA = ||\vec{v}||$ sen θ.

$$\text{Sen}\, \theta = \frac{a\sqrt{3}}{||\vec{v}||} \qquad \therefore\ BA = a\sqrt{3}$$

$$||\vec{u}|| = \sqrt{4a^2} = 2a\ \therefore\ A_{ACBO} = 2a \times a\sqrt{3} = 2a^2\sqrt{3}.$$

El volumen del paralelepípedo es:

$$V = A_{ACBD} \bullet OD = 2a^2\sqrt{3} \bullet 2\sqrt{3}a^2 = 12a^4$$

b) Otra forma.
Sabemos que el volumen del paralelepípedo formado por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es el valor absoluto del cálculo de $\vec{u} \bullet \vec{v} \times \vec{w}$; y

$$\vec{u} \bullet \vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} 2a & 0 & 0 \\ a & a\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2a^2\sqrt{3} \end{vmatrix} = 2a \bullet a\sqrt{3} \bullet 2a^2\sqrt{3} = 12a^4$$

Luego el volumen del paralelepípedo es $12a^4$.

Ejercicios

1. Grafique los siguientes vectores:
   a) $\vec{u} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 5\hat{k}$
   b) $\vec{u} = 5\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$
   c) $\vec{u} = \hat{\imath} + 6\hat{\jmath} - 3\hat{k}$
   d) $\vec{u} = -2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - 5\hat{k}$
   e) $\vec{u} = -3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 4\hat{k}$
   f) $\vec{u} = -3\hat{\imath} - 6\hat{\jmath} + 5\hat{k}$
2. Dados los vectores $\vec{u} = (3, 2, 1)$ y $\vec{v} = (5, 4, 2)$, calcule $\vec{u} \times \vec{v}$ y $\vec{v} \times \vec{u}$. Compare ambos resultados.
3. Dadas las siguientes parejas de vectores en $\mathbb{R}^3$, calcule $\vec{u} \times \vec{v}$ y $\vec{v} \times \vec{u}$ en cada caso y grafíquelos.
   a) $\vec{u} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 0\hat{k}$ $\quad$ $\vec{v} = 4\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 0\hat{k}$
   b) $\vec{u} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 0\hat{k}$ $\quad$ $\vec{v} = 5\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 0\hat{k}$
   c) $\vec{u} = -3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} + 0\hat{k}$ $\quad$ $\vec{v} = -2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 0\hat{k}$
4. Dadas las siguientes parejas de vectores de $\mathbb{R}^3$, calcule $\vec{u} \times \vec{v}$ y $\vec{v} \times \vec{u}$ en cada caso y grafíquelos.
   a) $\vec{u} = 2\hat{\imath} + 3\hat{k}$ $\quad$ $\vec{v} = 4\hat{\imath} - 5\hat{k}$
   b) $\vec{u} = \hat{\imath} + 2\hat{k}$ $\quad$ $\vec{v} = -\hat{\imath} + 2\hat{k}$
   c) $\vec{u} = 5\hat{\imath} - \hat{k}$ $\quad$ $\vec{v} = 5\hat{\imath} + 2\hat{k}$
5. Dadas las siguientes parejas de vectores de $\mathbb{R}^3$, calcule $\vec{u} \times \vec{v}$ y $\vec{v} \times \vec{u}$ en cada caso y grafíquelos.
   a) $\vec{u} = 2\hat{\jmath} - 3\hat{k}$ $\quad$ $\vec{v} = \hat{\jmath} + 4\hat{k}$
   b) $\vec{u} = 3\hat{\jmath} - 6\hat{k}$ $\quad$ $\vec{v} = 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}$
   c) $\vec{u} = -3\hat{\jmath} + \hat{k}$ $\quad$ $\vec{v} = 4\hat{\jmath} - 4\hat{k}$
6. Calcule un vector normal a los vectores $\vec{u} = (2, 2, 1)$ y $\vec{v} = (1, 1, -5)$
7. Calcule m para que el vector $\vec{w} = (5, m+1, -2)$ sea normal a los vectores $\vec{u} = (5, 3, -1)$ y $\vec{v} = (4, 2, 1)$
8. Sean $\vec{u} = (5, 2, 0)$ y $\vec{v} = (2, -5, 0)$ dos vectores :
   a) Calcule $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$
   b) Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w}$
   c) Calcule $\vec{v} \cdot \vec{u} \times \vec{w}$
   d) Grafique el paralelepípedo generado por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.
   e) Calcule el volumen de dicho paralelepípedo.
9. Sean $\vec{u} = (0, 3, 4)$ y $\vec{v} = (0, 4, -3)$ dos vectores
   a) Calcule $\vec{w}_1 = \vec{u} \times \vec{v}$
   b) Calcule $\vec{w}_2 = \vec{v} \times \vec{u}$
   c) Grafique el paralelepípedo formado por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ en ambos casos.
   d) Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w}$ en ambos casos.
   e) Calcule el volumen de los paralelepípedos construidos en c.

10. Sean $\vec{u} = 3\hat{\imath} + \hat{k}$ y $\vec{v} = -2\hat{\imath} + 6\hat{k}$ dos vectores

   a) Calcule $\vec{w}_1 = \vec{u} \times \vec{v}$

   b) Calcule $\vec{w}_2 = \vec{v} \times \vec{u}$

   c) Grafique los paralelepípedos formados por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}_1$ y $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}_2$.

   d) Calcule $\vec{u} \bullet \vec{v} \times \vec{w}_1$ y $\vec{v} \bullet \vec{u} \times \vec{w}_1$

   e) Calcule $\vec{u} \bullet \vec{v} \times \vec{w}_2$ y $\vec{v} \bullet \vec{u} \times \vec{w}_2$

   f) Calcular el volumen de los paralelepípedos graficados en c.

11. Sean $\vec{u} = (1, -2, 3)$ y $\vec{v} = (-5, 1, 2)$. Calcule:

   a) $\vec{w}_1 = \vec{u} \times \vec{v}$

   b) $\vec{w}_2 = \vec{v} \times \vec{u}$

   c) Calcule el volumen de los paralelepípedos generados por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}_1$ y $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}_2$.

12. Dados los puntos A(3, 2, 1) y B(6, 4, 5). Calcule las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$.

13. Las componentes del vector $\overrightarrow{AB}$ son (3, 0, 4) y las coordenadas del punto B son (0, 3, 1). Halle las coordenadas del punto A.

14. Calcule el ángulo formado por los vectores $\vec{u} = (4, 3, 1)$ y el eje vertical representado por el vector $\vec{w} = (0, 0, 2)$.

15. Calcule el ángulo formado por los vectores $\vec{u} = 5\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 3\hat{k}$ y $\vec{v} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$.

Soluciones

2. $\vec{u} \times \vec{v} = (0, -1, 2)$; $\vec{v} \times \vec{u} = (0, 1, -2)$; $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$
3. a) $-10\hat{k}$; $10\hat{k}$ b) $-13\hat{k}$; $13\hat{k}$ c) $19\hat{k}$; $-19\hat{k}$
4. a) $22\hat{\jmath}$, $-22\hat{\jmath}$ b) $2\hat{\jmath}$; $-2\hat{\jmath}$ c) $-5\hat{\jmath}$; $5\hat{\jmath}$
5. a) $11\hat{\imath}$, $-11\hat{\imath}$ b) $18\hat{\imath}$; $-18\hat{\imath}$ c) $8\hat{\imath}$; $-8\hat{\imath}$
6. (−11,11,0)
7. m = −2.
8. a) $\vec{w} = -29\hat{k}$ b) 841 c) −841 e) 841
9. a) $-21\hat{\imath}$ b) $21\hat{\imath}$ d) 525 e) Ambos tienen volumen 525
10. a) $-20\hat{\jmath}$ b) $20\hat{\jmath}$ d) −400; 400 e) 400; −400.
    f) Ambos tienen volumen 400.
11. a) (−7, 13, 11) b) (7, −13, −11) c) 369
12. (3, 2, 4)
13. (−3, 3, −3)
14. 78,69°
15. 97,61°

Prueba de selección múltiple

1. Si $\vec{u} = (2, 1)$ y $\vec{v} = (3, 2)$, entonces $\vec{u} + \vec{v}$ es:

A. (2, 3)

B. (6, 2)

C. (5, 3)

D. (2, 3,

E. (–2, –1)

2. Si $\vec{u} = (-1, 0)$ y $\vec{v} = (3, -1)$ entonces $2\vec{u} - 3\vec{v}$ es:

A. (–10, –3)

B. (–10, 3)

C. (10, –3)

D. (–11, 3)

E. (11, 3)

3. El valor de k para que $\vec{u} = (k, -1, 1)$ y $\vec{v} = (1, 1)$ sean iguales es:

A. 0

B. 1

C. 2

D. –2

E. –1

4. La longitud del vector $\vec{u} = (0, 1, 1)$ es:

A. 1

B. 2

C. $\sqrt{2}$

D. 3

E. $\sqrt{3}$

5. Los vectores $\vec{u} = (-1, 3, 2)$ y $\vec{v} = (1, -3, -2)$ difieren en:

A. Sólo magnitud.

B. Sólo sentido.

C. Sólo dirección.

D. Dirección y sentido.

E. Magnitud y sentido.

6. Si $\vec{u} = (-1, 1, 1)$, entonces $||\vec{u}||$ vale:

A. 0

B. 1

C. 2

D. $\sqrt{2}$

E. $\sqrt{3}$

7. Si $\vec{u} = (-3, -1)$, entonces el vector unitario en la dirección de $\vec{u}$ es:

A. $\vec{u} = (-3, -1)$

B. $\vec{u} = (\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}},)$

C. $\vec{u} = (\frac{-3}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}})$

D. $\vec{u} = (\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}})$

E. $\vec{u} = (\frac{-3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}},)$

8. Si el vector $\vec{u}$ tiene dirección α, entonces la componente vertical de $\vec{u}$ es:

A. $\vec{u} \cos \alpha$

B. $\vec{u}$ sen α

C. $||\vec{u}|| \cos \alpha$

D. $||\vec{u}||$ sen α

E. $\vec{u} \bullet \vec{u}$

9. El vector unitario en la dirección y sentido del vector $\vec{u}$ se expresa por:

A. $\vec{u} = ||\vec{u}||\ \vec{u}$

B. $\vec{u} = \frac{\vec{u}}{||\vec{u}||}$

C. $\vec{u} = (1, 1)$

D. $\vec{u} = ||\vec{u}||$

E. $\vec{u} = \frac{1}{||\vec{u}||}$

10. El vector unitario del vector $\vec{u} = (12,5)$ es:

A. $(\frac{12}{\sqrt{13}}, \frac{5}{\sqrt{13}})$

B. $(\frac{-5}{\sqrt{13}}, \frac{12}{\sqrt{13}})$

C. $(\frac{5}{\sqrt{13}}, \frac{12}{\sqrt{13}})$

D. $(\frac{12}{13}, \frac{5}{13})$

E. $(\frac{5}{13}, \frac{12}{13})$

11. Si $\vec{u} = (\sqrt{3}, 1)$, el ángulo que forma con el eje x, es decir, su dirección, es:

A. 60°

B. 30°

C. 45°

D. 120°

E. 150°

Prueba de selección múltiple

12. Sea $\vec{u} = m\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$. El valor de m para que $\vec{u}$ sea unitario es:

A. $\frac{1}{2}$

B. $-\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $-\frac{1}{4}$

E. No existe.

13. Si $\vec{u} = \frac{1}{m}\hat{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\jmath}$, el valor de m para que $\vec{u}$ sea unitario es:

A. ± 1

B. 0

C. ± 2

D. $\pm\frac{1}{2}$

E. $\pm\frac{1}{3}$

14. Si $\vec{u} = 2\hat{\imath} - 5\hat{\jmath}$ y $\vec{v} = -3\hat{\imath} + \hat{\jmath}$, la norma del vector $\vec{u} - \vec{v}$ es:

A. 11

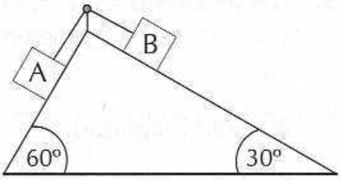
B. $\sqrt{25}$

C. $\sqrt{36}$

D. $\sqrt{61}$

E. 1

15. En la figura, el cuerpo A pesa 15 kg y B pesa 10 kg. Prescindiendo de la fuerza de roce podemos decir que:



A. El sistema se desplaza hacia el lado de A.

B. El sistema se desplaza hacia el lado de B.

C. El sistema está en equilibrio.

D. No se puede decidir.

E. En el desplazamiento sólo interviene la inclinación del plano.

16. Si la magnitud del vector $\vec{u}$ es $\sqrt{2}$ y su dirección es 225°, entonces sus componentes son:

A. (1, 1)

B. (1, –1)

C. (–1, 1)

D. (–1, –1)

E. $(0, \sqrt{2})$

17. Si $\vec{u} = (3, 2)$ y $\vec{v} = (-5, 1)$, entonces $\vec{u} \bullet \vec{v}$ es:

A. 0

B. 3

C. 5

D. 12

E. 15

18. De los vectores $\vec{u} = (2, -1)$; $\vec{v} = (-1, -2)$; $\vec{w} = (-4, 2)$ y $\vec{o} = (4,2)$ son ortogonales:

A. $\vec{w}$ y $\vec{o}$

B. $\vec{u}$ y $\vec{w}$

C. $\vec{v}$ y $\vec{o}$

D. $\vec{u}$ y $\vec{v}$

E. $\vec{u}$ y $\vec{o}$

19. Si $\vec{u} = 2\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}$; $\vec{v} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$ y $\vec{w} = 3\hat{\imath} - \hat{\jmath}$, entonces $\vec{u} + \vec{v} \bullet \vec{w}$ es:

A. –3

B. 3

C. 6

D. –6

E. 9

20. El valor de m para que $\vec{u} = \hat{\imath} - m\hat{\jmath}$ y $\vec{v} = (1 - m)\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$ sean ortogonales es:

A. 0

B. 1

C. –1

D. $\frac{1}{3}$

E. $-\frac{1}{3}$

21. Si $\vec{u} = 2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$ y $\vec{v} = 5\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$, entonces el vector pr $(\vec{u}, \vec{v})$ es:

A. $\frac{5}{17}\hat{\imath} + \frac{3}{17}\hat{\jmath}$

B. $\frac{2}{17}\hat{\imath} + \frac{4}{17}\hat{\jmath}$

C. $\frac{55}{17}\hat{\imath} + \frac{33}{17}\hat{\jmath}$

D. $\frac{33}{17}\hat{\imath} + \frac{55}{17}\hat{\jmath}$

E. $\frac{33}{\sqrt{17}}\hat{\imath} + \frac{55}{\sqrt{17}}\hat{\jmath}$

22. Si $\vec{u} = 2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$ y $\vec{v} = 5\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$, entonces el vector pr($\vec{v}$, $\vec{u}$) es:

A. $\hat{\imath} + \frac{3}{5}\hat{\jmath}$

B. $\frac{2}{5}\hat{\imath} + \frac{4}{5}\hat{\jmath}$

C. $\frac{22}{5}\hat{\imath} + \frac{11}{5}\hat{\jmath}$

D. $\frac{11}{5}\hat{\imath} + \frac{22}{5}\hat{\jmath}$

E. $\frac{11}{\sqrt{5}}\hat{\imath} + \frac{22}{\sqrt{5}}\hat{\jmath}$

23. El vector (3, 4, –2) es igual a:

A. 3(1,0,0) – 4(0,1,0) – 2(0,0,1)

B. 3(1,0,0) + 4(0,1,0) + 2(0,0,1)

C. 3(1,0,0) – 4(0,1,0) – 2(0,0,1)

D. 3(1,0,0) + 4(0,1,0) – 2(0,0,1)

E. –3(1,0,0) + 4(0,1,0) + 2(0,0,1)

24. Si $\vec{u}$ = (1, 0, 1) y $\vec{v}$ = (2, 1, 0) entonces $\vec{u} \times \vec{v}$ es:

A. (1, 2, 1)

B. (–1, –2, –1)

C. (–1, –2 ,1)

D. (–1, 2, –1)

E. (–1, 2 ,1)

25. Si $\vec{u} = 2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + \hat{k}$ y $\vec{v} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}$ entonces $\vec{u} \times \vec{v}$ es:

A. (2, 5, 3)

B. (2, 5, –3)

C. (2, 3, 5)

D. (2, –3, –5)

E. (2, –3, 5)

26. El vector normal a los vectores $\vec{u}$ = (2, 1, 1) y $\vec{v}$ = (1, –1, 3) es:

A. $4\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + 3\hat{k}$

B. $4\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} - 3\hat{k}$

C. $-4\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} - 3\hat{k}$

D. $-4\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + 3\hat{k}$

E. $4\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} + 3\hat{k}$

27. Son normales al vector $\vec{u} = 3\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}$ los vectores:

I) $3\hat{\imath} - \hat{\jmath} - 10\hat{k}$

II) $-2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 3\hat{k}$

III) $2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 3\hat{k}$

A. Sólo I

B. Sólo II

C. Sólo III

D. Sólo I y II

E. I, II y III

28. Sean A = (2, 5, 1) y B =(–3, 2, 1) dos puntos, entonces las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ son:

A. (5, –3, 1)

B. (5, –3, 0)

C. (–5, –3, 1)

D. (–5, 3, 0)

E. (–5, –3, 0)

29. Los componentes del vector $\overrightarrow{AB}$ son (5, 2, –1) y las coordenadas del punto A son (0, 3, 2). Las coordenadas del punto B son:

A. (5, 5, 1)

B. (5, 1, –3)

C. (5, 5, –1)

D. (5, –1, 3)

E. (5, –5, –1)

30. El ángulo formado por los vectores $\vec{u}$ = (1, 1, 1) y $\vec{v}$ = (1, –2, 1) es:

A. 30°

B. 45°

C. 60°

D. 90°

E. 180°

Soluciones

1) C	11) B	21) C
2) D	12) E	22) D
3) C	13) C	23) D
4) C	14) D	24) E
5) B	15) B	25) C
6) E	16) D	26) B
7) C	17) D	27) E
8) D	18) D	28) E
9) B	19) C	29) A
10) D	20) D	30) D

CAPÍTULO 11

Matrices y determinantes

Conceptos básicos 11.1

Definición: Se denomina MATRIZ a una ordenación rectangular de elementos. Estos elementos serán en general números reales.

En esta ordenación rectangular distinguimos las FILAS de la matriz, que son las líneas de elementos ordenados horizontalmente, y las COLUMNAS de la matriz, que son las líneas de elementos ordenados verticalmente.

Si la matriz tiene m filas y n columnas se dice que es de **orden** $m \times n$ o su **dimensión** es $m \times n$.

Cada elemento de la matriz está entonces identificado por la posición que ocupa, esto es, está en la intersección de una fila y una columna.

Denotamos la matriz A de dimensión $m \times n$ por $A = [a_{ij}]\ m \times n$, donde cada a_{ij} representa el elemento situado en la fila i y en la columna j. Es claro que $1 \leq i \leq m$
$1 \leq j \leq n$

Si la matriz consta de sólo 1 fila se llama matriz fila o vector fila. Si consta de una sola columna, se llama matriz columna o vector columna.

EJEMPLOS:

1. Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ es una matriz de orden 2×3 (2 filas y 3 columnas)

2. $A = [1 \quad 2 \quad 2 \quad -3]$ es una matriz fila de orden 1×4.

Ejercicios

1. Dada la siguiente tabla de notas:

	P1	P2	P3	P4
Altamira	6.1	6.5	4.9	3.1
Contreras	2.3	3.9	4.9	6.4
Fernández	5.1	2.8	3.1	4.8
Martínez	2.6	3.4	3.8	5.3
Valdés	6.3	6.6	3.7	6.9
Zamora	4.6	4.8	5.3	6.6

Responda las siguientes preguntas:

a) ¿Qué nota obtuvo el 1^er alumno en la 3ª prueba?

b) ¿Qué nota obtuvo el 3^er alumno en la 1ª prueba?

c) ¿Cuál es la mejor nota del 4° alumno?

d) ¿Quién y en qué prueba sacó la nota más baja?

e) ¿Quién y en qué prueba sacó la nota más alta?

2. Determine el orden de las siguientes matrices:

a) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ **d)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **f)** $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. Determine el número de elementos de una matriz si su orden es:

a) 2×5

b) 2×2

c) 3×4

d) 6×3

e) $m \times n$

f) $n \times p$

4. Dada la siguiente tabla, señale:

	junio	julio	agos.	sept.
Detergente	\$448	\$452	\$452	\$490
Colonia	\$820	\$779	\$790	\$800
Lavaloza	\$375	\$375	\$390	\$410
Limpiavid.	\$440	\$430	\$450	\$460
Lustramueb.	\$400	\$410	\$430	\$470

a) Precio de lavaloza en los meses de agosto y septiembre.

b) Diferencia de precios de limpiavidrio entre junio y septiembre.

c) Porcentaje de la colonia entre junio y julio.

d) Diferencia de precios entre lavaloza y detergente en el mes de agosto.

5. Dada la matriz: $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

a) Determine el orden de M.

b) Escriba los elementos m_{12}; m_{53}; m_{24}; m_{33}.

c) Escriba los elementos de la 5ª fila.

d) Escriba los elementos de la 3ª columna.

e) Calcule $2\,m_{34} - 3\,m_{43}$

f) Calcule $m_{11} + m_{22} + m_{33} + m_{44}$

6. Escriba con los siguientes elementos: $-3, 2, 5, 0, 3, 1, 9, 12, -3, -5, 1, 0$, (se supone que están leídos por filas) una matriz cuyo orden es:

a) 2×6 **b)** 3×4 **c)** 4×3 **d)** 6×2

7. Escriba una matriz M de orden 3×3 que cumpla las siguientes condiciones:

a) los elementos de la 2ª columna son 1, 2, 3

b) los elementos de la 3ª fila son 2, 3, 1

c) $a_{11} = a_{22} + a_{33}$

d) $a_{13} = a_{31}$

e) $a_{12} = a_{21}$

f) $a_{23} = a_{21} + a_{22}$

8. Determine en cada caso una matriz que cumpla la condición indicada.

a) $A_{[3 \times 4]}$ $a_i = 0$ si $i = j$

b) $A_{[4 \times 3]}$ $a_{ij} = 1$ si $i > j$

c) $A_{[2 \times 3]}$ $a_{ij} = i + j$

d) $A_{[3 \times 3]}$ $a_{ij} = i - j^2$

e) $A_{[4 \times 3]}$ $a_{ij} = i + j - 1$

9. Construya una matriz M (3×3) de modo que cumpla las siguientes condiciones:

a) $a_{22} = 0$

b) $a_{23} = 2$

c) $a_{32} = a_{21} = 1$

d) $a_{32} = a_{13}$

e) $a_{12} = a_{33} = -a_{32}$

f) $a_{11} = a_{31} = -a_{23}$

Soluciones

1. a) 4.9 b) 5.1 c) 5.3
   d) 2° alumno; 1ª prueba.
   e) 5° alumno, 4ª prueba.
2. a) 2×3 b) 3×2 c) 4×3
   d) 3×4 e) 1×3 f) 2×1
3. a) 10 b) 4 c) 12
   d) 18 e) m n f) n p
4. a) \$ 390 y \$ 410 b) \$ 20
   c) El precio disminuyó un 5% d) \$ 62
5. a) 5×4 b) 2; –1; 0; –2. c) 5 2 –1 –1
   d) 1 –2 –2 3 – 1 e) –1 f) 4
6. a) $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 5 & 0 & 3 & 1 \\ 9 & 12 & -3 & -5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 9 & 12 \\ -3 & -5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

   c) $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 9 & 12 & -3 \\ -5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 0 \\ 3 & 1 \\ 9 & 12 \\ -3 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
7. –
8. –
9. $\begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Igualdad y adición de matrices 11.2

11.2.1 Matrices iguales

Dos matrices **son iguales** si se cumple:

a) Tienen el mismo orden, es decir, el mismo número de filas y el mismo número de columnas.

b) Los elementos correspondientes a igual fila e igual columna son iguales.

11.2.2 Adición de matrices

Sean A y B dos matrices de orden $m \times n$.

Definimos la **ADICIÓN** de A y B por:

$A + B = C$ si y sólo si

$a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$ donde $1 \leq i \leq m$

$1 \leq j \leq n.$

Observación:

1. La matriz resultante C también es de orden $m \times n$.
2. No es posible sumar dos matrices que difieran ya sea en el número de filas, en el número de columnas o en ambos.

11.2.3 Propiedades de la adición

Sean A, B y C matrices de orden $m \times n$. (escribimos $A \in M_{m \times n}, B \in M_{m \times n}, \ldots$), entonces:

1. La matriz $A + B$ también es de orden $m \times n$, es decir:
   $A \in M_{m \times n}$ y $B \in M_{m \times n}$, entonces $A + B \in M_{m \times n}$.
   Ésta es la propiedad de la CLAUSURA.
2. $A + B = B + A$
   La adición de matrices es conmutativa.
3. $(A + B) + C = A + (B + C)$
   La adición de matrices es asociativa.
4. Existe la matriz nula de orden $m \times n$ tal que:
   $A + 0 = A$
   donde la matriz $0 = [a_{ij}]$ con $a_{ij} = 0 \ \forall i, \forall j$
5. Existe la matriz inversa
   $\forall A \in M_{m \times n}, \exists (-A) \in M_{m \times n} \Rightarrow A + (-A) = 0$
   El conjunto de las matrices con la operación ADICIÓN recién definida y las propiedades que posee tiene estructura de GRUPO ABELIANO O GRUPO CONMUTATIVO.

Ejercicios resueltos

1. Determinemos el valor de las incógnitas si $A = B$ siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -y \\ -3 & x \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} a & -2 \\ b & 5 \end{bmatrix}$$

Aplicando directamente la definición de igualdad de matrices tenemos que:

$a = 2 \qquad y = 2 \qquad b = -3 \qquad x = 5$

2. Determinemos el valor de x e y si $A = B$ y

$$A = [2 \ -x] \quad B = \begin{bmatrix} y \\ -3 \end{bmatrix}$$

En este caso A tiene orden 1×2 y B tiene orden 2×1; por lo tanto, NO puede haber igualdad.

3. Determinemos los valores de las incógnitas si $A = B$ siendo

$$A = \begin{bmatrix} u+v & 2 & x \\ 3 & w & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & u-v & 3 \\ -y & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Aquí tenemos $\left.\begin{matrix} u+v = 4 \\ u-v = 2 \end{matrix}\right\} \rightarrow \quad u = 3 \ ; \ v = 1$

$$x = 3$$
$$y = -3$$
$$w = 1$$

4. Obtengamos la suma de A y B siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \text{ y } \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ambas tienen el mismo orden; por lo tanto, se pueden sumar. Sumamos los elementos correspondientes y obtenemos:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+0 & -3+2 \\ -1+-2 & 2+5 \\ 4+1 & -2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 7 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

5. Aplicando las propiedades de la adición en las matrices podemos resolver ecuaciones matriciales.
Resolvamos A + X = B siendo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 12 & -1 \end{bmatrix}$$

Si A + X = B, entonces sumando la matriz opuesta de A, que se denota (–A) a ambos lados, obtenemos:

X = B + (–A)

para obtener (–A) cambiamos el signo de cada elemento de A. Así:

$$X = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 12 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -8 \end{bmatrix}$$

$X = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ 11 & -9 \end{bmatrix}$ y efectivamente, sumando A y X se obtiene B.

Ejercicios

1. Determine el valor de la(s) variable(s) si en cada caso A = B siendo:

a) $A = [1 \quad 0] \qquad B = [x \quad y]$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 2 & x & y \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} a & 3 & -4 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $A = [a+b \quad a-b] \quad B = [4 \quad -2]$

e) $A = \begin{bmatrix} 2x & y+1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

f) $A = \begin{bmatrix} x+y & 1-y \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3x & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

g) $A = \begin{bmatrix} x^2 \\ 3y \\ z+1 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

h) $A = \begin{bmatrix} u+v & 2 \\ x & 2-y \\ u-x & w \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2x & 2 \\ 2x-3 & -2y \\ 5 & y+1 \end{bmatrix}$

i) $A = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & \frac{-z}{3} \\ x+y & 12 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} -6z & w \\ 5 & x-y \end{bmatrix}$

j) $A = [a^2 + b^2 \; 2a]$ $B = [a^2 - b^2 \; 9]$

2. Dadas las matrices A y B, determine en cada caso la suma A + B.

a) $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 4 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{3} & 3\sqrt{5} \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & -3\sqrt{3} & 5\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

e) $A = \begin{bmatrix} a+2b & -3a \\ 2b-a & a+b \\ b-5a & 3a \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2a-b & 2b \\ 3b-2a & -3a \\ a+4b & b-7a \end{bmatrix}$

f) $A = [\, x+y \quad 2x-y \quad 3x-3y \,]$

$B = [\, x+y \quad x-2y \quad 2x+4y \,]$

g) $A = \begin{bmatrix} 2(a-b) & 3(a+2b) \\ b-5a & b+3a \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} \frac{a+b}{3} & 2a - \frac{b}{5} \\ 3(a+4b) & -2\left(\frac{b-3a}{5}\right) \end{bmatrix}$

h) $A = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

i) $A = \begin{bmatrix} x-y & x^2-y^2 & x^3 \\ x-5y & -3x^2 & 2x^3 \\ 2x+y & 2x^2 & \frac{x^3}{3} \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 2x+y & x^2+y^2 & -2x^3 \\ -5y & 2x^2 & x^3 \\ x-3y & 3x^2 & 0 \end{bmatrix}$

j) $A = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2}+\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{2}-\sqrt{3} \\ -1+\sqrt{2}+\sqrt{3} \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} -1+2\sqrt{2}-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{2}+\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{2}+\sqrt{3} \end{bmatrix}$

3. Dadas las matrices:

$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

Obtenga

a) $-A$ **b)** $-B$ **c)** $-C$ **d)** $A+B$ **e)** $A-C$ **f)** $A+B-C$ **g)** $A+B+C$ **h)** $B-A$ **i)** $C-A$ **j)** $C-B-A$

4. Determine el valor de las variables en cada caso:

a) $\begin{bmatrix} 1+2x & 3 & 5 \\ 2 & 2-y & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2y & -2 \\ z & -1 & -3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 9 & 5 & u \\ 8 & v & w \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} a^2 & b \\ 2b & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a^2 & -2b \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ d & 6 \end{bmatrix}$

c) $[6+x \quad 2y \quad 6z] + [3x \quad 1-y \quad 4-z]$

$= [x \quad -y \quad z]$

d) $\begin{bmatrix} 1+a & 4 \\ 1+b & 3 \\ 1+c & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2a & 2 \\ 2b & -3 \\ 2c & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & x \\ -6 & y \\ -9 & z \end{bmatrix}$

5. Resuelva las siguientes ecuaciones matriciales

a) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 2 \\ 6 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} + X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -5 \\ 3 & 0 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

c) $X + [1 \quad 2-a \quad 3+a]$
$= [a-1 \quad 2a \quad a-2]$

d) $X - \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} - X = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} a & -2b & 3b \\ b-a & 2b & -b \end{bmatrix} - X = \begin{bmatrix} -2a & 3b & -b \\ a+b & -b & -2b \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ \sqrt{3} \\ 2-\sqrt{3} \end{bmatrix} - X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

h) $[2, 1 \ -3, 7 \ 0, 4] + X$
$= [-3, 3 \ 1, 7 \ 2, 5]$

i) $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{-3}{4} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} - X = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{7} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$

j) $X - \begin{bmatrix} 1-m & m+5 \\ 2+3m & 2m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. Exprese la siguiente matriz:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -3 & 4 & 7 \\ 9 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

Como:

a) Suma de dos matrices cualesquiera.

b) Suma de dos matrices tales que la diagonal principal de una de ellas esté fomada sólo por 1.

c) Suma de dos matrices tales que los elementos que están bajo la diagonal principal de una de ellas sean todos iguales a cero.

d) Suma de dos matrices tales que los elementos que están sobre la diagonal principal de una de ellas y los que están bajo la diagonal principal de la otra sean todos iguales a cero.

e) Suma de dos matrices tales que la diagonal principal de una de ellas esté formada sólo por ceros.

Soluciones

1. a) $x = 1 \quad y = 0$ b) $x = -3 \quad y = 4$
   c) $a = 2 \quad x = 3$, $b = 1 \quad y = -4$ d) $a = 1$, $b = 3$
   e) $x = \frac{2}{3}$, $y = -3$ f) $x = \frac{-3}{2}$, $y = -3$
   g) $x = \pm\sqrt{5} \quad y = \frac{-2}{3} \quad z = -2$
   h) $x = -3 \quad y = -2 \quad u = 2$, $v = -8 \quad w = -1$
   i) $x = \frac{17}{2} \quad y = \frac{-7}{2} \quad z = \frac{-\sqrt{2}}{3} \quad w = \frac{\sqrt{2}}{9}$
   j) $a = \frac{9}{2} \quad b = 0$

2. a) $\begin{bmatrix} -2 & 10 & 8 \\ 7 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & \frac{-5}{2} \\ \frac{-3}{2} & \frac{-1}{4} \\ \frac{5}{6} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$

   c) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \\ 1 & 8 & -5 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 4\sqrt{2} & -\sqrt{3} & 8\sqrt{5} \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

   e) $\begin{bmatrix} 3a+b & -3a+2b \\ 5b-3a & b-2a \\ 5b-4a & b-4a \end{bmatrix}$

   f) $[2x+2y \quad 3x-3y \quad 5x+y]$

   g) $\begin{bmatrix} \frac{7a-5b}{3} & 5a+\frac{29b}{5} \\ 13b-2a & \frac{21a+3b}{5} \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} \end{bmatrix}$

   i) $\begin{bmatrix} 3x & 2x^2 & -x^3 \\ x-10y & -x^2 & 3x^3 \\ 3x-2y & 5x^2 & \frac{x^3}{3} \end{bmatrix}$

   j) $\begin{bmatrix} 3\sqrt{2} \\ 2-2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{3} \end{bmatrix}$

3. a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & -5 & 3 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 6 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 8 \\ -1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 3 & 10 & 0 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$

i) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ j) $\begin{bmatrix} -4 & 2 & -8 \\ 1 & 0 & -6 \end{bmatrix}$

4. a) $x = \frac{5}{2}$ $z = 6$ $v = 0$

$y = 1$ $u = 3$ $w = -6$

b) $a = \pm 2$ $c = 2$

$b = 3$ $d = 6$

c) $x = -2$ $y = -\frac{1}{2}$ $z = -1$

d) $a = \frac{-4}{3}$ $b = \frac{-7}{3}$ $c = -\frac{10}{3}$

$x = 6$ $y = 0$ $z = 2$

5. a) $X = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}$ b) $X = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 4 & -7 \\ -3 & -1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$

c) $X = [a-2 \quad 3a-2 \quad -5]$

d) $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ e) $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

f) $X = \begin{bmatrix} 3a & -5b & 4b \\ -2a & 3b & b \end{bmatrix}$ g) $X = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 1 - \sqrt{3} \end{bmatrix}$

h) $X = [-5{,}4 \quad 5{,}4 \quad 2{,}1]$

i) $X = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{11}{6} \\ \frac{-17}{28} & \frac{41}{18} \end{bmatrix}$

j) $X = \begin{bmatrix} 1 & 2m+5 \\ 2+3m & 1+2m \end{bmatrix}$

11.3 Ponderación de una matriz por un escalar

11.3.1 Definición

Ponderar una matriz A por un escalar α es multiplicar cada elemento de la matriz A por el elemento α.

En general consideraremos α como un elemento del conjunto de números reales.

El resultado de esta nueva operación nos da una nueva matriz del mismo orden de la matriz original.

11.3.2 Propiedades

Notemos que la ponderación de una matriz por un escalar es una operación entre elementos de diferentes conjuntos.

Sean A y B matrices de orden $m \times n$ y sean α y β dos escalares. (Consideremos $\alpha, \beta, \in \mathbb{R}$).

Se cumple:

1. $\alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B$
2. $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$
3. $(\alpha \beta) A = \alpha (\beta A)$
4. $1 \times A = A$

Recordemos que ($M_{m \times n}$, +) tenía estructura de Grupo Abeliano. Si agregamos al conjunto esta nueva operación recién definida y sus propiedades, ampliamos la estructura algebraica y obtenemos un Espacio Vectorial.

Así, tienen estructura de Espacio Vectorial aquellos sistemas formados por un conjunto dotado de una operación que tenga estructura de Grupo Abeliano y de otra operación que tenga las propiedades 1 a 4 indicadas anteriormente.

Ejercicios resueltos

1. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ y $\alpha = 4$

   Obtengamos α A.

   $$\alpha A = 4A = 4\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 24 & 8 \\ -8 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

   Para obtener α A simplemente multiplicamos cada elemento de A por 4, que es el valor de α.

2. Determinemos el valor de las variables en:

   $$x\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & y \\ z & v-2 \end{bmatrix}$$

   Efectuemos la primera operación y luego planteemos las igualdades correspondientes:

   $$\begin{bmatrix} x & 0 \\ -2x & 3x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & y \\ z & v-2 \end{bmatrix}$$

   de donde:

   $$\begin{aligned} x &= 4 \\ y &= 0 \\ -2x &= z \quad \rightarrow \quad z = -8 \\ 3x &= v - 2 \quad \rightarrow \quad v = 14 \end{aligned}$$

3. Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -6 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$

   Resolvamos la ecuación $X - 5A = -3B$

   La solución de esta ecuación está dada por:

   $X = 5A - 3B$ es decir:

$$X = 5\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} + (-3)\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -6 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 15 & 5 \\ -15 & 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & -15 \\ -6 & 18 \\ -15 & 12 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 14 & -25 \\ 9 & 23 \\ -30 & 32 \end{bmatrix}$$

4. Expresemos la matriz $A = \begin{bmatrix} -12 & 9 & 27 \\ -3 & -12 & 6 \end{bmatrix}$

como el producto de un escalar por otra matriz.

Este problema tiene infinitas soluciones, pues podemos escoger cualquier número real como el escalar, pero una simple inspección de los elementos nos indica que podemos "factorizar" la matriz por 3 y así mantener todos los elementos enteros.

$$\begin{bmatrix} -12 & 9 & 27 \\ -3 & -12 & 6 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} -4 & 3 & 9 \\ -1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

5. La siguiente es una tabla de precios de artículos allí señalados.

$$\begin{array}{l} \\ \text{óleo} \\ \text{látex} \\ \text{diluyente} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{pequeño} & \text{mediano} & \text{grande} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1.100 & 1.600 & 2.000 \\ 1.300 & 1.750 & 2.200 \\ 700 & 1.000 & 1.300 \end{bmatrix} \end{array}$$

Podemos considerar la información proveniente de una matriz cuyas filas nos señalan el producto y cuyas columnas nos señalan el tamaño.

Determinemos ahora la matriz correspondiente a los precios de los artículos si ellos están rebajados en un 10%.

El nuevo precio se obtiene al multiplicar cada precio por 0.9, así la matriz de los nuevos precios será:

$$0.9\begin{bmatrix} 1.100 & 1.600 & 2.000 \\ 1.300 & 1.750 & 2.200 \\ 700 & 1.000 & 1.300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 990 & 1.440 & 1.800 \\ 1.170 & 1.575 & 1.980 \\ 630 & 900 & 1.170 \end{bmatrix}$$

Ejercicios

1. Calcule:

a) $-2\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ **b)** $-1\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ **e)** $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 9 \\ 6 & -3 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$ **f)** $\frac{3}{4}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \\ 2 & 2 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}$

c) $2\begin{bmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ **d)** $5\begin{bmatrix} 1 & 8 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & -5 & -4 \end{bmatrix}$

g) $\sqrt{2}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ **h)** $\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{12} & \sqrt{3} \\ \sqrt{27} & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$

i) $(a+b)\begin{bmatrix} a-b & a+b \\ a & b \\ -b & -a \end{bmatrix}$ **j)** $0\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 15 & -3 \end{bmatrix}$

2. Dadas las matrices:

$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

Determine:

a) $2A - B$ **b)** $A - 2B + 3C$

c) $3A - 3B$ **d)** $4(A - B)$

e) $\frac{2}{5}\left(A - \frac{1}{2}B\right)$ **f)** $2(A + B) - 2(A - B)$

g) $-4B$ **h)** $B - 2A$

i) $\frac{1}{3}C - \frac{1}{2}B + \frac{1}{3}A$ **j)** $3\left(\frac{2}{3}A + B\right)$

3. Determine el valor de las incógnitas en cada caso:

a) $2\begin{bmatrix} x & y \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ u & v \end{bmatrix}$

b) $-3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} u & v \\ w & 8 \end{bmatrix}$

c) $-2\begin{bmatrix} 2x & y \\ 1-y & 2 \\ 3 & 3+x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+9 & y-12 \\ -u & 2v \\ w & z \end{bmatrix}$

d) $-3\begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y+1 & x-2 \\ 2z+1 & 2z \end{bmatrix}$

e) $x\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix} -w+z \\ -z \\ -y \\ -12 \end{bmatrix}$

f) $2\begin{bmatrix} x & x-1 \\ y & y+2 \\ z & z-4 \end{bmatrix} = (-3)\begin{bmatrix} 9 & p \\ 11 & q \\ -4 & r \end{bmatrix}$

4. Resuelva las siguientes ecuaciones matriciales:

a) $X + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} = (-3)\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

b) $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} - X = (-1)\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 5 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$

c) $2X - 3\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & -3 \end{bmatrix} = (-3)\begin{bmatrix} -2 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & -5 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

$= X + \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & -6 & 3 \end{bmatrix}$

5. Dadas las matrices:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

resuelva las ecuaciones:

a) $3A + X = -B$

b) $2A + C = B - X$

c) $2X + A = -3C$

d) $B - 2C - X = 3A$

Soluciones

1. a) $\begin{bmatrix} -2 & -8 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & 12 & -6 \\ 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ **d)** $\begin{bmatrix} 5 & 40 & 5 & 10 \\ -15 & -10 & -25 & -20 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{9}{2} \\ 3 & \frac{-3}{2} \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ **f)** $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 3 \\ \frac{-3}{4} & \frac{-9}{4} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{-9}{4} & \frac{-21}{4} \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & \sqrt{6} \\ & 0 \end{bmatrix}$ **h)** $\begin{bmatrix} 3 & \frac{3}{2} \\ \frac{9}{2} & \frac{-3}{2} \end{bmatrix}$

i) $\begin{bmatrix} a^2-b^2 & a^2+2ab+b^2 \\ a^2+ab & ab+b^2 \\ -ab-b^2 & -a^2-ab \end{bmatrix}$

j) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2. a) $\begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 5 & 1 & -11 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} -12 & -8 & 6 \\ 4 & -4 & 2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -3 & -3 & -6 \\ 3 & 0 & -24 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -4 & -4 & -8 \\ 4 & 0 & -32 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{-4}{5} & 0 \\ 1 & \frac{1}{5} & \frac{-11}{5} \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 8 & -8 & 16 \\ 12 & 4 & 20 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} -8 & 8 & -16 \\ -12 & -4 & -20 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -5 & -1 & 11 \end{bmatrix}$

i) $\begin{bmatrix} \frac{-5}{3} & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-11}{6} \end{bmatrix}$ j) $\begin{bmatrix} 8 & -12 & 16 \\ 17 & 5 & 9 \end{bmatrix}$

3. a) $x = \frac{-3}{2}$ $y = \frac{15}{2}$ $u = 2$ $v = \frac{-4}{3}$

b) $u = 1$ $v = \frac{-3}{5}$ $w = \frac{-1}{5}$ $x = 12$

c) $x = \frac{-9}{5}$ $y = 4$ $u = -6$ $v = -2$

$w = -6$ $z = \frac{-12}{5}$

d) $x = \frac{-5}{8}$ $y = \frac{7}{8}$ $z = \frac{-1}{5}$ $u = \frac{2}{15}$

e) $x = 2$ $y = -6$ $z = 8$ $w = 4$

f) $x = \frac{-27}{2}$ $p = \frac{29}{3}$ $y = \frac{-33}{2}$ $q = \frac{29}{3}$

$z = 6$ $r = -\frac{4}{3}$

4. a) $X = \begin{bmatrix} -8 & 9 & -10 \\ -7 & -2 & 15 \end{bmatrix}$ b) $X = \begin{bmatrix} \frac{16}{5} & -3 \\ \frac{12}{5} & \frac{26}{5} \\ \frac{17}{5} & \frac{-28}{5} \end{bmatrix}$

c) $X = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{-15}{2} & \frac{9}{2} & 3 \end{bmatrix}$ d) $X = \begin{bmatrix} -5 & -5 & 6 \\ -1 & 10 & 2 \end{bmatrix}$

5. a) $X = \begin{bmatrix} 1 & -11 \\ 2 & -8 \\ -9 & -10 \end{bmatrix}$ b) $X = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 2 & -7 \\ 0 & -13 \end{bmatrix}$

c) $X = \begin{bmatrix} \frac{-7}{2} & \frac{-5}{2} \\ -1 & \frac{-3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-13}{2} \end{bmatrix}$ d) $X = \begin{bmatrix} -11 & -3 \\ 2 & -10 \\ -1 & -20 \end{bmatrix}$

11.4 Multiplicación de matrices

11.4.1 Procedimiento

Sean A y B dos matrices de orden $1 \times n$ y $n \times 1$, respectivamente.

El producto de A y B es una matriz de orden 1×1 y se obtiene sumando todos los productos de la forma $a_{1i}\, b_{i1}$ donde $1 \leq i \leq j$.

Así: $A = \left(a_{11}\; a_{12} \ldots\; a_{1n}\right)$ y $B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ b_n \end{bmatrix}$

entonces $AB = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)$

Una ampliación de esta definición es la siguiente:

Sea A una matriz de orden $m \times n$ y B una matriz de orden $n \times p$. El producto AB es una matriz C de orden $m \times p$, donde cada elemento C_{ij} se obtiene sumando los productos de los elementos de la i-ésima fila de A con la j-ésima columna de B.

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

A tiene orden 2×3 y B tiene orden 3×2, por lo tanto, la matriz producto C tendrá orden 2×2 (número de filas de A y número de columnas de B).

El elemento C_{11} se obtiene multiplicando fila 1 de A por columna 1 de B.

El elemento C_{12} se obtiene multiplicando fila 1 de A por columna 2 de B.

El elemento C_{21} se obtiene multiplicando fila 2 de A por columna 1 de B.

El elemento C_{22} se obtiene multiplicando fila 2 de A por columna 2 de B.

Para cada elemento se suman los productos obtenidos.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot -1 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}$$

Observación: La multiplicación de matrices NO es una operación conmutativa.

Si el número de columnas de una matriz no coincide con el número de filas de la otra entonces el producto no se puede efectuar.

11.4.2 Propiedades de la multiplicación

Como vimos anteriormente, no todas las matrices se pueden multiplicar. Consideremos aquí el conjunto de matrices cuadradas, de orden $n \times n$.

En este conjunto la multiplicación cumple las siguientes propiedades:

1. Asociatividad.
   Sean A, B, C matrices de orden $n \times n$, entonces
   $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.
2. Existe neutro multiplicativo.
   Sea $A \in M_{n \times n}$, entonces existe la matriz identidad
   $I \in M_{n \times n}$ tal que:
   $A \cdot I = I \cdot A = A$.
   Esta matriz, llamada también matriz unitaria, está formada por 1 en la diagonal principal y 0 fuera de ella.
3. El producto es distributivo respecto de la suma.
   Sean A, B y C matrices de orden $n \times n$; se cumple:
   $A \cdot (B + C) = AB + AC$.
4. Existen divisores de cero.
   Recordemos que en el conjunto de números reales $\mathbb{R}$ si el producto de dos números es igual a cero, necesariamente uno de ellos es cero. En el caso de las matrices, ello no ocurre y así podemos tener dos matrices no nulas y tales que su producto es cero.
   Así, afirmamos que $\exists\ A, B \in M_{n \times n},\ A \neq 0 \ \wedge\ B \neq 0$ tales que $AB = 0$

Observación: El producto de matrices cuadradas de orden n no es conmutativo.

–No todas las matrices son invertibles, es decir, dada una matriz A de orden $n \times n$ no siempre es posible encontrar una matriz A^{-1} tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

Cuando es posible encontrar dicha matriz se dice que A es invertible y A^{-1} se llama la matriz inversa de A.

11.4.3 Matrices inversas y ecuaciones multiplicativas

Sea A una matriz cuadrada de orden 2×2 dada por:

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

La matriz inversa de A viene dada por:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

La condición entonces para que la matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ sea invertible es que ad-bc sea distinta de cero.

La determinación de la matriz inversa de una matriz de orden 3 la dejaremos para el punto siguiente, pues con los determinantes se facilita mucho su obtención.

Aplicando las matrices inversas podemos resolver ecuaciones multiplicativas. Es decir, sean A y B dos matrices cuadradas.

Resolvamos: $A \cdot X = B$

Si A es invertible, entonces existe A^{-1} tal que

$$A^{-1} \cdot A = I = A \cdot A^{-1} \qquad \text{Así:}$$

$$A \cdot X = B \qquad / \cdot A^{-1}$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

Recordemos que la multiplicación no es conmutativa; por lo tanto, si multiplicamos un lado de la igualdad por la izquierda, **debemos** multiplicar el otro lado también por la izquierda.

Entonces la solución de la ecuación está dada por:

$$X = A^{-1} B$$

Ejercicios resueltos

1. Sea $A = [\,-1 \quad 2\,]$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

a) ¿Es posible efectuar el producto AB y BA?

b) ¿Qué orden tiene(n) la(s) matriz(ces) resultante(s)?

c) Obtengamos los productos.

- **Soluciones:**

a) A tiene orden 1×2 y B tiene orden 2×2; por lo tanto, se puede obtener AB pero no BA.

b) AB tiene orden 1×2 (número de filas de A y número de columnas de B).

c)
$$\begin{array}{ccc} & \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \\ [-1 \quad 2] & = [x \quad y] \end{array}$$

Notemos que la distribución así dispuesta nos entrega un modo fácil de efectuar los productos, así:

$AB = [-1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \qquad -1 \cdot 3 + 2 \cdot -3]$

$AB = [0 \quad -9]$

2. Dada $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Obtengamos AB y BA.

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad BA = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6-6 & -9-8 \\ -2+15 & 3+20 \end{bmatrix} \qquad = \begin{bmatrix} 6+3 & -4-15 \\ 9-4 & -6+20 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & -17 \\ 13 & 23 \end{bmatrix} \qquad BA = \begin{bmatrix} 9 & -19 \\ 5 & 14 \end{bmatrix}$$

Es claro que AB y BA son diferentes.

3. Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

Obtengamos AB.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 + -5 + 5 \\ -6 + 10 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

4. $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ obtener AB y BA.

En este caso vemos que B es la matriz identidad y por lo tanto es neutro multiplicativo, entonces $AB = BA = A$.

5. Obtengamos la matriz inversa de $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ y comprobemos.

Recordemos que para que exista la matriz inversa de $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ debe ocurrir que $ad - bc \neq 0$.

En este caso $ad - bc = 8 + 1 = 9 \neq 0$, por lo tanto, A^{-1} existe y es: $A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

Comprobemos:

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 8+1 & -2+2 \\ -4+4 & 1+8 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ que es la matriz identidad.

Como el producto de matrices no es conmutativo debemos comprobar que $A \cdot A^{-1}$ también es la matriz identidad.

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{-1}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{8}{9}+\frac{1}{9} & \frac{4}{9}-\frac{4}{9} \\ \frac{2}{9}-\frac{2}{9} & \frac{1}{9}+\frac{8}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Determinemos si existe la matriz inversa de:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 6 & -10 \end{bmatrix}$$

En este caso vemos que la condición para la existencia de la matriz inversa no se cumple, pues $ad - bc = 30 - 30 = 0$ y, por lo tanto, decimos que A no es invertible.

7. Sean A y B dos matrices dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} -3 & -8 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Resolvamos la ecuación $B \cdot X = A$

Sabemos que si B es invertible, la ecuación tiene por solución $X = B^{-1} A$.

B cumple la condición para tener matriz inversa y ésta es:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

y así, la solución de $BX = A$ se obtiene mediante $\underbrace{B^{-1}B}_{I}\ X = B^{-1}A$

$$I \cdot X = B^{-1} A$$

$$X = B^{-1} A$$

es decir $X=\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$X=\begin{bmatrix} 20+8 & -25+16 \\ -8-3 & 10-6 \end{bmatrix}$

$X=\begin{bmatrix} 28 & -9 \\ -11 & 4 \end{bmatrix}$

Ejercicios

1. Calcule los siguientes productos:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} a & b & -a & -b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 2a \\ ab & 2b \\ b^2 & -a \\ -a & -b \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{6} \\ \sqrt{3} & -\sqrt{6} & \sqrt{8} \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 1 & -a \\ -2 & -2a \\ 3 & -3a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ 3a \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} a+b & a-b & 2a \\ a+b & -a+b & 2b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a-b & b-a \\ a+b & b+a \\ -a & b \end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -9 & -18 \end{bmatrix}$

2. Encuentre la matriz inversa de las siguientes matrices. Compruebe que son inversas y en caso de no existir la inversa explique por qué.

a) $A=\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ **b)** $A=\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

c) $T=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$ **d)** $M=\begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

e) $P=\begin{bmatrix} x & 2x \\ -x & 3x \end{bmatrix}$ **f)** $Q=\begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix}$

g) $M=\begin{bmatrix} b & -b \\ 3b & 2b \end{bmatrix}$ **h)** $N=\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

3. Dadas las siguientes matrices:

$A=\begin{bmatrix} 2a & a \\ -a & 3a \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} -a & -2a \\ a & 2a \end{bmatrix}$

y $C=\begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix}$

calcule:

a) AB – AC **b)** A(B – C) **c)** 2A – 3AB

d) – 3 ABC **e)** (A – B)C **f)** (B – C) A

g) 3 (A + B – C) **h)** (2A + B) C

4. Determine el valor de las variables en cada caso:

a) $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -9 & 13 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2a & -3b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 8 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 \\ -15 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 2a & b \\ x & 3y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & -y \\ 2z & u \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ejercicios

f) $\begin{bmatrix} x & 2y & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 5 & -3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}$

5. Sea A una matriz de orden 2×3
Sea B una matriz de orden 2×4
Sea C una matriz de orden 3×4
Sea D una matriz de orden 4×3
Sea E una matriz de orden 4×2
Indique todos los productos que se puedan efectuar y dé un ejemplo de cada uno de ellos. Indique el orden o dimensión de cada producto.

6. Encuentre un par de matrices no nulas cuyo producto sea nulo. Haga el caso en que ambas son matrices cuadradas, es decir, de orden n • n y el caso en que ambas no son cuadradas.

7. Resuelva las siguientes ecuaciones matriciales multiplicativas:

a) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}$

b) $X \cdot \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

c) $X \cdot \begin{bmatrix} 6 & 11 \\ 9 & -4 \end{bmatrix} = (-2)\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -6 & 12 \end{bmatrix}$

d) $\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 16 & -22 \\ 4 & -12 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

e) $\frac{1}{4} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

f) $2 \cdot \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot 3X = \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ -9 & 4 \end{bmatrix}$

8. Demuestre que en el conjunto de matrices cuadradas de orden 2 el producto no es conmutativo.

9. Encuentre dos matrices cuadradas de orden 2, A y B y ejemplifique la siguiente proposición:

$A^{-1} \cdot B \cdot A \neq B$

10. Encuentre un par de matrices cuadradas de orden 2 cuyo producto sea conmutativo.

Nota: No considere la matriz inversa ni la matriz nula.

11. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Calcule A^2, A^3, A^4, A^5 ...

¿Puede hacer alguna generalización?

Nota: $A^2 = A \cdot A$; $A^3 = A^2 \cdot A$; $A^4 = A^3 \cdot A$

12. Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

Calcule A^{-1}, B^{-1}, AB y $(AB)^{-1}$

Verifique que: $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

¿Ocurre siempre esto? Demuéstrelo.

Soluciones

1. a) $[0]$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 14 & 4 \\ 10 & 7 & -1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 6 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ d) $[a^2 + ab \quad 3a^2 + 3b^2]$

e) $\begin{bmatrix} 5 & \sqrt{6} - 3\sqrt{2} & 2\sqrt{3} + 2\sqrt{6} \\ -2\sqrt{6} & -3 + 2\sqrt{3} & -3\sqrt{2} - 4 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} a & - & 3a^2 \\ -2a & - & 6a^2 \\ 3a & - & 9a^2 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} -2b^2 & 2ab \\ -2ab & 4b^2 - 2a^2 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 9 & 18 \end{bmatrix}$

2. a) $A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

b) $A^{-1} = -\frac{1}{23}\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$

c) $T^{-1} = \frac{4}{7}\begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

d) M no es invertible. (Ver 11.5.1)

e) $P^{-1} = \frac{1}{5x^2}\begin{bmatrix} 3x & -2x \\ x & x \end{bmatrix}$

f) $Q^{-1} = \frac{25}{11}\begin{bmatrix} 1 & \frac{-3}{5} \\ \frac{-1}{10} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

g) $M^{-1} = \frac{1}{5b^2}\begin{bmatrix} 2b & b \\ -3b & b \end{bmatrix}$

h) $N^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

3. a) $\begin{bmatrix} -2a^2 & 0 \\ a^2 & 7a^2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -2a^2 & 0 \\ a^2 & 7a^2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 4a+3a^2 & 2a+6a^2 \\ -2a-12a^2 & 6a-24a^2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 6a^3 & -3a^3 \\ -24a^3 & 12a^3 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 3a^2 & -3a^2 \\ a^2 & 2a^2 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} -a^2 & -4a^2 \\ -2a^2 & 6a^2 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 3a & 0 \\ -3a & 15a \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 0 & -3a^2 \\ 8a^2 & a^2 \end{bmatrix}$

4. a) $x = \frac{92}{19}$ $y = \frac{21}{19}$

b) $a = \frac{-2}{5}$ $b = \frac{-8}{15}$

c) $x = \frac{-12}{29}$ $y = \frac{-57}{29}$

d) $a = \frac{15}{26}$ $b = \frac{-18}{13}$

$x = \frac{21}{13}$ $y = \frac{32}{39}$

e) $x = \frac{1}{5}$ $z = \frac{1}{5}$

$y = \frac{-2}{5}$ $u = \frac{-2}{5}$

f) $x = \frac{7}{11}$ $y = \frac{-1}{22}$

g) $a_1 = 10$ $a_2 = -25$

$a_3 = 15$ $a_4 = -30$

$b_1 = -8$ $b_2 = 20$

$b_3 = -12$ $b_4 = 24$

$c_1 = 4$ $c_2 = -10$

$c_3 = 6$ $c_4 = -12$

$d_1 = 2$ $d_2 = -5$

$d_3 = 3$ $d_4 = -6$

5. Se pueden efectuar los siguientes productos de 2 matrices:

$A \cdot C$	de orden	2×4
$B \cdot D$	de orden	2×3
$B \cdot E$	de orden	2×2
$C \cdot D$	de orden	3×3
$C \cdot E$	de orden	3×2
$E \cdot B$	de orden	4×4
$E \cdot A$	de orden	4×3
$D \cdot C$	de orden	4×4

Algunos productos de 3 matrices son:

A C D	de orden	2×3
A C E	de orden	2×2
– – –		

6. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -10 & 6 \end{bmatrix}$

Es claro que $A \neq 0$ y $B \neq 0$ y $AB = 0$

7. a) $X = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 9 & -6 \\ -4 & -14 \end{bmatrix}$ b) $X = \frac{-1}{15}\begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 25 & -38 \end{bmatrix}$

c) $X = \frac{2}{123}\begin{bmatrix} -88 & 4 \\ -84 & 138 \end{bmatrix}$ d) $X = -\frac{1}{26}\begin{bmatrix} -6 & -11 \\ -2 & -8 \end{bmatrix}$

e) $X = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ f) $\frac{1}{108}\begin{bmatrix} -32 & 0 \\ -1 & 36 \end{bmatrix}$

11. $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 4a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Generalizando: $A^n = \begin{bmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

12. $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ $B^{-1} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 9 & 17 \end{bmatrix}$ $(AB)^{-1} = \frac{1}{55}\begin{bmatrix} 17 & -9 \\ -9 & 8 \end{bmatrix}$

$B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{55}\begin{bmatrix} 17 & -9 \\ -9 & 8 \end{bmatrix}$

11.5 Determinantes y sistemas de ecuaciones

11.5.1 Determinantes y sistemas lineales de orden 2

Dado el siguiente sistema de 2 ecuaciones:

$$ax + by = p$$
$$cx + dy = q$$

Las soluciones para x e y están dadas por:

$$x = \frac{pd - bq}{ad - bc} \quad e \quad y = \frac{aq - pc}{ad - bc}$$

La solución del sistema existirá sólo si el denominador común x e y es distinto de cero. Esto es, $ad - bc \neq 0$.

Vemos que el sistema original también puede ser planteado como ecuación matricial multiplicativa de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

Llamando A a la matriz de los coeficientes, X a la matriz de las variables y B a la matriz de los términos constantes, tenemos la ecuación $A \cdot X = B$ que tiene por solución $X = A^{-1} B$, siempre que A^{-1} exista, es decir, siempre que A sea invertible y esta condición esté dada por: $ad - bc \neq 0$.

La expresión $ad - bc$ se llama DETERMINANTE de orden 2 asociado a la matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ y se denota por det. $A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

Vemos que las soluciones encontradas para x e y a partir del sistema pueden ser expresadas en forma de determinantes de la siguiente manera:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

Así, si llamamos Δ al determinante formado por los coeficientes del sistema, Δx al determinante obtenido cambiando la columna correspondiente a la variable x por la columna de términos constantes y, Δy al determinante obtenido al cambiar la columna de los coeficientes de y por la de términos constantes, podemos escribir la solución del sistema de la siguiente manera:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} \quad e \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta}$$

11.5.2 Determinantes y sistemas lineales de orden 3

Consideraciones similares a las hechas en el punto anterior nos llevan a definir un determinante de orden 3 a partir del sistema de 3 ecuaciones lineales:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

como el valor común de los denominadores de x, y y z una vez despejados éstos.

$$\text{así } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3$$

Si conmutamos los términos obtenidos y factorizamos obtenemos que el valor del determinante puede ser expresado:

$$a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - b_1 (a_2 c_3 - a_3 c_2) + c_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2),$$

lo cual es equivalente a reducir el determinante de orden 3 a 3 determinantes de orden 2, es decir:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

Este proceso se llama DESARROLLO del Determinante por MENORES.

Un proceso más simple para el cálculo de un determinante de orden 3 es la llamada Regla de Sarrus, que consiste en "agregar" al determinante las 2 primeras filas (en el mismo orden) o las dos primeras columnas y luego formar todas las diagonales completas, es decir, con 3 elementos. Los productos de las diagonales en este sentido $\searrow$ se suman y los productos de las diagonales en el otro sentido $\swarrow$ se restan.

Ahora, para resolver un sistema de 3 ecuaciones lineales:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

formamos los siguientes determinantes:

Δ formado por los coeficientes de las variables.
Δx obtenido de Δ reemplazando la columna de los coeficientes de x por la columna de los términos libres.
Δy reemplazando en Δ los coeficientes de y por los términos libres.
Δz reemplazando en Δ los coeficientes de z por los términos libres.

$$\text{Así: } \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \Delta z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

y la solución del sistema está dada por:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta} \qquad z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

Este método para obtener soluciones es conocido como REGLA DE CRAMER.

Observación: Claramente el sistema tiene solución si el valor de Δ es distinto de cero.

Ejercicios resueltos

1. Calculemos el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

De inmediato: $2 \cdot 3 - 1 \cdot -2 = 6 + 2 = 8$

2. Apliquemos determinantes para resolver el sistema:

$$\begin{aligned} 3x - y &= 10 \\ x + 2y &= 8 \end{aligned}$$

Formemos los determinantes Δ, Δx y Δy:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - (-1) = 7$$

Como Δ es distinto de 0 el sistema tiene solución y calculamos Δx y Δy

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 10 & -1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 20 - (-8) = 28$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 24 - 10 = 14$$

y la solución del sistema es:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{28}{7} = 4$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{14}{7} = 2$$

3. Apliquemos determinantes para resolver el sistema:

$$\begin{aligned} 2x - 7y &= 3 \\ -4x + 14y &= 1 \end{aligned}$$

Formemos y calculemos el determinante principal Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ -4 & 14 \end{vmatrix} = 28 - 28 = 0$$

Como $\Delta = 0$ el sistema no tiene solución. (En este caso se trata de dos rectas paralelas.)

4. Calculemos el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

Aplicando la regla de Sarrus, obtenemos:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 5 & 2 & -1 \end{array}\right|$$

$= (15 + 16 - 6) - (12 - 4 + 30)$

$= 25 - 38$

$= -13$

5. Resolvamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 6 \\ 3x - 2y + 3z &= 3 \\ x - y + z &= 0 \end{aligned}$$

Formemos y calculemos el determinante principal:

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right| = (-4 + 3 + 3) - (2 - 6 + 3) = 2 + 1 = 3$$

Como $\Delta \neq 0$ el sistema tiene solución y calculamos:

$$\Delta x = \left|\begin{array}{ccc|cc} 6 & 1 & -1 & 6 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right| = (-12 + 3) - (-18 + 3) = -9 + 15 = 6$$

$$\Delta y = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 6 & -1 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right| = (6 + 18) - (-3 + 18) = 24 - 15 = 9$$

$$\Delta z = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 6 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right| = (3 - 18) - (-12 - 6) = -15 + 18 = 3$$

y las soluciones son:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} \rightarrow x = 2$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} \rightarrow y = 3$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} \rightarrow z = 1$$

6. Resolvamos el siguiente sistema aplicando determinantes. (Regla de Cramer).

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 4z &= 9 \\ -2x + 3y - z &= 2 \\ x + y + 3z &= -1 \end{aligned}$$

Formemos y calculemos el determinante principal.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \begin{aligned} &= (27 - 8 + 2) - (12 - 3 + 12) \\ &= 21 - 21 \\ &= 0 \end{aligned}$$

El valor del determinante principal es cero, por lo tanto, el sistema no tiene solución.

Ejercicios

1. Calcule el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & -a \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} 2 & b \\ -b & 3 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} \dfrac{h}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{h}} \end{vmatrix}$ **h)** $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{3} & 2 \end{vmatrix}$

i) $\begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & 0.2 \\ \dfrac{1}{4} & 0.1 \end{vmatrix}$ **j)** $\begin{vmatrix} -2 & 0.5 \\ -3 & 0.3 \end{vmatrix}$

k) $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & \sqrt{2} \end{vmatrix}$ **l)** $\begin{vmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 5 & \sqrt{3} \end{vmatrix}$

2. Para cada uno de los siguientes determinantes encuentre otro que tenga el mismo valor:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 5 & -5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ \sqrt{5} & \sqrt{6} \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} a & -a \\ b & b \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} a & a^2 \\ -a & 2a \end{vmatrix}$

3. Dadas las siguientes matrices aplique determinantes para establecer si ellas son invertibles o no.

a) $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ **d)** $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 10 & -2 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} h^2 & -2h \\ h & -2 \end{bmatrix}$ **f)** $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix}$ **h)** $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

4. Determine en cada caso el valor de la incógnita para que los determinantes tengan el mismo valor:

a) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & x \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} y & 2y \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & x \\ \sqrt{3} & 1 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ h & 2h \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} h+1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 2x & x \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} x-1 & 3x+2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$

5. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones aplicando determinantes:

a) $\begin{aligned} x + y &= 6 \\ 2x + y &= 9 \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} x - 5y &= -2 \\ 3x + 2y &= 6 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 3x - 5y &= 11 \\ 2x + 4y &= -1 \end{aligned}$ **d)** $\begin{aligned} -5x + y &= 2 \\ x - 4y &= 3 \end{aligned}$

e) $\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ x - 3y = 12 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} \frac{1}{2}x + y = \frac{1}{3} \\ x - \frac{1}{2}y = 4 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 4x - 3y = 5 \\ 2x - \frac{3}{2}y = -2 \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} -9x + y = -1 \\ x - \frac{1}{10}y = 2 \end{cases}$

i) $\begin{cases} -0.1x - \frac{1}{3}y = 4 \\ 3x + 10y = -3 \end{cases}$

6. Calcule el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \end{vmatrix}$

7. Escriba la ecuación matricial correspondiente a cada uno de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x + 4y = -3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x - 6y = -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 3y = a \\ x - 6y = b \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} -5x + 2y = -1 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x - 2y - 3z = -3 \\ 2x + y + 4z = -1 \\ x - 3y - z = 4 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 2x - y + z = -4 \\ x + y - z = 2 \\ 2x - y - z = -3 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x - y = -2 \\ x + 2z = 1 \\ 2y - 3z = 2 \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} y - z = -3 \\ 2x + 3z = 1 \\ x - 2z = 4 \end{cases}$

8. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones aplicando determinantes (Regla de Cramer).

a) $\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ x + 3y + z = 5 \\ 3x - y + 2z = 4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 3y - z = -3 \\ 2x - y + 4z = 14 \\ x - 5y + z = 15 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 3y = 9 \\ 2x - z = 8 \\ y + 4z = -6 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 12 \\ x + y + z = 3 \\ -2x - y - 2z = -3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} -4x + y + z = -3 \\ 4x - y + z = 3 \\ 2x + y + 4z = 3 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - y + z = -2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x - 3y - 2z = 5 \\ 2x - y + 3z = 27 \\ -3x + 2y - z = -22 \end{cases}$

9. Demuestre:

a) $\det\begin{bmatrix} b+c & a-b & a \\ c+a & b-c & b \\ a+b & c-a & c \end{bmatrix} = 3\,abc - \left(a^2 + b^2 + c^2\right)$

b) $\det\begin{bmatrix} 1 & a & 1+a \\ a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix} = a\,(a-1)\,(a+1)$

c) $\det\begin{bmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{bmatrix} = (a+b+c)^3$

Soluciones

1. a) 7 b) -8 c) -14 d) -7
e) $-a^2 - 1$ f) $6 + b^2$ g) $h\sqrt{h} - \sqrt{2}$
h) $2\sqrt{2} - \sqrt{3}$ i) 0 j) 0.9
k) 2 l) $-4\sqrt{3}$

3. a) Sí b) Sí c) No d) Sí
e) No f) Sí g) Sí h) Sí

4. a) $x = -23$ **b)** $y = \frac{-15}{11}$ **c)** $x = -2$
d) $h = -\frac{1}{2}$ e) $x = \frac{7}{9}$

5. a) $x = 3$ $y = 3$ b) $x = \frac{26}{17}$ $y = \frac{12}{17}$

c) $x = \frac{39}{22}$ $y = \frac{-25}{22}$ d) $x = \frac{-11}{19}$ $y = \frac{-17}{19}$

e) $x = -6$ $y = -6$ f) $x = \frac{10}{3}$ $y = \frac{-4}{3}$

g) No tiene solución h) $x = 19$ $y = 170$

i) No tiene solución

6. a) 3 b) 15 c) 22 d) − 25 e) 10 f) 0

7. a) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

8. a) $x = 1$ $y = 1$ $z = 1$

b) $x = 4$ $y = -2$ $z = 1$

c) $x = 3$ $y = 2$ $z = -2$

d) $x = 3$ $y = 3$ $z = -3$

e) $x = 1$ $y = 1$ $z = 0$

f) $x = 0$ $y = 1$ $z = -1$

g) $x = 2$ $y = -5$ $z = 6$

Prueba de selección múltiple

1. Sea $A = (a_{ij})$ $2 \bullet 3$ una matriz tal que $a_{ij} = i - j$ entonces A es:

A. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 0 & +1 & +2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

E. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

2. ¿Qué valor deben tener x e y para que las matrices A y B sean iguales?

$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & x+2 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 3 & x+1 \\ 2 & y \end{bmatrix}$

A. − 6 y 7

B. − 6 y − 4

C. − 4 y − 2

D. − 4 y 4

E. 6 y 8

3. Sea

A. $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ y

B. $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

A − B =

A. $\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

E. $\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

4. De las siguientes proposiciones para A y B

A y B E $M_{a \bullet a}$:

I $A \bullet B = B \bullet A$

II $A \neq 0$ y $B \neq 0$ entonces $AB \neq 0$

III $A \neq 0$ entonces existe A^{-1}

Son falsas:

A. Sólo I

B. Sólo II

C. II y III

D. TODAS

E. NINGUNA

5. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -6 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

y $B = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

La matriz X que satisface B − X = A es:

A. $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 5 & -4 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 5 & -4 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -5 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 5 & -8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

E. $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 5 & -8 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$

6. Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

y $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

La matriz C que satisface $C - A - B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

A. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} -3 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

E. $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -4 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

7. El sistema $3x - y = 2$
$-2x + 3y = -1$
expresado en forma matricial es:

A. $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} [x\ y] = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

E. $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} [x\ y] = [2\ \ -1]$

8. Para que la matriz $A = \begin{bmatrix} -k-1 & 2k \\ -5 & 9 \end{bmatrix}$
no sea invertible se debe cumplir:

A. $k = 0$

B. $k \neq 0$

C. $k \neq 9$

D. $k = 9$

E. A siempre es invertible

9. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
entonces $A^n =$

A. $\begin{bmatrix} 1 & nx \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 1 & x^n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} n & nx \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 1 & nx \\ 0 & n \end{bmatrix}$

E. Depende de n

10. Qué valor deben tener las variables a y b para que se cumpla:
A = B siendo

$A = \begin{bmatrix} 1 & -a & -b \\ 0 & -2 & -5 \end{bmatrix}$ y

$B = \begin{bmatrix} 1 & a+2 & b-3 \\ 0 & -2 & -5 \end{bmatrix}$

A. $a = -1 \quad b = \frac{3}{2}$

B. $a = -2 \quad b = \frac{3}{2}$

C. $a = 2 \quad b = 3$

D. $a = -2 \quad b = 3$

E. $a = 2 \quad b = -3$

11. Dada la matriz

$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -5 \\ 3 & -3 & 6 & -1 \end{bmatrix}$

Se puede afirmar:

I $a_{11} = a_{43}$

II $a_{22} = -2\, a_{33}$

III $a_{13} - a_{31} = a_{23}$

A. Sólo III

B. I y III

C. II y III

D. Todas

E. Ninguna

12. La ecuación matricial

$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$

representa el sistema:

A. $\begin{aligned} 2x + y &= 2 \\ -x - 2y &= -3 \\ y - 3z &= 4 \end{aligned}$

B. $\begin{aligned} 2x - y &= 2 \\ x - z &= -3 \\ -2y + 3z &= 4 \end{aligned}$

C. $\begin{aligned} 2x - y &= 2 \\ x - y &= -3 \\ -2x + 3y &= 4 \end{aligned}$

D. $\begin{aligned} 2x + y &= 2 \\ -x - 2z &= -3 \\ -y + 3z &= 4 \end{aligned}$

E. Ninguno de los anteriores.

13. La matriz inversa de $A = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ es

A. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$

B. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$

C. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$

D. $A^{-1} = \frac{1}{29} \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$

E. $A^{-1} = \frac{1}{29} \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$

14. La única proposición verdadera es:

A. El conjunto de matrices con la multiplicación forma un grupo abeliano.

Prueba de selección múltiple

B. El neutro multiplicativo en $M_{a \cdot a}$ es

$I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

C. Si el producto de dos matrices es 0, entonces al menos una de ellas debe ser cero.

D. Todas las matrices tienen inverso aditivo.

E. Si M es de orden $3 \cdot 4$ y N es de orden $3 \cdot 5$, entonces MN es de orden $4 \cdot 5$.

15. La condición que debe cumplir k para que el sistema

$$\begin{aligned} 2kx + y &= 9 \\ -3x + 2y &= 5 \end{aligned}$$

tenga solución es:

A. $k = \frac{3}{4}$

B. $k \neq -\frac{3}{4}$

C. $k \neq \frac{3}{4}$

D. $k \neq \frac{4}{3}$

E. $k = -\frac{4}{3}$

16. Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, entonces det (A) =

A. 10

B. −10

C. 0

D. Otro valor

E. No existe

17. El valor de m en : $\begin{vmatrix} -m & m+1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 0$ es:

A. $\frac{2}{3}$

B. $-\frac{2}{3}$

C. $\frac{3}{2}$

D. $\frac{-3}{2}$

E. 0

18. La expresión

$\frac{1}{a-b} \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}$ es igual a:

A. $a - b$

B. $a + b$

C. $\frac{1}{a-b}$

D. $\frac{1}{a+b}$

E. $a^2 - b^2$

19. Calcule: $\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} =$

A. 1

B. −1

C. 11

D. −11

E. Otro

20. El valor de m que hace verdadera la igualdad en:

$[m-2 \;\; m+2 \;\; 2m] \begin{bmatrix} m+2 \\ m-2 \\ -m \end{bmatrix} = [-8m]$ es:

A. 1

B. −1

C. 8

D. − 8

E. 0

21. Determine los valores de α y β para que se cumpla la igualdad $2A - 3B = C$, siendo:

$A = \begin{bmatrix} \alpha & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -2 & \beta \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$

y $C = \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ -4 & 9 \end{bmatrix}$

A. $\alpha = 4 \quad \beta = 3$

B. $\alpha = -4 \quad \beta = 3$

C. $\alpha = -6 \quad \beta = 3$

D. $\alpha = 4 \quad \beta = -3$

E. $\alpha = 6 \quad \beta = -3$

22. El valor de

$\det \begin{bmatrix} m & 1 & m \\ 0 & m-1 & -m \\ 0 & 0 & m+1 \end{bmatrix}$ es:

A. 0

B. m^3

C. $m^3 - 1$

D. $m^3 - m$

E. $m^2 - 1$

23. La matriz principal (o matriz de los coeficientes) del sistema

$$\begin{aligned} -x + y + z &= 1 \\ x - y - z &= 2 \\ x + y - z &= -1 \end{aligned}$$

es:

A. $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & +1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

E. $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

24. Si $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$,

entonces

$2(A + B) - 2(A - B) =$

A. $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \bullet 2$

B. $\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \bullet \frac{1}{2}$

D. $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

E. $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \bullet (-2)$

25. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$,

entonces la matriz

$M = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$ se puede expresar por:

A. $-2A + 3B + 5C - 4D$

B. $-2A - 3B + 5C - 4D$

C. $2A + 3B + 5C - 4D$

D. $2A - 3B + 5C + 4D$

E. $-2A + 3B + 5C + 4D$

26. $\begin{vmatrix} 1 & m \\ 1 & -m \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & -m \end{vmatrix} =$

A. $(m + 1)^2$

B. $(m - 1)^2$

C. $m^2 + 2m$

D. $-2m - m^2 - 1$

E. $-(m - 1)^2$

27. Sea M una matriz de orden 3×4 y N una matriz de orden de 5×3. Entonces el producto $N \times M$ es de orden:

A. 3×3

B. 4×5

C. 5×4

D. 20

E. No se puede efectuar

28. Sea A una matriz invertible y sea $B = A^{-1}$ se puede afirmar:

I. $A = B^{-1}$

II. Todos los elementos de A son distintos de cero

III. $\det(A) \neq 0$

A. Sólo I

B. I y II

C. Sólo III

D. I y III

E. Todos

29. Los valores de las variables x, y, z para que la igualdad se cumpla son respectivamente:

$[3x - z \quad y + 2 \quad x + y] =$

$[8 \quad -2y + 8 \quad -2x]$

A. $-\frac{2}{3} \quad 2 \quad -10$

B. $\frac{8}{3} \quad -2 \quad 8$

C. $\frac{2}{3} \quad -2 \quad 10$

D. No se pueden determinar

E. Otros

30. En la operación

$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

el valor de $a_{21} - a_{11}$ es:

A. -5

B. 5

C. -3

D. 3

E. -1

31. El valor de 2a en

$\begin{vmatrix} -3 & 2a \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -23$ es:

A. 1

B. 2

C. -1

D. -2

E. Otro

32. El valor de

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$

A. -1

B. -35

C. -25

D. 35

E. 25

33. Sea $A = (a_{ij})$ dada por: $A = \begin{bmatrix} -3 & 2a & -2b \\ 2b & -a & -3b \\ -a & b & ab \end{bmatrix}$

Si $x = a_{21} - a_{23} + 2a_{13}$, entonces $x =$

A. $2a - b$

B. $-b$

C. b

D. $-2a + b$

E. Otro

Prueba de selección múltiple

34. El valor de k en $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ k+2 & k-1 \end{vmatrix} = 2$ es:

A. -1 **B.** 1

C. $\frac{33}{5}$ **D.** $\frac{1}{5}$

E. -5

35. El valor de k para que la matriz A no sea invertible debe ser:

$$A = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -1 & 3k & 0 \\ 2k & 2k & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

A. 0 **B.** 1

C. -1 **D.** 3

E. -3

36. A partir de la siguiente igualdad:

$$\begin{bmatrix} u & 2v \\ x & 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

es falso:

A. $u = 4$ **B.** $v = 5$

C. $x = 6$ **D.** $2y = 3$

E. $2u + v = 3$

37. El resultado de:

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ es

A. $\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 7 & -11 \end{bmatrix}$ **B.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} -6 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ **D.** $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

E. $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$

38. Sea

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

para que $N \cdot M = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

los valores de a y b son respectivamente:

A. $-2 \,;\, \frac{3}{2}$ **B.** $2 \,;\, -\frac{3}{2}$

C. $-2 \,;\, -\frac{3}{2}$ **D.** $2 \,;\, \frac{3}{2}$

E. Otros

39. De las siguientes proposiciones, si A, B y C son matrices de orden $n \times n$, A y B invertibles, es verdadero:

A. $(A+B) \cdot C = C \cdot (A+B)$

B. $A + (B \cdot C) = (A+B) \cdot (A+C)$

C. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

D. $(A+B)(A-B) = A^2 + B^2$

E. $A \cdot B = B \cdot A$

40. $\left(\frac{5}{2}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}\right) \cdot \frac{1}{3}$

A. $\begin{bmatrix} 1 & \frac{-2}{3} \\ \frac{-1}{3} & 2 \end{bmatrix}$ **B.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 9 & -6 \\ -3 & 18 \end{bmatrix}$ **D.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

E. $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$

Soluciones

1. B	6. B	11. A	16. E	21. C	26. B	31. B	36. B
2. B	7. C	12. B	17. A	22. D	27. C	32. D	37. D
3. C	8. D	13. B	18. B	23. C	28. D	33. C	38. C
4. D	9. A	14. D	19. B	24. A	29. A	34. D	39. C
5. C	10. A	15. B	20. A	25. B	30. B	35. A	40. E

CAPÍTULO 12

Sumatoria y progresiones

Sumatoria 12.1

Definición: Sea $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 \ldots, \mu_n \in \mathbb{N}$ los términos de una sucesión.

Definimos el símbolo $\sum_{i=1}^{n} \mu_i$ de la siguiente forma:

$$\sum_{i=1}^{1} \mu_i = \mu_1$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \mu_i = \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i\right) + \mu_{n+1}$$

El símbolo $\sum_{i=1}^{n} \mu_i$ se lee: sumatoria de los μ_i desde μ_1 hasta μ_n.

- **Ejemplo:**

$$\sum_{i=1}^{5} \mu_i = \sum_{i=1}^{4} \mu_i + \mu_5 = \sum_{i=1}^{3} \mu_i + \mu_4 + \mu_5$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \mu_i + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5$$

$$= \sum_{i=1}^{1} \mu_i + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5$$

$$= \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5$$

- **Propiedades:**

1. $\sum_{i=1}^{n} (\mu_i + v_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i + \sum_{i=1}^{n} v_i$

2. $\sum_{i=1}^{n} k = n \cdot k$ $\qquad$ k = constante

3. $\sum_{i=1}^{n} k\,\mu_i = k \sum_{i=1}^{n} \mu_i$ k = constante

4. $\sum_{i=1}^{n} (\mu_i - \mu_{i-1}) = \mu_n - \mu_o$ (propiedad telescópica)

5. Algunas sumas importantes y de uso frecuente:

a) $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

b) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1 + 4 + 9 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1 + 8 + 27 + ... + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

Observación:

Sean m y n números naturales tales que m ≤ n, entonces:

$$\sum_{i=m}^{n} \mu_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i - \sum_{i=1}^{m-1} \mu_i$$

Ejercicios resueltos

1. Desarrollar las sumatorias:

a) $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} (i^2 + 1)$ b) $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{k-1}{k+1}$

Solución:

a) $2 - 5 + 10 - 17 + 26 - ... + (-1)^{n-1} (n^2 + 1)$

b) $0 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{4} + \dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{6} + ...$

2. Calcular el valor de $\sum_{i=1}^{12} (i-1)(i+1)$

Solución:

$$(i-1)(i+1) = i^2 - 1$$

$$\sum_{i=1}^{12} (i-1)(i+1) = \sum_{i=1}^{12} (i^2 - 1) = \sum_{i=1}^{12} i^2 - \sum_{i=1}^{12} 1$$

$$= \frac{12(12+1)(2 \cdot 12 + 1)}{6} - 1 \cdot 12$$

$$= \frac{12 \cdot 13 \cdot 25}{6} - 12 = 638$$

Se aplicó la fórmula

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. Calcular la suma de los n primeros términos de:

$1 \bullet 6 + 2 \bullet 7 + 3 \bullet 8 + 4 \bullet 9 + \ldots$

Solución:

Observando los términos de la suma nos damos cuenta que el término general es $a_i = i\,(i + 5)$; por lo tanto, la suma se expresa como:

$$\sum_{i=1}^{n} i\,(i+5) = \sum_{i=1}^{n} \left(i^2 + 5\,i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} i^2 + 5 \sum_{i=1}^{n} i$$

$$= \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} + 5\left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)$$

$$= \frac{n^3 + 9\,n^2 + 8\,n}{3}$$

4. Calcular el valor de: $\sum\limits_{k=5}^{12} (k+1)(2\,k-3)$

Solución:

Sabemos que: $\sum\limits_{k=m}^{n} \mu_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu_k - \sum\limits_{k=1}^{m-1} \mu_k$

y $(k + 1)\,(2\,k - 3) = 2\,k^2 - k - 3$, luego

$$\sum_{k=5}^{12} (k+1)(2\,k-3) = \sum_{k=1}^{12} \left(2\,k^2 - k - 3\right) - \sum_{k=1}^{4} \left(2\,k^2 - k - 3\right)$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{12} k^2 - \sum_{k=1}^{12} k - \sum_{k=1}^{12} 3 - 2 \sum_{k=1}^{4} k^2 + \sum_{k=1}^{4} k + \sum_{k=1}^{4} 3$$

$$= 2 \bullet \frac{12 \bullet 13 \bullet 25}{6} - \frac{12 \bullet 13}{2} - 3 \bullet 12 - 2 \bullet \frac{4 \bullet 5 \bullet 9}{6} + \frac{4 \bullet 5}{2} + 3 \bullet 4 =$$

$$= 1.300 - 78 - 36 - 60 + 10 + 12 = 1.148$$

$$\therefore \sum_{k=5}^{12} (k+1)(2\,k-3) = 1.148$$

5. Si $\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i = \dfrac{n^2 + 3\,n}{2}$, hallar μ_i

Solución:

$$\mu_n = \sum_{i=1}^{n} \mu_i - \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i$$

$$= \frac{n^2 + 3\,n}{2} - \frac{(n-1)^2 + 3\,(n-1)}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 3\,n - n^2 + 2\,n - 1 - 3\,n + 3}{2} = \frac{2\,n + 2}{2} = n + 1$$

Como $\mu_n = n + 1$, entonces $\mu_i = i + 1$

6. $\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + ... + (a_n - a_{n-1})$

Eliminando el paréntesis y asociando en forma adecuada obtenemos:

$$= a_n - a_0$$

O bien $\sum_{i=1}^{n} a_i - a_{i-1} = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} a_{i-1}$

$$= (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n) - (a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{n-1})$$

Se cancelan todos los elementos, excepto el último del primer paréntesis y el primero del segundo, y nos queda:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i - a_{i-1} = a_n - a_0$$

7. Calcular $\sum_{k=1}^{n} k^2 - (k-1)^2$

Al desarrollar nos queda: $(1 - 0) + (2^2 - 1) + (3^2 - 2^2)$ $+ ... + (n^2 - (n-1)^2)$

Aplicando la propiedad telescópica, donde:

$\sum_{i=1}^{n} a_i - a_{i-1} = a_n - a_0$ nos queda inmediatamente:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 - (k-1)^2 = n^2 - 0^2$$

Comprobemos aplicando las propiedades anteriores.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 - (k-1)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 - (k^2 - 2k + 1) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} 2k - 1 = 2 \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$= \frac{2n(n+1)}{2} - n$$

$= n^2 + n - n$

$= n^2$

Obviamente el uso de la propiedad telescópica es mucho más directo en este caso para calcular esa sumatoria.

8. Calculemos $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$

Aplicaremos (y explicaremos) el método de fracciones parciales para solucionar problemas de este tipo.

El método consiste en expresar la fracción original como suma de 2 fracciones, como sigue:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}$$

Debemos determinar A y B.

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A(k+1) + Bk}{k(k+1)} = \frac{k(A+B) + A}{k(k+1)}$$

Debemos igualar los numeradores.

$$\left.\begin{array}{l} A = 1 \\ A + B = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad B = -1$$

Entonces: $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$

Y así la sumatoria pedida se transforma en:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) +$$

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Cada término de la sumatoria es la diferencia de dos elementos consecutivos y vemos que al desarrollarla se cancelan todos, excepto el primero y el último, por la propiedad telescópica.

Así:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

9. Usemos el método anterior para calcular.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

Primero expresamos en fracciones parciales:

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{A}{2k-1} + \frac{B}{2k+1}$$

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{A(2k+1) + B(2k-1)}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{2Ak + A + 2Bk - B}{(2k-1)(2k+1)}$$

$1 = k(2A + 2B) + (A - B)$ (igualando numeradores)

$2A + 2B = 0$ (Coeficiente de k no existe al lado izquierdo)

$A - B = 1$

$$\left.\begin{array}{l} A - B = 1 \\ A + B = 0 \end{array}\right| \qquad 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2} \text{ y } B = \frac{1}{2}$$

Así, la suma pedida se transforma en:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{2}}{2k-1} - \frac{\frac{1}{2}}{2k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2k-1)} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2k+1)} =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(2k-1)} - \frac{1}{(2k+1)}\right)$$

Y nuevamente podemos aplicar la propiedad telescópica, ya que cada término de la sumatoria es la diferencia de dos elementos consecutivos; por lo que, al desarrollar ésta se cancelan casi todos los términos. Nos queda

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(2k-1)} - \frac{1}{(2k+1)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \dots\right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)$$

$$= \frac{n}{2n+1}$$

10. Calculemos $\sum_{k=1}^{n} k^3 - (k-1)^3$

Podemos aplicar directamente la propiedad telescópica y obtenemos:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 - (k-1)^3 = n^3$$

11. A partir de esta igualdad, podemos "deducir" la sumatoria de los términos al cuadrado. Observa:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 - (k^3 - 3k^2 + 3k - 1) = n^3$$

$$\sum_{k=1}^{n} 3k^2 - 3k + 1 = n^3$$

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = n^3$$

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = n^3 + 3\,\frac{n(n+1)}{2} - n$$

$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + 3n - 2n}{2}$$

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Aquí "obtuvimos" la sumatoria de los cuadrados de los números desde 1 hasta n.

Ejercicios

1. Desarrollar las siguientes sumatorias:

a) $\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{i} =$ b) $\sum_{i=1}^{5} (2i-1) =$

c) $\sum_{i=1}^{8} i^2 =$ d) $\sum_{i=1}^{4} i^3 =$

e) $\sum_{i=1}^{5} (-1)^i i =$ f) $\sum_{i=1}^{10} (-1)^{i-1} \frac{1}{i} =$

g) $\sum_{i=1}^{n} 2i =$ h) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i-1} =$

i) $\sum_{i=1}^{n} (-1)^i i^2 =$ j) $\sum_{i=1}^{n} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{i}\right) =$

2. Escribir en forma de sumatoria las siguientes series:

a) $1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{9} + \frac{4}{27}$

b) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6}$

c) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$

d) $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12}$

3. Escribir en forma de sumatoria las siguientes series:

a) $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \ldots$

b) $2 + \frac{4}{3} + \frac{6}{5} + \frac{8}{7} + \frac{10}{9} + \ldots$

4. Calcular las siguientes sumas:

a) $\sum_{i=1}^{5} (2i^3 - i + 3) =$

b) $\sum_{i=1}^{7} (3i^3 - 2i^2 + i - 6) =$

c) $\sum_{i=1}^{20} (i^2 - i) =$

d) $\sum_{i=1}^{15} (i - 2i^2 + i^3) =$

5. Calcular el valor de las siguientes sumas:

a) $\sum_{k=20}^{30} k(k-3)$

b) $\sum_{k=12}^{k=36} (1-2k)$

c) $\sum_{k=5}^{k=8} (k^3 - k^2 + 1)$

d) $\sum_{k=8}^{k=10} 2k(1-k)$

6. Calcular el término general y el valor de los n primeros términos de las siguientes sumas:

a) $2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 7 + \ldots$

b) $3 + 5 + 7 + 9 + \ldots$

c) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 7 + \ldots$

d) $1 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 25 \cdot 5 + 36 \cdot 6 + 49 \cdot 7 + \ldots$

7. Dada la suma, hallar el término general μ_i:

a) $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = \frac{2n^3 + 3n^2 - 5n}{6}$

b) $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = \frac{n^3 + 2n}{3}$

c) $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = n^2 + 4n$

d) $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = \frac{3n^2 + 7n}{2}$

Soluciones

1. a) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$

b) $1 + 3 + 5 + 7 + 9$

c) $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64$

d) $1 + 8 + 27 + 64$

e) $-1 + 2 - 3 + 4 - 5$

f) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10}$

g) $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \ldots + 2n$

h) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2n-1}$

i) $-1 + 4 - 9 + 16 - 25 + \ldots + -1^n n^2$

j) $-2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \frac{6}{5} + \ldots + (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$

2. a) $\sum_{i=1}^{4} \frac{i}{3i-1}$ b) $\sum_{i=1}^{5} \frac{i}{i+1}$ c) $\sum_{i=1}^{6} (-1)^i \frac{1}{i+1}$ d) $\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{3i}$

3. a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2k-1}$ b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{2k-1}$

4. a) 450 b) 2.058 c) 2.660 d) 12.040

5. a) 6.160 b) –1.175 c) 1.026 d) –436

6. a) $u_k = (k+1)(k+2)$; $\sum_{k=1}^{n} (k+1)(k+2) = \frac{n^3 + 6n^2 + 11n}{3}$

b) $u_k = 2k + 1$; $\sum_{k=1}^{n} (2k+1) = n^2 + 2n$

c) $u_k = k(k+3)$; $\sum_{k=1}^{n} k(k+3) = \frac{n^3 + 6n^2 + 5n}{3}$

d) $u_k = k^2(k+1)$; $\sum_{k=1}^{n} k^2(k+1) = \frac{3n^4 + 10n^3 + 9n^2 + 2n}{12}$

7. a) $u_i = i^2 - 1$ b) $u_i = i^2 - i + 1$ c) $u_i = 2i + 3$ d) $u_i = 3i + 2$

12.2 Sucesiones

12.2.1 Definición

Una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de números naturales.
En general, se denota de la siguiente manera:

$\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

El término general de la sucesión es a_n; el subíndice indica el lugar que ocupa el término en la sucesión.

- **Ejemplos.**

Determinar los cinco primeros términos de la sucesión cuyo término general es:

1. $a_n = n$

$\{a_n\} = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

2. $a_n = \frac{1}{n}$

$\{a_n\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

3. $a_n = (-1)^n$

$\{a_n\} = -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$

4. $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$

$\{a_n\} = -\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, -\dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{-5}{6}, \ldots$

Ejercicios resueltos

Determinar el término general de las siguientes sucesiones:

1) $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$

$a_n = 2n - 1$ (números impares)

2) $1, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{25}, \ldots$

$a_n = \dfrac{1}{n^2}$ (numerador 1, denominador son los números al cuadrado)

3) $\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{7}, \dfrac{4}{9}, \dfrac{5}{11}, \ldots$

$a_n = \dfrac{n}{2n+1}$ (el numerador es n, los denominadores son impares, a contar del 3)

4) $\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, -\dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{32}, \ldots$

$a_n = (-1)^{n+1} \dfrac{1}{2^n}$ (los signos van intercalados, comenzando por +; los numeradores son 1 y los denominadores son potencias de 2)

5) $2, 5, 8, 11, 14, \ldots$

$a_n = 3n - 1$ (la diferencia entre cada par de términos consecutivos es 3, y parten del 2, que es 3 – 1)

6) $\dfrac{1}{3}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{5}{7}, \dfrac{7}{9}, \dfrac{9}{11}, \ldots$

$a_n = \dfrac{2n-1}{2n+1}$ (los numeradores son impares partiendo por el 1 y los denominadores son impares partiendo por el 3)

Ejercicios

1. Encuentra los cinco primeros términos de las sucesiones cuyos términos generales son:

   a) $a_n = \dfrac{n-3}{n-2}$

   b) $a_n = \dfrac{n^2}{n+1}$

   c) $a_n = \dfrac{2n+3}{2n-1}$

   d) $a_n = \dfrac{n^2-1}{n^2+1}$

   e) $a_n = (-1)^n \dfrac{2n}{2n+1}$

2. Encuentra el término general de las siguientes sucesiones:

   a) 3, 7, 11, 15, 19, ...

   b) –3, 9, –27, 81, –243, ...

   c) $\dfrac{3}{4}, \dfrac{5}{7}, \dfrac{7}{10}, \dfrac{9}{13}, \dfrac{11}{16}, \ldots$

   d) 1, –1, 1, –1, 1, ...

   e) $\dfrac{-1}{a}, \dfrac{-1}{a^2}, \dfrac{-1}{a^3}, \dfrac{-1}{a^4}, \dfrac{-1}{a^5}, \ldots$

Soluciones

1. a) $0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}$

   b) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{9}{4}, \dfrac{16}{5}, \dfrac{25}{6}$

   c) $\dfrac{5}{1}, \dfrac{7}{3}, \dfrac{9}{5}, \dfrac{11}{7}, \dfrac{13}{9}$

   d) $\dfrac{0}{2}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{8}{10}, \dfrac{15}{17}, \dfrac{24}{26}$

   e) $-\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{-6}{7}, \dfrac{8}{9}, \dfrac{-10}{11}$

2. a) $a_n = 4n - 1$

   b) $a_n = (-1)^n \cdot 3^n$

   c) $a_n = \dfrac{2n+1}{3n+1}$

   d) $a_n = (-1)^{n+1}$

   e) $a_n = \dfrac{-1}{a^n}$

12.2.2 Sucesiones convergentes

Una sucesión $\{a_n\}$ es convergente si sus términos se van acercando cada vez más a un cierto valor. Ese valor se llama el límite de la sucesión y se dice que la sucesión converge a ese límite.

Ejercicios resueltos

1. Tomemos la siguiente sucesión: $a_n = \dfrac{1}{n}$

   $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \ldots$

   Los términos de esta sucesión se van acercando cada vez más a cero, aunque nunca lo alcancen.

La sucesión $a_n = \frac{1}{n}$ es convergente y su límite es cero.

2. Tomemos la siguiente sucesión: $a_n = \frac{n}{n+1}$

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$

Los términos de esta sucesión se van acercando cada vez más a 1, aunque nunca lo alcancen.

La sucesión $a_n = \frac{n}{n+1}$ es convergente y su límite es 1.

3. Consideremos la siguiente sucesión $a_n = -2$

$-2, -2, -2, -2, -2, \ldots$

Todos los términos son iguales a -2, esta sucesión es convergente y su límite es -2.

12.2.3 Sucesiones divergentes

Si una sucesión no es convergente se dice que es divergente.

Una sucesión puede divergir porque sus términos oscilan o bien porque sus términos crecen o decrecen sin medida.

Una sucesión oscilante también puede ser convergente.

Ejercicios resueltos

1. Consideremos la siguiente sucesión $a_n = (-1)^n$

$-1, 1, -1, 1, -1, \ldots.$

En este caso los términos "oscilan" y no se acercan a ningún valor; decimos que esta sucesión diverge.

2. Consideremos la sucesión $a_n = 2n - 1$

$1, 3, 5, 7, 9, \ldots$

Los términos de esta sucesión se van haciendo cada vez más grandes, no se acercan a ningún valor y por lo tanto esta sucesión también diverge.

3. Consideremos la sucesión $a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{2n}$

$\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \ldots$

En este caso los términos "oscilan" pero se van acercando a cero; esta sucesión converge y su límite es cero.

12.2.4 Sucesiones crecientes y decrecientes

Una sucesión es creciente si cada término es mayor que el término anterior; es decir $a_n > a_{n-1}$

Una sucesión es decreciente si cada término es menor que el anterior $a_n < a_{n-1}$

Ejercicios resueltos

1. La sucesión $a_n = 2 - \frac{1}{n}$

$1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \frac{11}{6}, \ldots$

es una sucesión creciente, pero sus términos no crecen indefinidamente; ninguno de ellos es mayor que 2.

Esta es una sucesión convergente y su límite es 2.

2. La sucesión $a_n = \frac{2n+1}{3}$

$\frac{3}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{9}{3}, \frac{11}{3}, \frac{13}{3}, \ldots$

es una sucesión creciente y sus términos crecen indefinidamente. Esta es una sucesión divergente.

3. La sucesión $a_n = 1 - 3n$

$-2, -5, -8, -11, -14, \ldots.$

es una sucesión decreciente y sus términos decrecen sin medida. No converge.

4. La sucesión $a_n = \frac{1}{2n-1}$

$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \ldots$

es una sucesión decreciente, ya que el denominador "crece" sin medida mientras que el numerador se mantiene constante. Esta sucesión converge y su límite es cero.

Nota: En muchos casos, para determinar la convergencia o divergencia de una situación es conveniente calcular los términos de ella para valores muy grandes de n.

Ejercicios

1. Analiza las siguientes sucesiones determinando cuáles de ellas son crecientes, decrecientes, oscilantes, convergentes o divergentes.

   a) $a_n = n + 2$

   b) $a_n = 6 - 12n$

   c) $a_n = \dfrac{3}{n+3}$

   d) $a_n = \dfrac{3n-1}{n-1}$

   e) $a_n = 1 - \dfrac{1}{n}$

   f) $a_n = (-1)^n \cdot n$

   g) $a_n = (-1)^{2n} \cdot \dfrac{n}{n+1}$

   h) $a_n = (-1)^{n+1} \dfrac{(n+1)^2}{n^2}$

   i) $a_n = (-1)^n \dfrac{n^2}{(n+1)^2}$

   j) $a_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ (compare con ej. e)

   k) $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$

   l) $a_n = \begin{cases} n & \text{si n es par.} \\ -n & \text{si n es impar.} \end{cases}$

2) **a)** Escribe 3 sucesiones crecientes que sean convergentes.

b) Escribe 3 sucesiones crecientes que sean divergentes.

c) Escribe 3 sucesiones decrecientes que sean convergentes.

d) Escribe 3 sucesiones decrecientes que sean divergentes.

e) Escribe 3 sucesiones oscilantes que sean convergentes.

f) Escribe 3 sucesiones oscilantes que sean divergentes.

3) Conjetura hipótesis sobre:

a) Condición necesaria (y suficiente) para que una sucesión creciente sea convergente.

b) Condición necesaria (y suficiente) para que una sucesión decreciente sea convergente.

c) Averigua el significado del concepto de "sucesiones acotadas" y da ejemplos de ella.

Soluciones

1) a) creciente, diverge

b) decreciente, diverge

c) decreciente, converge

d) creciente, converge

e) creciente, converge

f) oscila, diverge

g) oscila, converge

h) oscila, converge

i) oscila, converge

j) decrece, converge (al mismo valor que sucesión e)

k) decreciente, converge

l) oscila, diverge.

12.3 Progresión aritmética

Definición: Una **Progresión Aritmética** (P.A.) es una sucesión de términos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ tal que cada uno se obtiene de sumar un valor constante al anterior.

$\mathbf{a_1}$: primer término de la P.A.

d : diferencia de la P.A.

$\mathbf{a_n}$: término enésimo de la P.A.

n : número de términos de la P.A.

$\mathbf{S_n}$: suma de n términos de la P.A.

Fórmulas en una P.A.

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d$$

$$d = a_n - a_{n-1}$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)\,d]$$

Los términos de una P.A. que se encuentran entre dos términos dados se llaman **medios aritméticos** y el procedimiento para hallarlos se denomina **interpolación** de medio aritméticos.

Ejercicios resueltos

1. Calcular el término que ocupa el lugar 50 en una P. A. si el primero es 5 y la diferencia es 2.

Solución:

$a_1 = 5$; $d = 2$; $n = 50$; $a_n = ?$

$a_n = a_1 + (n-1)\,d$

$a_{50} = 5 + 49 \cdot 2 = 103$

$a_{50} = 103$

2. El undécimo término de una P. A. es 49 y su diferencia es 4. Encontrar el primer término.

Solución:

$a_{11} = 49 \quad ; \quad d = 4 \quad ; \quad a_1 = ?$

$a_n = a_1 + (n-1)\,d$

$49 = a_1 + (11-1)\,4$

$a_1 = 49 - 40$

$a_1 = 9$

3. El primer término de una P. A. es 5, su diferencia es 4 y el término enésimo es 53. Hallar el número de términos.

Solución:

$a_1 = 5 \quad ; \quad d = 4 \quad ; \quad a_n = 53 \quad ; \quad n = ?$

$a_n = a_1 + (n-1)\,d$

$53 = 5 + (n-1)\,4$

$4n = 52$

$n = 13$

4. Determinar la P. A. cuyo quinto término es 14 y cuyo décimo término es 29.

Solución:

Conocer una P. A. significa determinar su primer término y su diferencia.

$a_5 = 14 \quad ; \quad a_{10} = 29$

como $a_n = a_1 + (n-1)\,d$

se tiene $14 = a_1 + 4d$

$29 = a_1 + 9d$

Resolviendo el sistema:

$d = 3$ y $a_1 = 2$ luego la P. A. es:

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32,...

5. En la P. A. tal que su sexto término es 15 y la diferencia es $\frac{3}{5}$, hallar el término del lugar 16.

Solución:

$a_6 = 15 \quad ; \quad d = \frac{3}{5} \quad ; \quad a_{16} = ?$

$a_6 = a_1 + 5d \Rightarrow 15 = a_1 + 3 \Rightarrow a_1 = 12$

$a_{16} = a_1 + 15d \Rightarrow a_{16} = 12 + 9 \Rightarrow a_{16} = 21$

6. Interpolar 5 medios aritméticos entre los números 3 y 6.

Solución:

Se está pidiendo formar una P. A. de 7 términos donde el primero es 3 y el séptimo es 6. Se debe determinar la diferencia y con ello calcular los 5 medios aritméticos pedidos:

$a_1 = 3 \quad ; \quad a_7 = 6 \quad ; \quad a_2, a_3 \ldots a_6 = ?$

$a_7 = a_1 + 6d$

$6 = 3 + 6d \Rightarrow d = \frac{1}{2}$

Luego: $a_2 = \frac{7}{2}, \quad a_3 = 4, \quad a_4 = \frac{9}{2}, \quad a_5 = 5, \quad a_6 = \frac{11}{2}$

Son los cinco medios aritméticos pedidos.

7. Hallar tres números que están en P. A. y cuya suma sea 39.

Solución:

Sean a_1, a_2 y a_3 los números pedidos.

Hagamos $a_1 = a_2 - d$ y $a_3 = a_2 + d$.

Luego: $(a_2 - d) + a_2 + (a_2 + d) = 39$

$$3a_2 = 39$$

$$a_2 = 13$$

$a_1 + a_2 + a_3 = 39$

$a_1 + a_3 = 26$

Si $a_1 = 1$, entonces $a_3 = 25$ y los tres números pedidos son 1, 13 y 25.

Si $a_2 = 2$, entonces $a_3 = 24$ y los tres números pedidos son 2, 13 y 24.

Luego, este problema tiene infinitas soluciones. Los tríos de números naturales que satisfacen la condición son:

1, 13 y 25	6, 13 y 20	11, 13 y 15
2, 13 y 24	7, 13 y 19	12, 13 y 14
3, 13 y 23	8, 13 y 18	13, 13 y 13
4, 13 y 22	9, 13 y 17	
5, 13 y 21	10, 13 y 16	

8. Determinar una P. A. sabiendo que la suma del primer y tercer término es 44 y el producto del segundo por el primero es 418.

Solución:

Sean $a - d$, a, $a + d$ los tres términos de la P. A.

$$(a - d) + (a + d) = 44 \quad (1)$$

$$a(a - d) = 418 \quad (2)$$

De (1) $2a = 44 \Rightarrow a = 22$

$$66.528.000.000 = 1.920.000\, n + 80.000\, n^2$$

$$8n^2 + 192\, n - 6.652.800 = 0 \qquad /: 8$$

$$n^2 + 24\, n - 831.600 = 0$$

$$n = \frac{-24 \pm \sqrt{3.326.976}}{2} = \begin{cases} n_1 = 900 \\ n_2 = -924 \end{cases}$$

Luego el túnel tiene 900 m de largo.

Ejercicios

1. Dadas las progresiones aritméticas siguientes, hallar el término que se indica:

a) 5, 8, 11, 14... a_{10}

b) 5, 2, –1, –4... a_{20}

c) $\frac{1}{2}$, 2, $\frac{7}{2}$, 5... a_{12}

d) 3, 8, 13, 18... a_{15}

2. Determinar cuántos términos tiene una P.A. si el primero es 5, el último es 50 y la diferencia es 3.

3. Hallar la P.A. tal que la suma de los 20 primeros términos es 120 y su diferencia es 2.

4. Determinar la diferencia en una P.A. cuyo término de lugar 27 es 32 y cuyo término de lugar 18 es 5. Hallar también el primer término.

5. Calcular el término de lugar 100 en la P.A. –6, –4, –2, 0, 2, ...

6. En la P.A. 5, 8, 11, 14... determinar qué lugar ocupa el término de valor 65.

7. Interpolar cinco medios aritméticos entre 12 y 42.

8. Interpolar tres medios aritméticos entre 12 y –12.

9. Interpolar tres medios aritméticos entre 1 y 7.

10. Hallar la suma de los 10 primeros términos de las siguientes sucesiones:

a) 1, 2, 3,...

b) 2, 4, 6,...

c) 5, 2, –1,...

d) 1, $\frac{1}{2}$, 0,...

11. Encontrar la suma de una P.A. de 20 términos si el primero es 5 y el último es 62.

12. Hallar la suma de los 15 primeros términos de una P.A. si se sabe que el quinto término es 17 y el séptimo es 23.

13. Calcular la suma de los múltiplos de siete que están entre 100 y 200.

14. En una P.A. cuya diferencia es 4 el término central vale 21 (tiene un número impar de términos). Si su suma es 189, encontrar el número de términos y escribir la progresión.

15. Hallar tres números enteros que estén en P.A., cuyo producto es 15.000 y cuya suma es 75.

16. Determinar cuántos términos de la P.A., 2, 6, 10,... hay que sumar para obtener 288.

17. Al sumar números pares consecutivos a partir del 10 se obtiene 580. ¿Cuántos números se han sumado?

18. La suma de cinco números que están en P.A. es 20 y su producto es 720. Hallar dichos números.

19. Encontrar tres números sabiendo que están en P.A., que su suma es 51 y el mayor es dos unidades menor que el doble del menor.

20. La suma de los nueve términos de una P.A. es –9. La diferencia entre el primer y el último es –16. Hallar dicha progresión.

21. Hallar una P.A. de 8 términos sabiendo que los cuatro primeros suman 40 y que los cuatro últimos suman 72.

22. En una P.A. el segundo y el décimo término suman 44 y el primero mñas el noveno suman 34. Hallar los términos mencionados.

23. Si las expresiones $5x + 3$, $3x + 2$ y $2x - 1$ están en P.A., hallar el valor de x.

24. Interpolar dos medios aritméticos entre a y b. Dar un ejemplo si $a = 5$ y $b = 8$.

25. Determinar d en una P.A. de $n + 2$ términos si $a_1 = a$ y $a_{n+2} = b$.

26. Interpolar 5 medios aritméticos entre –2 y 10.

27. Encontrar la suma de los n primeros números naturales.

28. Encontrar la suma de los p primeros números naturales pares.

29. Encontrar la suma de los q primeros números naturales impares.

30. Para construir una vía elevada se levanta sobre una superficie horizontal una rampa de pendiente uniforme, la cual se sostiene sobre 12 soportes igualmente espaciados. La altura del primer soporte es 2 m y la del más alto es de 51,5 m. Encontrar la altura de cada soporte.

31. Las medidas de los lados de un triángulo rectángulo forman una P.A. y suman 45 m. Calcular cuánto mide cada uno.

32. Se deja caer una bola de goma, la cual en el primer bote se levanta 1 m del suelo, en el segundo bote sólo 95 cm, en el tercer bote 90 cm y así sucesivamente. Calcular cuánto ha recorrido la bola desde que toca por primera vez el suelo hasta que llega al punto más alto después del décimo bote. ¿Cuántos botes alcanza a dar antes de detenerse?

33. Las medidas de los ángulos de un triángulo forman una P.A. Si uno de ellos mide 20º, ¿cuánto miden los otros dos?

34. ¿Cuántos medios aritméticos se deben interpolar entre 4 y 40 para que la suma de la P.A. resultante sea 220? ¿Cuáles son esos medios?

35. Un espectador de teatro ve bien a 26 m del escenario. ¿En qué fila debe sentarse si la primera dista 8 m del escenario y la decimoctava, que es la última, está a 42 m del escenario?

Soluciones

1. a) 32 b) –52 c) 17 d) 73

2. 16 **3.** –13, –11, –9, –7...

4. $d = 3$; $a_1 = -46$ 5. 192 6. 21

7. Los medios son 17, 22, 27, 32 y 37

8. Los medios son 6, 0 y –6.

9. Los medios son $\frac{5}{2}$, 4 y $\frac{11}{2}$

10. a) 55 b) 110 c) –85 d) –12.5

11. 670 12. 390 13. 2.107

14. n = 9; 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37

15. 20, 25 y 30   16. 12   17. 20

18. 2, 3, 4, 5, 6   19. 12, 17 y 22

20. −9, −7, −5, −3, −1, 1, 3, 5, 7, ($a_1 = -9$; $d = 2$)

21. $a_1 = 7 \quad d = 2$

22. $a_1 = -3,\ a_2 = 2,\ a_9 = 37,\ a_{10} = 42,$

23. $x = 2$ 24. $\dfrac{2a + b}{3}, \dfrac{a + 2b}{3}$; 6, 7

25. $d = \dfrac{b - a}{n + 1}$ 26. 0, 2, 4, 6, 8

27. $S_n = \dfrac{n(n + 1)}{2}$ 28. $p + p^2$ 29. q^2

30. 2, 6.5, 11, 15.5, 20, 24.5, 29, 33.5, 38, 42.5, 47, 51.5 m.

31. 11.25 m, 15 m y 18.75 m.

32. 14.95 m alcanza a dar 20 botes

33. 60º y 100º

34. Se deben interpolar 8 medios y son 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32 y 36.

35. Deben sentarse en la décima fila.

12.4 Progresión geométrica

12.4.1 Definición

Una **Progresión geométrica** (P.G.) es una sucesión de términos $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ tal que cada uno se obtiene de multiplicar el antecesor por un valor constante r.

a_1 : primer término de la P.G.

r : razón de la P.G.

a_n : término enésimo de la P.G.

n : número de términos de la P.G.

S_n : suma de n términos de la P.G.

P_n : producto de n términos de la P.G.

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}, \ r \neq 1$$

Si $r = 1$ entonces $S_n = n \cdot a_1$

Si $n \Rightarrow \infty$ y $|r| < 1$, entonces

$$S_n = \frac{a_1}{1 - r}$$

$$P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

Los términos de una P.G. que se encuentran entre dos términos dados se llaman **medios geométricos** y el procedimiento para encontrarlos se denomina **interpolación** de medios geométricos.

12.4.2 Cálculo de intereses de capital

Una aplicación directa de las progresiones geométricas la encontramos en los problemas financieros de intereses.

Un capital inicial C produce durante un año al i% de interés anual los intereses de $\frac{C \cdot i}{100}$.

Se llama **interés compuesto** si al cabo del año ese dinero que se obtuvo como interés de capital pasa a formar parte del capital y produce interés para el año siguiente.

Entonces en t años el capital inicial C se convierte en un capital final que llamaremos S y se calcula según la fórmula.

$$S = C\left(1 + \frac{i}{100}\right)^t$$

Por cada año que pasa el capital es un término de una P.G., donde el primer término es el capital inicial C y la razón es $1 + \frac{i}{100}$.

NOTA: t representa el período que se acuerda para el cálculo y pago de los intereses. Puede ser anual, semestral, trimestral o mensual.

Ejercicios resueltos

1. Calcule el noveno término de una P.G. cuyo primer término es 1 y la razón es 3.
   Solución:
   $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ $\qquad a_1 = 1 \;;\; r = 3 \;;\; a_9 = ?$
   $a_9 = 1 \cdot 3^8 = 6.561$
2. El quinto término de una P.G. es 162 y el primero es 2. Hallar la razón.
   Solución:
   $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ $\qquad a_1 = 2 \;;\; a_5 = 162 \;;\; r = ?$
   $162 = 2 \cdot r^4 \Rightarrow r^4 = 81$
   $r = \sqrt[4]{81}$
   $r = 3$

3. El séptimo término de una P.G. es 192 y la razón es 2. Hallar el primer término:
Solución:
$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$
$a_7 = 192 \quad ; \quad r = 2 \quad ; \quad a_1 = ?$
$$192 = a_1 \cdot 2^6 \Rightarrow a_1 = \frac{192}{64} = 3$$

4. En una P.G. el primer término es 32 y la razón es $\frac{1}{2}$. Determinar qué lugar ocupa el término que vale $\frac{1}{8}$.
Solución:
$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$
$a_n = \frac{1}{8} \quad ; \quad a_1 = 32 \quad ; \quad r = \frac{1}{2} \quad ; \quad n = ?$
$$\frac{1}{8} = 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$2^{-3} = 2^5 \cdot 2^{1-n}$$
$$2^{-3} = 2^{6-n}$$
$$\Downarrow$$
$$-3 = 6 - n$$
$$\Downarrow$$
$$n = 9$$
El término $\frac{1}{8}$ ocupa el noveno lugar de la P.G. dada.

5. Demostrar que la suma de n términos de una P.G. cuyo primer término es a_1 y cuya razón es r dada por la fórmula
$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ • Si $|r| < 1$ y n tiende a infinito, entonces la suma de infinitos términos de la P.G. es $S = \frac{a_1}{1-r}$.

Solución:

Los términos de la P.G. son a_1, $a_2 = a_1 r$
$a_3 = a_1 r^2$, $a_4 = a_1 r^3$, ... $a_n = a_1 r^{n-1}$, entonces
$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + ... + a_1 r^{n-1} \qquad / \cdot r$$
$$r S_n = a_1 r + a_1 r^2 + ... + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n$$
restando miembro a miembro.
$$S_n - r S_n = a_1 - a_1 r^n$$
$$S_n (1 - r) = a_1 (1 - r^n)$$
$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$
Si $|r| < 1$ entonces r^n se hace cada vez más chico a medida que aumenta n. Por ejemplo si r = 0,5

$r^2 = (0,5)^2 = 0,25$	$r^7 = (0,5)^7 = 0,0078125$
$r^3 = (0,5)^3 = 0,125$	•
$r^4 = (0,5)^4 = 0,0625$	•
$r^5 = (0,5)^5 = 0,03125$	$r^{15} = (0,5)^{15} = 0,0000305$
$r^6 = (0,5)^6 = 0,015625$	•
	•

es decir, si n es muy grande, r^n se hace muy pequeño y se puede despreciar su valor por lo que en ese caso r^n tiende a cero y:

$$S = \frac{a_1}{1 - r}$$

6. Hallar la suma de los 10 primeros términos de la P.G. 4, 12, 36, 108...

Solución:

$$a_1 = 4 \; ; \; r = \frac{36}{12} = 3 \; ; \; n = 10$$

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

$$S_{10} = \frac{4(1 - 3^{10})}{1 - 3} = \frac{4(1 - 59.049)}{-2} = 118.096$$

7. Calcular la suma de infinitos términos de la P.G.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$$

Solución:

$$a_1 = 1 \; ; \; r = \frac{1}{2} < 1 \; ; \; n \Rightarrow \infty$$

$$S = \frac{a_1}{1 - r}$$

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

8. Demostrar que el producto de n términos de una P.G. es

$$P_n = \sqrt{(a_1 \bullet a_n)^n}$$

Solución:

Sea la P.G. cuyo primer término es a_1, y la razón es r, entonces los términos siguientes son:

$a_2 = a_1 r$
$a_3 = a_1 r^2$
$a_4 = a_1 r^3$
•
•
$a_n = a_1 r^{n-1}$
$P_n = a_1 \bullet a_1 r \bullet a_1 r^2 \bullet \ldots \bullet a_1 r^{n-2} \bullet a_1 r^{n-1}$
$P_n = a_1 r^{n-1} \bullet a_1 r^{n-2} \bullet a_1 r^{n-3} \bullet \ldots \bullet a_1 r \bullet a_1$

Multiplicando término a término:

$P_n^2 = a_1 a_1 r^{n-1} \bullet a_1 a_1 r^{n-1} \bullet a_1 a_1 r^{n-1} \bullet \ldots \bullet a_1 a_1 r^{n-1} \bullet a_1 a_1 r^{n-1}$
$P_n^2 = (a_1 \bullet a_n)^n$
$P_n = \sqrt{(a_1 \bullet a_n)^n}$

9. Calcular el producto de los 10 primeros términos de la P.G.

$$3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \ldots$$

Solución.

$P_n = \sqrt{(a_1 \bullet a_n)^n}$

$a_1 = 3$; $r = \frac{1}{2}$; $a_{10} = 3\left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{3}{2^9}$

$P_{10} = \sqrt{(3 \bullet 3 \bullet 2^{-9})^{10}} = (3 \bullet 3 \bullet 2^{-9})^5 = 3^{10} \bullet 2^{-45}$

$P_{10} = 3^{10} \bullet 2^{-45}$

10. Interpolar 5 términos entre $\frac{1}{8}$ y 512 para que resulte una progresión geométrica.

Solución:

Se trata de formar una P.G. donde el primer término sea $\frac{1}{8}$ y el séptimo término sea 512.

$a_1 = \frac{1}{8} = 2^{-3}$

$a_7 = 512 = 2^9$

$a_7 = a_1 \bullet r^6 \Rightarrow 2^9 = 2^{-3} \bullet r^6 \Rightarrow r^6 = 2^{12}$

$r = \sqrt[6]{4.096} \Rightarrow r = 4$

Con una calculadora podríamos aplicar logaritmo para calcular r.

$a_2 = \frac{1}{8} \bullet 4 = \frac{1}{2}$

$a_3 = \frac{1}{8} \bullet 4^2 = 2$

$a_4 = \frac{1}{8} \bullet 4^3 = 8$

$a_5 = \frac{1}{8} \bullet 4^4 = 32$

$a_6 = \frac{1}{8} \bullet 4^5 = 128$

11. Probar que en una P.G. que tiene un número impar de términos, el término central es igual a la raíz cuadrada del producto de los extremos.

Solución:

Sea p = 2 n – 1 el número de términos de la P.G.

El primer término es a_1.

El p-ésimo término es $a_p = a_1 \bullet r^{p-1}$

El término central a_c es el de lugar $\frac{p+1}{2}$, es decir, es

$a_c = a_1 r^{\frac{p-1}{2} - 1}$

$a_c = a_1 r^{\frac{p-1}{2}}$

$a_c = a_1 r^{n-1}$

$a_c = a^n$

Por demostrar que $a_c = \sqrt{a_1 \bullet a_p} = \sqrt{a_1 \bullet a_1 r^{p-1}} =$

$\sqrt{a_1 \bullet a_1 r^{2n-2}} = \sqrt{a_1^2 \bullet r^{2(n-1)}} = \sqrt{(a_1 \bullet r^{n-1})^2} = a_1 \bullet r^{n-1} = a_n$

luego $a_c = \sqrt{a_1 \bullet a_p}$ $\quad$ p número impar.

12. Hallar el quinto término de una P.G. si se sabe que el primer término es 2 y el noveno es 13.122.

Solución.

Como es una P.G de 9 términos, el quinto es el término central y por lo tanto es la raíz del producto del primero por el último (ver ejercicio anterior).

$a_5 = \sqrt{a_1 \bullet a_9} = \sqrt{2 \bullet 13.122} = 162$

13. Se toma una hoja de papel de 0,1 mm de grosor. Se corta en dos y se pone una encima de la otra; queda un grosor de 0,2 mm. Este fajo se corta en dos y se pone una parte encima de la otra; queda de grosor de 0,4 mm. La siguiente vez que se efectúa el mismo procedimiento, el fajo queda con un grosor de 0,8 mm. Suponiendo que el papel es de un tamaño tal que permite efectuar el mismo procedimiento 30 veces, averiguar el grosor que tendría el fajo formado.

Solución.

El grosor se duplica cada vez que se efectúa el procedimiento descrito: 0,1; 0,2; 0,4; 0,8, ... estamos frente a una P.G. cuyo primer término $a_1 = 0{,}1$ mm y cuya razón $r = 2$. La altura del fajo pedida es la suma de los 30 primeros términos de esta P.G.

$$S_{30} = \frac{a_1(1 - r^{29})}{1 - r} = \frac{0{,}1(1 - 2^{29})}{1 - 2} = 53.687.091 \text{ mm}$$

Por lo tanto, el grosor del fajo obtenido luego de cortar 30 veces el papel es de aproximadamente 53,68 km.

14. Se estima que el crecimiento de la población de una región será de un 2% anual. Calcular el porcentaje en que habrá crecido la población al cabo de 20 años. ¿A los cuántos años se duplicará la población?

Solución.

Sea p la cantidad de población existente. Si el crecimiento se estima en un 2% anual, entonces al cabo del:

1^{er} año será 1,02 p

2^{do} año será $(1{,}02)^2$ p

3^{er} año será $(1{,}02)^3$ p

•

•

20^{o} año será $(1{,}02)^{20}$ p = 1,49 p.

Por lo tanto, en 20 años la población crecerá en un 49%.

Estamos frente a una P.G. cuyo primer término es p (población existente en el momento de efectuar la medición) y cuya razón es 1,02 (crecimiento de 2% anual).

Queremos averiguar en cuántos años se duplicará la población.

$$a_n = 2p$$
$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$
$$2p = p \cdot (1{,}02)^{n-1}$$
$$2 = \frac{(1{,}02)^n}{1{,}02}$$
$$(1{,}02)^n = 2{,}04$$
$$n = \frac{\log 2{,}04}{\log 1{,}02}$$
$$n = 36$$

Es decir, al cabo de 36 años se duplicará la población existente si la tasa de crecimiento es de un 2% anual.

15. Expresar en forma racional los decimales infinitos siguientes:

a) 0,424242...

b) 025323232...

Solución:

a) $0{,}424242... = \frac{42}{100} + \frac{42}{10.000} + \frac{42}{1.000.000} + ...$

Es decir, se trata de una suma de infinitos términos de una P.G. cuyo primer término $a_1 = \frac{42}{100}$ y cuya razón $r = \frac{1}{100}$

Como $r = \frac{1}{100} < 1$, entonces:

$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{42}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{\frac{42}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{42}{99} = \frac{14}{33}$$

Así; $0{,}42 = \frac{14}{33}$

b) $0{,}25323232... = 0{,}25 + \frac{32}{10.000} + \frac{32}{1.000.000} + ...$

Se trata de sumar infinitos términos de una P.G. cuyo primer término $a_1 = \frac{32}{10.000}$ y su razón $r = \frac{1}{100}$. Luego sumamos 0,25 y obtenemos la fracción pedida:

$$S = \frac{\frac{32}{10.000}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{\frac{32}{10.000}}{\frac{99}{100}} = \frac{32}{9.900}$$

Así; $0{,}25323232... = 0{,}25 + \frac{32}{9.900}$

$$= \frac{1}{4} + \frac{32}{9.900} = \frac{2.475 + 32}{9.900}$$

$$= \frac{2.507}{9.900}$$

Luego $0{,}25323232... = \frac{2.507}{9.900}$

16. Probar que dado un capital C, puesto a un interés compuesto del i% en un período determinado, al cabo de t períodos iguales el capital C se ha transformado en $C\left(1+\frac{i}{100}\right)^t$

Solución.

Capital: C; interés: i%; t = períodos

Llamaremos S al capital acumulado al cabo de t períodos.

Al finalizar el primer período:

$$\text{interés} = C \bullet \frac{i}{100} \quad ; \quad \text{Capital} = C + \frac{Ci}{100} = C\left(1+\frac{i}{100}\right)$$

Al finalizar el segundo período:

$$\text{interés} = C\left(1+\frac{i}{100}\right)\frac{i}{100}\ ;\ \text{Capital}=C\left(1+\frac{i}{100}\right)+C\left(1+\frac{i}{100}\right)\frac{i}{100}$$

$$= C\left(1+\frac{i}{100}\right)^2$$

Al finalizar el tercer período:

$$\text{interés} = C\left(1+\frac{i}{100}\right)^2 \bullet \frac{i}{100};\ \text{Capital}= C\left(1+\frac{i}{100}\right)^2 + C\left(1+\frac{i}{100}\right)^2\frac{i}{100}$$

$$= C\left(1+\frac{i}{100}\right)^3$$

Al finalizar el t-ésimo período:

$$\text{interés} = C\left(1+\frac{i}{100}\right)^{t-1} \bullet \frac{i}{100}\ ;\ \text{Capital} = C\left(1+\frac{i}{100}\right)^t$$

del t-ésimo período.

17. Se invierten \$ 500.000 al 6% anual. Calcular el capital que se habrá formado al cabo de 5 años si el interés es compuesto:
a) anual, **b)** semestral, **c)** cuatrimestral.

Solución.

C = 500.000 ; i = 6% anual ; t = 5 años

a) Al cabo de 5 años el capital se transforma en:

$$C\left(1+\frac{i}{100}\right)^t = 500.000\left(1+\frac{6}{100}\right)^5 =$$

$$= 500.000\ (1{,}06)^5 = \$\ 669.111$$

b) Si los intereses se calculan semestralmente (dos veces al año).
C = 500.000 ; i = 3% semestral ; t = 2 • 5 = 10

En estas condiciones al cabo de 5 años el capital se transforma en:

$$C\left(1+\frac{i}{100}\right)^t = 500.000\left(1+\frac{3}{100}\right)^{10} =$$

$$= 500.000\ (1{,}03)^{10} = \$\ 671.958$$

c) Si los intereses se calculan cuatrimestralmente (cuatro veces al año)

C = 500.000 ; i = 2% trimestral ; t = 3 • 5 = 15

Ahora el capital, al cabo de 5 años, se transforma en:

$$C\left(1+\frac{i}{100}\right)^t = 500.000\left(1+\frac{2}{100}\right)^{15} =$$

$$=500.000\,(1{,}02)^{15} = \$\ 672.933$$

18. Calcular el capital que debe invertirse para que con un interés compuesto del 10% anual, pagado semestralmente, al cabo de 3 años se logre un capital de \$1.000.000.

Solución.

Nos preguntan por el capital inicial C. Llamaremos S al capital logrado en los 3 años.

$S = 1.000.000 \quad ; \qquad i = 5\% \quad ; \qquad t = 6$

$$S = C\left(1+\frac{i}{100}\right)^t$$

$$1.000.000 = C\,(1{,}05)^6$$

$$C = \frac{1.000.000}{1{,}34} = \$\,746.268$$

Luego, para lograr \$ 1.000.000 en 3 años en las condiciones señaladas, debe invertirse un capital inicial de aproximadamente \$ 746.268.

19. ¿A qué porcentaje de interés compuesto deberá ponerse un capital para que se duplique en 5 años?

Solución:

Se desea que el capital inicial se duplique en 5 años: S = 2C

$$S = C\left(1+\frac{i}{100}\right)^t ; \qquad i = ? ; \qquad t = 5 \text{ años}$$

$$2C = C\left(1+\frac{i}{100}\right)^5$$

$$2 = \left(1+\frac{i}{100}\right)^5$$

$$100\sqrt[5]{2} = 100 + i$$

$$i = 100\sqrt[5]{2} - 100$$

$$i = 100 \cdot 1{,}1487 - 100$$

$$i = 114{,}87 - 100 = 14{,}87$$

Es decir, un capital puesto a un interés compuesto del 15% anual se duplica en 5 años (ver ejercicio siguiente).

20. Calcular el capital que se obtiene al depositar \$ 400.000 a un interés compuesto del 15% anual durante 5 años.

Solución.

$C = 400.000 \ ; \qquad i = 15\% \ ; \qquad t = 5 \ ; \qquad S = ?$

$$S = C\left(1+\frac{i}{100}\right)^t \qquad\qquad S = 400.000\left(1+\frac{15}{100}\right)^5$$

$= 400.000\ (1,15)^5$

$= 400.000 \cdot 2{,}0113571 = \$\ 804.543$

Vemos que en 5 años al 15% el capital aproximadamente se duplica.

21. Un banco concede un préstamo de \$ 1.000.000 pagadero en 3 años con un interés anual del 15%. ¿Cuánto se debe cancelar mensualmente? ¿Cuánto se cancelará en total?

Solución:

El 15% anual corresponde al 1,25% de interés mensual y son 36 meses; por lo tanto, el capital de \$ 1.000.000 se convertirá al cabo de los tres años en S.

$$S = C\left(1 + \frac{i}{100}\right)^t \qquad \begin{aligned} C &= 1.000.000 \\ i &= 1{,}25 \\ t &= 36 \end{aligned}$$

$S = 1.000.000\ (1{,}0125)^{36} = 1.563.942$

lo que dividido en 36 cuotas nos da \$ 43.443 cada mensualidad. Se deben pagar 36 mensualidades de \$ 43.443 cada una, lo que da un total de \$ 1.563.942.

Ejercicios

1. Determine si las siguientes sucesiones son o no progresiones geométricas. Si lo son, hallar la razón.

   a) 4, 12, 36, ...

   b) 24, 18, 14, ...

   c) 3, – 9, 27, ...

   d) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

   e) $q, 1, \frac{1}{q}, \frac{1}{q^2}, \ldots$

   f) $\frac{1}{r} + r, \frac{1}{r^2} + 2 + r^2, \frac{1}{r^3} + \frac{3}{r} + 3r + r^3, \ldots$

2. Encuentre el quinto término y la suma de los 10 primeros términos de la P. G. 8, 4, 2, ...

3. El segundo término de una P. G. es y el quinto es $\frac{32}{3}$. Encuentre el octavo término.

4. Encuentre tres números que formen una P. G. tales que su producto sea 1.728 y su suma sea 52.

5. En una P. G. el primer término es 23 y la razón es 2. ¿Cuántos términos se deben sumar para que el resultado sea 1.449?

6. Una P. G. consta de cuatro términos. Si la suma del primero y el último es 168 y la suma de los dos centrales es 72, encuentre esta progresión.

7. Si un muchacho ganara \$ 1 el primer día de su trabajo, \$ 2 el segundo día, \$ 4, el tercer día, \$ 8 el cuarto, ¿cuánto habría ganado al cabo de 20 días de trabajo?

8. Calcule la media geométrica entre p y q.

9. Encuentre los 5 primeros términos de una P. G. de modo que el primero sea 2 y el segundo sea 3.

10. Interpole 4 términos entre 1 y 243 de modo que formen una P. G.

11. Interpole tres términos entre $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{108}$ de modo que se forme una P. G.

12. Interpole dos medios geométricos entre a y b.

13. Interpole dos medios geométricos entre 6 y 162 (ver ejercicio anterior).

14. Encuentre tres números en P. G. tales que su producto sea 512 y que el menor sea la décima parte del doble del central.

15. Determine el producto de los once términos de una P. G. si el término central es 3.

16. Determine el producto de los 2n–1 términos de una P. G. si su término central es q.

17. Determine cuatro números que estén en P. G. tales que el primero y el cuarto sumen $\frac{91}{108}$ y los dos centrales sumen $\frac{7}{9}$.

18. En la P. G. $\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \ldots$, encuentre el valor de la razón y la suma de infinitos términos.

19. Calcule la suma de $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots$

20. Determine cuántos términos tiene la P. G. cuyo primer término es 2 y cuyo último término es 512 si su suma es 682.

21. La suma de una P. G. infinita es 6,25 y el segundo término es 1. Encuentre la razón y escribir los cuatro primeros términos.

22. Calcule la suma de:

$3 + 0,3 + 0,03 + 0,003 + \ldots$

23. La suma de tres números en P. G. es 35. La diferencia entre el mayor y el menor es 15. Encuentre la progresión.

24. Encuentre x para que $\frac{x-4}{2}$, $x + 2$ y $2(x - 2)$ estén en P. G. ¿Cuánto vale la razón?

25. Determine x para que $x + 1$, $2x + 2$ y $4x + 4$ formen una P. G.

26. Determine x para que $x - 1$, $x + 2$ y $x + 5$ estén en P. G.

27. Encuentre la suma de n términos de la P. G. $1, -1, 1, -1, \ldots$

28. Si se sabe que una determinada bacteria se reproduce por bipartición cada 20 minutos, es decir, de cada bacteria aparecen 2 cada 20 min, ¿cuántas bacterias habrá pasadas 10 horas desde que se detectó la primera?

29. Se tiene un cuadrado de lado a. Se inscribe en él un cuadrado uniendo los puntos medios del cuadrado original y así se van inscribiendo cuadrados cada vez más chicos. Calcule la suma de las áreas y de los perímetros de los infinitos cuadrados así obtenidos.

30. Calcule la suma de las áreas y de los perímetros de todos los cuadrados que se pueden inscribir sucesivamente a partir de un cuadrado de 4 m de lado.

31. El crecimiento de una población es del 4% anual. ¿Qué población habrá dentro de 10 años si hoy hay 150.000 habitantes?

32. Una región tiene 1.000.000 de habitantes. ¿En cuántos años se duplicará esta población si la tasa de crecimiento es del 5% anual?

33. Calcule el capital final que se obtendrá si se invierten \$ 2.000.000 al 16% anual al cabo de 3 años.

34. Determine el capital que se obtiene en 2 años colocando \$ 500.000 a un interés del 8% anual si los intereses se liquidan trimestralmente.

35. ¿Qué capital se debe invertir si se quiere que al cabo de 5 años, colocado a un interés del 12% anual, éste se convierta en \$ 1.000.000?

36. Una persona decide ahorrar \$ 500.000, los que ingresará al banco al inicio de cada año. Si el banco le paga un 12% de interés compuesto anual, ¿qué capital tendrá al cabo de 6 años?

37. Para la adquisición de un departamento una persona debe contraer una deuda por \$ 4.000.000. El banco se la presta, pero le cobra un 15% anual. Si la persona decide pagar en 20 años, ¿cuánto deberá cancelar en total al cabo de los 20 años? ¿Cuánto le saldrá la cuota mensual si se fija el valor con el 15% anual?

Soluciones

1. a) es P.G. $r = 3$

   b) no es P.G. $\frac{14}{18} \neq \frac{18}{24}$

   c) es P.G. $r = -3$

   d) es P.G. $r = \frac{1}{2}$

   e) es P.G. $r = \frac{1}{q}$

   f) es P.G. razón $= \frac{1}{r} + r$

2. $a_5 = \frac{1}{2}$; $S_{10} = \frac{1.023}{64}$

3. $\frac{256}{3}$ 4. 4, 12 y 36

5. Los seis primeros términos. 6. 6, 18, 54, 162.

7. \$ 1.048.575 8. $\sqrt{pq}$

9. $2, 3, \frac{9}{2}, \frac{27}{4}, \frac{81}{8}$ 10. 3, 9, 27, 81

11. $\frac{1}{4}, \frac{1}{12}, \frac{1}{36}$ 12. $\sqrt[3]{a^2b}, \sqrt[6]{a^2b^4}$

13. 18 y 54 14. 1.6, 8, 40

15. 177.147 16. q^{2n-1}

17. $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{4}{9}, \frac{16}{27}$

18. $r = \frac{1}{2}$ $S = \frac{8}{5}$ 19. $S = \frac{3}{2}$

20. $n = 5$ 21. $r = \frac{1}{5}$; $5, 1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}$

$r = \frac{4}{5}$; 1,25 ; 1 ; 0,8 ; 0,64

22. $S = \frac{10}{3}$ 23. 5, 10, 20.

24. $x = \frac{2}{5}$; $r = -\frac{4}{3}$

25. Cualquier $x \neq -1$ hace de este trío una P.G.

26. No existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x - 1$, $x + 2$ y $x + 5$ estén en P.G.

27. Si n es par $S_n = 0$. Si n es impar $S_n = 1$.

28. Habrá más de 1.073 millones de bacterias.

29. $S_{\text{áreas}} = 2a^2$; $S_{\text{perímetros}} = \frac{8a}{2-\sqrt{2}} = 4a\left(2+\sqrt{2}\right)$

30. $S_{\text{área}} = 32\ m^2$;

    $S_{\text{perímetros}} = 16\left(2+\sqrt{2}\right) = 54{,}6$ m.

31. 222.033 habitantes.

32. En aproximadamente 15 años.

33. \$ 3.121.792 34. \$ 585.526

35. \$ 567.427 36. \$ 4.544.508

37. \$ 65.466.128

    Cuota mensual fija: \$ 272.776.

12.5 Progresión armónica

Definición: Una **Progresión Armónica** (P.H.) es una sucesión de términos $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$

tal que $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \ldots \frac{1}{a_n}, \ldots$

están en progresión aritmética.

Nota: No disponemos de fórmulas elementales para el cálculo de progresiones armónicas; por ello resolveremos los ejercicios ocupando la definición y, por lo tanto, las fórmulas para progresiones aritméticas.

Ejercicios resueltos

1. Determinar si las siguientes sucesiones son o no progresiones armónicas (P.H.).

a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots$ **b)** $1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{2}{7}, \ldots$

Solución.

Debemos analizar si la sucesión de los términos recíprocos es una P.A.

a) 2, 4, 6, 8,... es P.A. con $a_1 =$ y $d = 2$

luego $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}$ es P.H.

b) $1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}$ es P.A. con $a_1 = 1$ y $d = \frac{1}{2}$

luego $1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{2}{7}$ es P.H.

2. Hallar el término siguiente en cada P.H.:

a) $\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{7}$ **b)** $\frac{2}{3}, 1, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}$

Solución.

Debemos trabajar con los recíprocos de los términos dados y buscando la diferencia de la P.A.

a) $2, -1, -4, -7$, es P.A. de $d = -3$, luego el término siguiente es -10.

Luego el término siguiente de la P.H. es $-\frac{1}{10}$

b) $\frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2$ es P.A. de $d = \frac{1}{3}$, luego el término siguiente es $\frac{7}{3}$.

Por lo tanto, el término siguiente de la P.H. es $\frac{3}{7}$

3. Interpolar un medio armónico entre a y b.

Solución.

Sea x el medio armónico que debemos interpolar.

Entonces a, x, b, deben estar en P.H., lo que significa que

$\frac{1}{a}, \frac{1}{x}, \frac{1}{b}$ deben ser P.A., luego

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{a}$$

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a}$$

$$\frac{2}{x} = \frac{a+b}{ab} \Rightarrow x = \frac{2ab}{a+b}$$

4. Interpolar 2 medios armónicos entre 2 y 12.

Solución.

Sean x e y los medios armónicos que se desea interpolar. Entonces 2, x, y, 12 deben ser P.H., por lo que $\frac{1}{2}, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{12}$ deben ser P.A. y $\frac{1}{12} - \frac{1}{y} = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}$

Sean $\frac{1}{x} = a$, $\qquad \frac{1}{y} = b$

$$\frac{1}{12} - b = b - a = a - \frac{1}{2}$$

Tomando dos igualdades:

$$\left.\begin{array}{lcl} \frac{1}{12} - b = b - a & \Rightarrow & a - 2b = -\frac{1}{12} \\ b - a = a - \frac{1}{2} & \Rightarrow & b - 2a = -\frac{1}{2} \end{array}\right|$$

de donde $\qquad a = \frac{13}{36} \quad$ y $\quad b = \frac{2}{9}$

Luego $\frac{1}{x} = \frac{13}{36}$, $\frac{1}{y} = \frac{2}{9}$ y $\frac{1}{2}$, $\frac{13}{36}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{1}{12}$ están en P.A.

Luego los medios armónicos pedidos son

$x = \frac{36}{13}$ e $y = \frac{9}{2}$ así

2, $\frac{36}{13}$, $\frac{9}{2}$, 12 es una P.H.

5. Encontrar tres números que estén formando una P.A., una P.G. y una P.H.

Solución.

Sean x, y, z los números buscados, entonces:

$$\left.\begin{array}{rl} z - y = y - x & \qquad \text{(P.A.)} \\ \frac{z}{y} = \frac{y}{x} & \qquad \text{(P.G.)} \\ \frac{1}{z} - \frac{1}{y} = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} & \qquad \text{(P.H.)} \end{array}\right.$$

La solución del problema planteado está en resolver este sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x-2y+z=0 \\ y^2-xz=0 \\ xy^2-2xyz+zy^2=0 \end{array}\right| \quad /:y \qquad \left.\begin{array}{r} x-2y+z=0 \\ y^2-xz=0 \\ xy-2xz+yz=0 \end{array}\right| \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

Reemplazando (2) en (3) y dividiendo por y obtenemos la ecuación (1). De (2) $y = \sqrt{xz}$

Reemplazando en (1)

$$x - 2\sqrt{xz} + z = 0 \quad \Rightarrow \quad (\sqrt{x} - \sqrt{z})^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x} - \sqrt{z} = 0$$

En (1) $\left.\begin{array}{r} x+z = 2\sqrt{xz} \\ \sqrt{x} - \sqrt{z} = 0 \end{array}\right|$ Hagamos $a = \sqrt{x}$ y $b = \sqrt{z}$

$$\left.\begin{array}{r} a^2+b^2 = 2ab \\ a-b=0 \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad a = b$$

$$\begin{array}{r} 2a^2 = 2ab \\ a = b \end{array} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x} = \sqrt{z} \quad \Rightarrow \quad x = z$$

En cualquiera de las ecuaciones del sistema vemos que $x = y = z$. Luego cualquier trío de números iguales están P.A. ($d = 0$), P.G. ($r = 1$) y P.H. (sus recíprocos están en P.A.).

Ejercicios

(Mezclado P.A., P.G. y P.H.)

1. En cada una de las sucesiones siguientes, determine si son P.A., P.G. o P.H.

a) $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \ldots$

b) $1, 0.1, 0.01, 0.001, \ldots$

c) $\frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \ldots$

d) $5, 5, 5, 5, \ldots$

e) $a, \frac{a}{2}, \frac{a}{4}, \frac{a}{8}, \ldots \qquad a \in \mathbb{N}$

f) $\frac{3}{2}, 1, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \ldots$

2. En la sucesión $x, x^2, 4x^2$ determine qué valor debe tomar x para que ésta sea **a)** P.A., **b)** P.G., **c)** P.H.

3. Dada la función $f(n) = 2n + 5$, donde $n \in \mathbb{N}$, escriba los cinco primeros valores de $f(n)$. ¿Forman ellos alguna progresión?

4. Escriba los cinco primeros términos de la función $f(n) = 3n - 2$ con $n \in \mathbb{N}$. ¿Qué progresión se forma? Determine la diferencia. El primer término y el de lugar 52.

5. Encuentre tres números en P.G. sabiendo que si se suma 2 al del medio se forma una P.A. y que los tres números sumados dan 28.

6. Encuentre tres números en P.A. sabiendo que si se resta 2 al del medio se transforman en P.G. y que los tres números sumados dan 51.

7. Estudie la sucesión $\frac{a-3}{a}, \frac{a-6}{a}, \frac{a-9}{a}$

Encuentre el décimo término y la suma de los diez primeros términos.

8. En una plantación hay 50 filas de árboles, si cada fila tiene 1 árbol más que la anterior y la fila 12 tiene 38 árboles, calcule cuántos árboles hay en la primera fila, en la última fila y cuántos árboles hay en la plantación completa.

9. Un refrigerador costó \$ 154.000. Después de cuatro años se vendió en la mitad de su valor. Si esto se repite cada cuatro años, ¿cuánto pagó por él la quinta persona que lo compró?

10. Una garrafa de 5 litros contiene vino de buena calidad. Una persona se toma una copa de 100 cc. y para que no se note la reemplaza con agua. Otras personas realizan el mismo procedimiento, quedando cada vez de inferior calidad el vino. ¿Cuántas personas deberán tomarse 100 cc. de vino y reemplazarlo por agua para que la garrafa contenga 50% de agua y 50% del vino original?

Soluciones

1. a) P.G. $r = \frac{1}{3}$

   b) P.G. $r = \frac{1}{10}$

   c) P.A. $d = \frac{1}{4}$

   d) P.A. $d = 0$, P.G., $r = 1$

   P.H. $\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}$ es P.A. $d = 0$

   e) P.G. $r = \frac{1}{2}$

   f) P.H. $\left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3},\right.$ es P.A. $\left. d = \frac{1}{3}\right\}$

2. a) $-\frac{1}{2}$ b) 4 c) $\frac{7}{4}$

3. 7, 9, 11, 13, 15 P.A. $d = 2$

4. 1, 4, 7, 10, 13 P.A. $d = 3$

   $a_1 = 1$ $a_{52} = 154$

5. 4, 8 y 16

6. 9, 17 y 25

7. Es una P.A. con $a_1 = \frac{a-3}{a}$, $d = -\frac{3}{a}$

   $a_{10} = \frac{a-30}{a}$ $S_{10} = \frac{10a-165}{a}$

8. $a_1 = 27$, $a_{50} = 76$ $S_{50} = 2.575$

9. \$ 9.625

10. 6

Inducción matemática 12.6

El principio de Inducción matemática es un método de demostración válido para subconjuntos infinitos de números naturales.

Se basa en los **axiomas de Peano** que afirman:

i) $1 \in N$ (El uno es un número natural)

ii) $k \in N \Rightarrow (k + 1) \in \mathbb{N}$ (si k es un número natural entonces (k + 1) también lo es)

El principio de inducción es el siguiente:

Si P(n) es una proposición asociada al número natural n y se verifica:

i) P(1) es verdadera, es decir, n = 1 hace verdadera la proposición.

ii) Siempre que P(k) sea verdadera se cumple que P(k+1) también lo es.

Entonces la proposición P(n) se cumple para todo número natural n.

Ejercicios resueltos

1. Demostrar por inducción que la suma S de los n primeros números naturales es $S = \frac{n(n+1)}{2}$

Solución:

Debemos demostrar que $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Sea P(n): $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

i) Verificamos si se cumple para n = 1

$$\sum_{i=1}^{1} = 1 \quad = \frac{1 \cdot 2}{2} \qquad \text{sí se cumple.}$$

ii) Suponiendo que se cumple para n = k, verificamos si se cumple para n = k + 1, es decir:

hip.: $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$

tesis: $\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

Dem.: $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$ /sumamos a ambos lados el término siguiente a k.

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{k} i + (k+1)} = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}$$

$$= \frac{k^2 + 2k + 2k + 2}{2}$$

$$= \frac{k^2 + 3k + 2}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)\ (k+2)}{2}$$

que es lo que queríamos demostrar; por lo tanto, afirmamos que para todo número natural n se cumple que la suma S es: $\frac{n(n+1)}{2}$ y P(n) es verdadera para todo n.

2. Demostrar que la suma de los n primeros números impares es $S = n^2$

Solución:

Por demostrar.

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

Sea P(n): $\sum_{j=1}^{n} (2j - 1) = n^2$

i) Verificamos si se cumple para n = 1

$\sum_{j=1}^{1} 2j - 1 = 1 = 1^2$ sí se cumple.

ii) Suponiendo que se cumple para n = k, verificamos si se cumple para n = k + 1; es decir;

hip: $\sum_{j=1}^{k} 2j - 1 = k^2$

tesis: $\sum_{j=1}^{k+1} (2j - 1) = (k + 1)^2$

Dem.: Por la hipótesis, tenemos:

$\sum_{j=1}^{k} (2j - 1) = k^2$ sumamos a ambos lados el impar siguiente a 2k – 1, que es 2k + 1

$$\sum_{j=1}^{k} (2j - 1) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1)$$

$$\sum_{j=1}^{k+1} (2j - 1) = k^2 + 2k + 1$$

$$\sum_{j=1}^{k+1} (2j - 1) = (k + 1)^2$$

que es nuestra tesis: entonces por el principio de inducción afirmamos que la proposición es válida para todo número natural n.

3. Demostrar que la expresión $n^2 + 5n$ es siempre par.

Solución:

Sea P(n): $n^2 + 5n = 2p$ para $p \in \mathbb{N}$.

i) Verificamos si se cumple para P(1)

$n = 1;\ 1^2 + 5 \cdot 1 = 6 = 2 \cdot 3$ (es par)

ii) Suponiendo que se verifica para n = k, demostremos que también se cumple para n = k + 1:

hip.: $k^2 + 5k = 2p$ (para algún $p \in \mathbb{N}$)

tesis: $(k + 1)^2 + 5(k + 1) = 2q$ (para algún $q \in \mathbb{N}$)

En este caso vamos a trabajar con la tesis, de la siguiente forma:

Debemos demostrar $(k + 1)^2 + 5(k + 1) = 2q$

$$
\begin{aligned}
(k + 1)^2 + 5(k + 1) &= k^2 + 2k + 1 + 5k + 5 \\
&= \underbrace{k^2 + 5k} + 2k + 6 \\
&= 2p + 2(k + 6) \quad \text{por hipótesis de inducción} \\
&= 2(p + k + 6) \\
&= 2q
\end{aligned}
$$

Entonces si se cumple para k también se cumple para (k + 1) y por lo tanto se cumple para todo natural n.

4. Demostrar que se cumple para todo número natural n el siguiente enunciado.

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\,(n + 1)} = \frac{n}{n + 1}$$

Solución:

i) Verificamos primero que se cumple la igualdad para $n = 1$, es decir,

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2} \qquad \text{correcta}$$

ii) Suponiendo que se verifica para $n = k$, debemos demostrar que se verifica para $n = k + 1$

hip.: $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{k\,(k + 1)} = \dfrac{k}{k + 1}$

tesis: $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{k\,(k + 1)} + \dfrac{1}{(k + 1)(k + 2)} = \dfrac{k + 1}{k + 2}$

dem.: Por hipótesis tenemos:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{k\,(k + 1)} = \frac{k}{k + 1}$$

Sumamos a ambos lados el término siguiente que

es $\dfrac{1}{(k + 1)(k + 2)}$:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{k\,(k + 1)} + \frac{1}{(k + 1)(k + 2)} = \frac{k}{k + 1} + \frac{1}{(k + 1)(k + 2)}$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$

(sacando denominador común)

$$= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} \quad \text{(factorizando)}$$

$$= \frac{k+1}{k+2} \quad \text{(simplificando)}$$

que es lo que debíamos demostrar; por lo tanto, afirmamos que para todo número natural n se cumple la proposición.

5. Demostrar que para todo entero n, $n \geq 2$, se verifica:

$$(1+a)^n > 1 + na$$

siendo a un número real distinto de cero y mayor que -1. ($a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $a > -1$)

Solución:

Sea P(n) la desigualdad $(1+a)^n > 1 + na$

(notemos que para n = 1 es falsa, sin embargo debemos verificar que la proposición es verdadera a partir de n = 2)

i) n = 2

$(1+a)^2 = 1 + 2a + a^2 > 1 + 2a$ (pues $a^2 > 0$, ya que $a \neq 0$)

entonces la proposición se cumple para n = 2, es decir, P(2) es verdadera.

ii) Suponiendo que se verifica para n = k, debemos demostrar que se verifica para n = k + 1, es decir, si P(k) es verdadera, entonces también debe serlo P(k + 1).

Hip.: $(1+a)^k > 1 + ka$

Tesis: $(1+a)^{k+1} > 1 + (k+1)a$

Dem.: $(1+a)^{k+1} = (1+a)^k(1+a)$ (prop. de exponente)

$> (1+ka)(1+a)$ (hipótesis de inducción)

pero observamos que:

$(1+ka)(1+a) = 1 + a + ka + ka^2$ (multiplicando)

$= 1 + a(k+1) + ka^2$ (factorizando)

$> 1 + a(k+1)$ (pues $ka^2 > 0$, $k > 0$ y $a \neq 0$)

Por lo tanto, por propiedad transitiva de la desigualdad concluimos que si

$(1+a)^k > (1+k)^a$ entonces $(1+a)^{k+1} > 1 + (k+1)a$

Y podemos afirmar que la proposición es válida para todo $n \geq 2$ ($a > -1$, $a \neq 0$)

Ejercicios

Demuestre que los siguientes enunciados son verdaderos para todo entero positivo n:

1. $3 + 5 + 7 + \ldots + (2n + 1) = n(n + 2)$

2. $1 + 4 + 7 + \ldots + (3n - 2) = \dfrac{(3n - 1)}{2}$

3. $3 + 7 + 11 + \ldots + (4n - 1) = n(2n + 1)$

4. $3 + 9 + 15 + \ldots + (6n - 3) = 3n^2$

5. $2 + 7 + 12 + \ldots + (5n - 3) = \dfrac{n(5n - 1)}{2}$

6. $1 + 6 + 6^2 + \ldots + 6^{n-1} = \dfrac{6^n - 1}{5}$

7. $2 + 6 + 18 + \ldots + 2 \bullet 3^{n-1} = 3^n - 1$

8. $\dfrac{1}{1 \bullet 2 \bullet 3} + \dfrac{1}{2 \bullet 3 \bullet 4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n + 1)(n + 2)} = \dfrac{n(n + 3)}{4(n + 1)(n + 2)}$

9. $\sum_{i=1}^{n} 2i = n(n + 1)$

10. $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{i(i + 1)}{2} = \dfrac{n(n + 1)(n + 2)}{6}$

11. $\sum_{i=1}^{n} 2^i = 2(2^n - 1)$

12. $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{(2k - 1)(2k + 1)} = \dfrac{n}{2n + 1}$

13. $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{2k + 1}{[k(k + 1)]^2} = 1 - \dfrac{1}{(n + 1)^2}$

14. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$

15. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\dfrac{n(n + 1)}{2}\right]^2$

16. $n^3 - n + 3$ es divisible por 3.

17. $n^2 + n$ es divisible por 2.

18. $n^2 - n + 2$ es divisible por 2.

19. $4^n - 1$ es divisible por 3.

20. $5^n - 1$ es divisible por 4.

21. $4^{2n} - 1$ es divisible por 3.

22. $n^3 + 3n^2 + 2n$ es divisible por 6.

23. $10^{n+1} + 3 \cdot 10^n + 5$ es divisible por 9.

24. $2^{3n} - 1$ es divisible por 7.

25. $x^n - y^n$ es divisible por $(x - y)$.
(sugerencia $x^{k+1} - y^{k+1} =$
$x^k(x - y) + (x^k - y^k)\, y$)

26. $x^{2n-1} + y^{2n-1}$ es divisible por $x + y$.

27. $n < 2^n$

28. $n^2 < 2^n$ para $n \geq 5$

29. $2n + 1 < n^2$ para $n \geq 3$.

30. $1 + 2n \leq 3^n$

31. $\dfrac{n(n+1)}{2} < \dfrac{(2n+1)^2}{8}$

32. $3n \leq 3^n$

Prueba de selección múltiple

1. El término siguiente en la P.A. 4, 1, −2 es:
A. −1
B. −2
C. −3
D. −4
E. −5

2. De las siguientes sucesiones son P.G.

I) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$
II) $1, 2, 4$
III) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$

A. sólo I
B. sólo II
C. sólo III
D. todas
E. ninguna

3. En la P.A. siguiente la diferencia es:
$\frac{a}{a-1}, \frac{a^2}{a-1}, \frac{2a^2-a}{a-1}$
A. $\frac{1}{a}$
B. $-\frac{1}{a}$
C. a
D. $-a$
E. $1 - a$

4. Si $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ están en P. H. podemos decir que x, y, z están
A. en P.A.
B. en P.G.
C. en P.H.
D. en P.A. y P.G.
E. no forman ninguna progresión.

Prueba de selección múltiple

5. La suma de todos los números impares de dos cifras es:

A. 2.225
B. 2.350
C. 2.475
D. 2.525
E. 2.550

6. Dados los números 3 y 12, ¿qué número se debe intercalar entre ambos para obtener una P.G.?

A. 4
B. 5
C. 6
D. 8
E. 10

7. Dados los números $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{9}$, ¿qué número se debe intercalar entre ambos para obtener una P.H.?

A. 7
B. $\frac{1}{7}$
C. 6
D. $\frac{1}{6}$
E. $\frac{1}{8}$

8. Si el producto de tres números en P.G. es 27, ¿cuál es el término central?

A. 1
B. 3
C. 6
D. 9
E. 18

9. $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ y 1 están en P.A., entonces están en P.H.

A. 3 2 1
B. 3 1,5 1
C. 3 2 1,5
D. 2 1,5 1
E. 2 1 0,5

10. La suma de n números impares consecutivos, partiendo del 1, es 2.500. Entonces n vale:

A. 10
B. 20
C. 25
D. 30
E. 50

11. El quincuagésimo múltiplo de 3 es:

A. 141
B. 144
C. 147
D. 150
E. 153

12. Si el producto de tres números que están en P.G. es 1.000 y la razón es 3, los tres números son

A. $1\frac{1}{3}$, 4, 12
B. 2, 6, 18
C. $2\frac{1}{3}$, 7, 21
D. 3, 9, 27
E. $3\frac{1}{3}$, 10, 30

13. En la sucesión 1, $\frac{3}{4}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{27}{64}$, $\frac{81}{256}$, ... el término siguiente es:

A. $\frac{108}{192}$
B. $\frac{243}{1.024}$
C. $\frac{324}{768}$
D. $\frac{162}{192}$
E. $\frac{324}{1.024}$

14. La suma de los términos de la sucesión 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$,... es:

A. 1
B. 1,5
C. 2
D. 2,5
E. 3

15. En una P.G. si $a_5 = 9$ y $a_7 = 1$, entonces a_6 vale:

A. 8
B. 5
C. 7
D. 3
E. 1

16. La suma de los cincuenta primeros números naturales es:

A. 1.025
B. 1.125
C. 1.275
D. 1.575
E. 1.750

17. La suma de los primeros veinticinco números pares es:

A. 600

B. 625

C. 650

D. 1.125

E. 1.275

18. La suma de los primeros veinticinco números impares es:

A. 600

B. 625

C. 650

D. 1.125

E. 1.275

19. La expresión

$\sum_{i=1}^{20} (i-1)(i+1) =$

A. 2.250

B. 2.500

C. 2.650

D. 2.700

E. 2.850

20. La suma de los n primeros términos de la serie $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots$ es:

A. $\frac{1}{6}(2n^3 + 6n^2 + 4n)$

B. $\frac{1}{6}(n^3 + 3n^2 + 2n)$

C. $\frac{1}{8}(2n^3 + 6n^2 + 4n)$

D. $\frac{1}{8}(n^3 + 3n^2 + 2n)$

E. $\frac{1}{6}(2n^3 + 6n^2 - 4n)$

21. El valor de $\sum_{i=10}^{i=20} (i^2 + 5)$ es:

A. 2.640

B. 2.650

C. 2.675

D. 2.685

E. 2.690

22. El producto de los diez primeros términos de la progresión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ es:

A. 2^{-15}

B. 2^{-20}

C. 2^{-25}

D. 2^{-30}

E. 2^{-45}

23. En la P.A. 7, 10, 13, ... el término de valor 37 ocupa el lugar:

A. 8

B. 9

C. 10

D. 11

E. 12

24. El sexto término de una P.G. es 1.024 y la razón es 4. Entonces el tercer término es:

A. 1

B. 4

C. 16

D. 64

E. 81

25. La suma de infinitos términos de la progresión $5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \ldots$ es:

A. 5

B. 8

C. 9

D. 10

E. 12

26. La suma de tres números en P.A. es $\frac{45}{2}$. Si al del centro se le resta $\frac{3}{2}$ se transforma en una P.G. Los números son:

A. $3, \frac{15}{2}, \frac{25}{12}$

B. $3, \frac{15}{2}, 12$

C. 3, 6, 12

D. $3, 6, \frac{25}{2}$

E. $\frac{7}{2}, \frac{15}{2}, \frac{23}{2}$

27. Para que el medio aritmético sea igual al medio geométrico entre dos números a y b debe cumplirse que:

A. $a + b = 0$

B. $a - b = 0$

C. $a + b > 0$

D. $a - b > 0$

E. $a - b < 0$

Prueba de selección múltiple

28. Si tres números a, b y c están en P.H. y P.G., entonces:

A. $ac(a - 2b + c) = 0$

B. $ac(a + 2b + c) = 0$

C. $ac(a - 2b - c) = 0$

D. $ac(a + 2b - c) = 0$

E. $ac(-a - 2b - c) = 0$

29. Si el medio geométrico entre a y b es cuatro veces el medio aritmético, entonces:

A. $ab = 4(a + b)^2$

B. $ab = 4a^2 + b^2$

C. $ab = 4(a^2 + b^2)$

D. $ab = 2(a + b)^2$

E. $ab = 2a^2 + 2b^2$

30. Una persona gana \$ 1 el primer día de trabajo, \$ 2 el segundo, \$ 4 el tercero, \$ 8 el cuarto y así sucesivamente. ¿Cuánto habrá ganado al cabo de 25 días?

A. \$ 16.777.216

B. \$ 33.554.431

C. \$ 67.108.864

D. \$ 134.217.728

E. \$ 268.435.456

Soluciones

1. E	6. C	11. D	16. C	21. D	26. B
2. D	7. B	12. E	17. C	22. E	27. B
3. C	8. B	13. B	18. B	23. D	28. A
4. A	9. B	14. B	19. E	24. C	29. A
5. C	10. E	15. D	20. A	25. D	30. B

CAPÍTULO 13

Análisis combinatorio, Teorema del binomio y Elementos de probabilidades

Análisis combinatorio 13.1

13.1.1 Conceptos básicos

Sea n un número natural. Definimos el **FACTORIAL** de n, denotado por **n!** en forma recursiva, por

$$1! = 1.$$
$$(n + 1)! = n!\,(n + 1)$$

Definimos también $0! = 1$

Sean n y k dos elementos de $\mathbb{N}_0$ tales que $n > k$. Se define el número $\binom{n}{k}$ por $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

Se lee "n sobre k".

- **PRINCIPIO DE LA MULTIPLICACIÓN**

Supongamos que un suceso puede ocurrir de n maneras y otro suceso puede ocurrir de m maneras, entonces ambos sucesos pueden ocurrir de m • n maneras.

- **PRINCIPIO DE LA SUMA**

Supongamos que un suceso puede ocurrir de m maneras y otro suceso puede ocurrir de n maneras, entonces hay m + n maneras en que pueda ocurrir sólo uno de ellos.

13.1.2 Permutaciones

Una permutación de los elementos de un conjunto es cualquier cambio en el orden de estos elementos sin repetirlos ni omitirlos.

Según el principio multiplicativo, el número de permutaciones que se pueden efectuar en un conjunto de n elementos es n!

Si denotamos por P (n) el número de permutaciones en un conjunto de n elementos, tenemos:

$$P\,(n) = n\,!$$

Vemos que en las permutaciones importa la posición relativa de los elementos entre sí, por lo tanto, si queremos permutar en forma circular n elementos, el número de maneras en que podemos hacerlo es:

$$P_c\ (n) = (n - 1)\,!$$

(puesto que rotar todos juntos en una dirección no constituye una permutación diferente).

13.1.3 Arreglos o variaciones

Un arreglo o variación de k elementos tomados de un conjunto de n elementos ($k \leq n$) es cualquier ordenación que puede hacerse con esos k elementos.

Notemos que dos arreglos o variaciones diferentes pueden incluir los mismos elementos, sólo es necesaria una ordenación distinta.

El número de arreglos o variaciones que pueden efectuarse de k elementos tomados de un conjunto de n está dado por:

$$A_k^n = \frac{n\,!}{(n - k)\,!}$$

Ejemplo: En el conjunto {a, e, i, o, u} podemos formar:

$$V_2^5 = A_2^5 = \frac{5\,!}{(5 - 2)\,!} = \frac{\cancel{5!}}{\cancel{3!}} = \frac{\cancel{1} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{\cancel{1} \cdot 2 \cdot 3} = 20$$

variaciones diferentes tomando 2 elementos cada vez.

Estos son:

ou, ae, ai, ao, au, ei, eo, eu, io, iu,

uo, ea, ia, oa, ua, ie, oe, ue, oi, ui

(au y ua son dos arreglos diferentes)

13.1.4 Combinaciones

Una combinación de k elementos tomados de un conjunto de n elementos ($k \leq n$) es cualquier subconjunto que se puede formar con esos k elementos.

Notemos que al hablar de subconjunto no estamos considerando el orden en que estén dispuestos los elementos.

Así, dos combinaciones serán distintas si al menos tienen un elemento distinto.

El número de combinaciones que pueden formarse de k elementos a partir de un conjunto de n elementos está dado por:

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n\,!}{k\,!\,(n - k)\,!}$$

Ejemplo: El número de combinaciones de 2 elementos que pueden formarse a partir del conjunto M = {a, e, i, o, u} es:

$$C_2^5 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!\ 3!}\ \frac{\cancel{1\cdot 2}\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{\cancel{1\cdot 2}\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = 10$$

y ellos son:

{a e}, {a i}, {a o}, {a u}, {e i}, {e o}, {e u}, {i o}, {i u}, {o u}

(en este caso {a u} y {u a} son la misma combinación).

Ejercicios resueltos

1. Calculemos $5!$ y $\frac{8!}{5!}$

   Según la definición:

   $5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$

   $$\frac{8!}{5!} = \frac{\cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{\cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}} = 336$$

2. Disponemos de 3 líneas de buses para viajar de la ciudad A a la ciudad B y de 5 para viajar de B a C. ¿De cuántas maneras podemos viajar de A a C pasando por B?

   Vemos que cada una de las 3 líneas de A a B las podemos combinar con cada una de las 5 que hay para viajar de B a C. Por lo tanto, aplicamos el principio multiplicativo y el total de posibilidades es $3\cdot 5 = 15$.

3. ¿Cuántos "menús" diferentes podemos escoger si en el restaurant se dispone de 5 entradas diferentes, 4 platos de fondo y 6 postres?

   Aplicando la regla del producto vemos que la elección del menú que debe constar de 1 entrada, 1 plato de fondo y 1 postre se puede efectuar de:

   $5 \times 4 \times 6 = 120$ maneras.

4. ¿De cuántas maneras puedo elegir 2 fichas de colores diferentes si cuento con 3 fichas rojas, 4 azules y 7 amarillas?

   Las fichas pueden ser: roja-azul; roja-amarilla y azul-amarilla.

   1 roja y 1 azul se pueden escoger de $3 \times 4 = 12$ maneras distintas.

   1 roja y 1 amarilla, de $3 \times 7 = 21$ maneras, y 1 azul y 1 amarilla, de $4 \times 7 = 28$ maneras.

   En total, aplicando el principio de la suma puedo escoger 2 fichas de colores diferentes de $12 + 21 + 28 = 61$ maneras.

5. Demostremos que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ $(n > k)$

   Apliquemos la definición para obtener cada miembro de la igualdad:

   $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (1)$$

   $$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \qquad (2)$$

   y comparando (1) y (2) vemos que la igualdad se cumple.

6. Determinemos el valor de x de modo que se cumpla:

$$\binom{x}{2} = 10$$

Aplicando la definición tenemos:

$$\frac{x\,!}{2\,!\,(x-2)\,!} = 10$$

Esto es:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot \cancel{3 \ldots (x-3)(x-2)}\,(x-1) \cdot x}{1 \cdot 2 \cdot \cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (x-3)(x-2)}} = 10$$

Simplificando nos queda:

$$\frac{x\,(x-1)}{2} = 10 \qquad \text{es decir, } x^2 - x - 20 = 0$$

Las soluciones de esa ecuación son $x_1 = 5$ y $x_2 = -4$,

pero en este caso no nos sirven las soluciones negativas, por lo tanto, el valor de x es x = 5.

7. ¿Cuántas "palabras" no necesariamente pronunciables pueden formarse con las letras de la palabra "VESTIDO"? (no pueden repetirse las letras ni pueden omitirse).

Se trata de formar permutaciones con 7 elementos, y como sabemos, el número de ellos está dado por $7\,! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5.040$

8. ¿Cuántas de las "palabras" obtenidas en el ejercicio anterior empiezan con V y terminan con O?

Aquí, de las 7 letras de que disponemos, debemos dejar 2 fijas (la primera y la última) y por lo tanto debemos permutar las otras cinco restantes. El número de ellas es:

$5\,! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

9. ¿Cuántos números diferentes de 3 cifras se pueden formar con los dígitos del 1 al 9 si no se permite la repetición de un dígito?

Nos piden el número de variaciones o arreglos de 3 elementos tomados de un conjunto de 9. El número está dado por:

$$V_3^9 = \frac{9\,!}{(9-3)\,!} = \frac{9\,!}{6\,!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$$

El problema puede ser planteado también de la siguiente manera:

Debemos "llenar" 3 casilleros y para ello disponemos de 9 elementos.

El primero puede ser llenado con cualquiera de los 9 números una vez llenado éste, el segundo se puede ocupar con cualquiera de los ocho restantes, pues no podemos repetir los números y una vez llenado éste, para el tercero nos quedan 7 posibilidades.

Aplicando el principio de la multiplicación, la cantidad de números que podemos formar es: $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$.

10. Resolvamos el problema anterior si se permite la repetición de los dígitos.
Procedamos a "llenar" 3 casilleros con 9 elementos diferentes. El primero se puede llenar con cualquiera de los 9 elementos; como se permite la repetición, el segundo se puede llenar también con cualquiera de los 9 y, por la misma razón, el tercer casillero también se puede llenar de 9 maneras diferentes.
Por el principio multiplicativo la cantidad de números que se puede formar está dada por $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$.

11. ¿Cuántos subconjuntos de 4 elementos se pueden formar a partir de un conjunto de 6?

Debemos encontrar el número de combinaciones de 4 elementos tomados de un conjunto de 6. Este número está dado por:

$$C_4^6 = \frac{6\,!}{4\,!(6-4)\,!} = \frac{6\,!}{4\,!\;2\,!} = \frac{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 5 \cdot 6}{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 1 \cdot 2} = 15$$

Ejemplo: Consideremos el conjunto A = {a, b, c, d, e, f}. Los subconjuntos de 4 elementos son:

{a, b, c, d}	{a, b, c, e}	{a, b, c, f}	{a, c, d, e}	{a, c, d, f}
{b, c, d, e}	{b, c, d, f}	{b, d, e, f}	{a, d, e, f}	{c, d, e, f}
{a, b, d, e}	{a, b, d, f}	{a, b, e, f}	{a, c, e, f}	{b, c, e, f}

12. De un total de 15 niños y 6 niñas se desea escoger un grupo de 6. ¿De cuántas maneras puede hacerse esta elección?
En total contamos con 21 niños (entre hombres y mujeres). Como no hay restricción de ningún tipo debemos formar conjuntos de 6 a partir de 21. El total de maneras está dado por:

$$C_6^{21} = \binom{21}{6} = \frac{21\,!}{6\,!\,(21-6)\,!} = \frac{16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 54.264$$

13. Resolvamos el ejercicio anterior si el grupo que se desea formar debe constar de 3 niños y de 3 niñas exactamente.
Debemos elegir 3 niños de un total de 15, esto es:

$$C_3^{15} = \binom{15}{3} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 455$$

y debemos elegir 3 niñas entre 6.

$$C_3^{6} = \binom{6}{3} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$$

En total el grupo se puede formar de acuerdo con el principio multiplicativo de:

$C_3^{15} \cdot C_3^{6} = 455 \cdot 20 = 9.100$ maneras distintas.

14. Resolvamos el problema anterior con la condición de que en el grupo debe haber siempre 2 niños fijos y una niña fija (y debe constar de 3 niños y 3 niñas).

Como debe haber 2 niños fijos, debemos escoger 1 de un total de 13.

$C_{1}^{13} = 13$

Como debe haber 1 niña fija, debemos escoger las otras 2 de un total de 4.

$C_{2}^{4} = \binom{4}{2} = \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 6$

y el total de maneras en que se puede formar el grupo con esas condiciones es:

$C_{1}^{13} \cdot C_{2}^{4} = 13 \cdot 6 = 78$

Ejercicios

1. Calcule:

a) $4!$ **b)** $10!$ **c)** $7!$

d) $\frac{10!}{7!}$ **e)** $\frac{15!}{11!}$ **f)** $\frac{30!}{28!}$

g) $\frac{5!}{3!}\,\frac{7!}{4!}$ **h)** $\frac{n!}{(n-2)!}$ **i)** $\frac{(k+1)!}{(k-1)!}$

j) $\binom{5}{4}$ **k)** $\binom{12}{9}$ **l)** $\binom{10}{3}$

m) $\binom{7}{2} + \binom{7}{3}$ **n)** $\binom{5}{3} + \binom{5}{2}$

o) $\binom{6}{4} + \binom{4}{2}$ **p)** $\binom{6}{3} + 2\binom{5}{3} - \binom{5}{2}$

q) $\binom{n+1}{n} : \binom{n}{n-1}$ **r)** $\frac{7!\binom{6}{3} + 8!}{7\binom{6}{4} \cdot 6}$

s) $\frac{10! + \binom{5}{2} \cdot 9!}{8! \cdot \binom{5}{3} \cdot 9}$ **t)** $\frac{3! + 4! + 5!}{25}$

u) $\frac{n! + (n+1)! + (n+2)!}{(n+2)^2}$

2. Determine el valor de x de modo que la igualdad se cumpla:

a) $\binom{x}{6} = 7$ **b)** $\binom{x}{2} = 6$

c) $\binom{x}{2} + \binom{x}{3} = 10$ **d)** $\binom{x}{2} = 3$

e) $\binom{x}{2} = 15$ **f)** $\binom{x}{x-2} = 28$

g) $\binom{x}{5} + \binom{x}{6} = 28$

h) $\binom{x}{1} - 2\binom{x}{2} + 3\binom{x}{3} = 0$

i) $\binom{x}{1} + 2\binom{x}{2} + \binom{x}{3} = 20$

j) $\binom{x}{x-2} = 36$

3. Compare:

a) $\binom{5}{3} + \binom{5}{4}$ con $\binom{6}{4}$

b) $\binom{9}{3} + \binom{9}{4}$ con $\binom{10}{4}$

c) $\binom{15}{6} + \binom{15}{7}$ con $\binom{16}{7}$

d) $\binom{8}{4} + \binom{8}{5}$ con $\binom{9}{5}$

4. Demuestre:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

5. Compare:

a) $\dfrac{2\,!+3\,!+4\,!}{16}$ con $2\,!$

b) $\dfrac{6\,!+7\,!+8\,!}{64}$ con $6\,!$

c) $\dfrac{4!+5!+6!}{36}$ con $4!$

d) $\dfrac{8!+9!+10!}{100}$ con $8!$

6. Demuestre:

$$\frac{n!+(n+1)!+(n+2)!}{(n+2)^2} = n!$$

7. Compare:

a) $\binom{5}{3} : \binom{4}{2}$ con $\dfrac{5}{3}$

b) $\binom{7}{5} : \binom{6}{4}$ con $\dfrac{7}{5}$

c) $\binom{3}{1} : \binom{2}{0}$ con 3

d) $\binom{9}{7} : \binom{8}{6}$ con $\dfrac{9}{7}$

8. Demuestre:

$$\binom{n+1}{n-1} : \binom{n}{n-2} = \frac{n+1}{n-1}$$

9. ¿Cuántos números diferentes de 5 cifras se pueden formar con los dígitos 1, 2, ..., 9 sin repetir?

10. ¿De cuántas maneras se pueden ubicar 6 personas en una fila?

11. ¿De cuántas maneras se pueden ubicar 6 personas en una mesa redonda?

12. ¿De cuántas maneras se pueden sentar en una mesa redonda 3 matrimonios si cada esposo debe tener a su lado a su mujer?

13. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar en un estante 12 libros?

14. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar en un estante 12 libros si tres de ellos deben estar siempre juntos?

15. Hay 5 libros de química, 4 de física y 6 de matemática. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar en un estante si deben quedar juntos los libros de cada tema?

16. ¿Cuántas "palabras" se pueden formar con las letras de la palabra LIBRO?

17. ¿Cuántas de las palabras del ejercicio anterior empiezan con consonante?

18. ¿Cuántas de las palabras del ejercicio 16 terminan con o?

19. ¿Cuántas palabras de 4 letras se pueden formar con las letras de la palabra CLAUDIO si no se pueden repetir?

20. ¿Cuántos números de 4 cifras se pueden formar con los dígitos 0, 1, 2, ..., 9 si deben empezar con 4 y no se pueden repetir los dígitos?

21. Ejercicio 19: ¿si se permite la repetición?

22. ¿Cuántos números pares de 2 cifras se pueden formar con los dígitos {0, 1, 2, 3, 4} si no se permite la repetición?
(Recuerde, el número 04 no se considera de 2 cifras).

23. Ejercicio 20: ¿si se permite la repetición?

24. ¿Cuántas permutaciones pueden hacerse con las letras de la palabra PINCEL?

25. ¿Cuántas de las permutaciones del ejercicio anterior comenzarán con P?

26. ¿Cuántas de las permutaciones del ejercicio anterior comenzarán con P y terminarán con L?

27. ¿Cuántas palabras pueden formarse con 24 consonantes y 5 vocales si cada una debe estar formada por 3 consonantes y 3 vocales y no se permite la repetición?

28. ¿Cuántas palabras pueden formarse con 24 consonantes y 5 vocales si cada una debe estar formada por 3 consonantes y 3 vocales y deben ir intercaladas?

29. ¿Cuántas "patentes" se pueden formar si éstas constan de 2 letras seguidas de 4 dígitos y no se permite la repetición? (Considere 27 letras y 10 dígitos)

30. Ejercicio 29: ¿si se permite la repetición?

31. ¿Cuántos números de 5 dígitos se pueden formar si la cifra de las unidades es 5 y la de la unidad de mil es 3 y no se permite la repetición?

32. ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar 5 discos de un total de 15?

33. ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar 3 personas de un total de 8?

34. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar 8 hermanos en una fila si el menor debe estar en primer lugar y el mayor en último lugar?

35. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar 12 libros en un estante si 2 de ellos deben quedar siempre separados?

36. ¿Cuántos colores diferentes se pueden obtener mezclando 2 cada vez de un total de 12?

(Se supone que la mezcla se hace siempre en la misma proporción).

37. De un total de 16 niños y 12 niñas se desea escoger un grupo de 6. ¿De cuántas maneras puede hacerse esta elección?

38. Ejercicio 37: ¿si el grupo debe constar de 3 niños y 3 niñas?

39. Ejercicio 38: ¿si del total de niños se excluyen 8 niños y 5 niñas?

40. Ejercicio 38: ¿si deben estar incluidos siempre 2 niños y 1 niña?

41. ¿Cuántos grupos de 5 personas se pueden formar entre 4 niños y 7 niñas si debe haber por lo menos 2 niñas incluidas?

42. Ejercicio 41: ¿si debe haber a lo más dos niñas incluidas?

43. En un curso hay 19 niñas y 21 niños. ¿De cuántas maneras se pueden formar grupos de 5 personas que incluyan:

a) 2 niñas y 3 niños.

b) 3 niñas y 2 niños.

c) 4 niñas.

d) 4 niños.

44. En un curso hay 15 niños y 16 niñas y se desea seleccionar un grupo de 14 alumnos. De cuántas maneras se puede hacer esta selección si:

a) no hay restricción.

b) debe haber 7 niños y 7 niñas.

c) hay 5 niños y 5 niñas excluidos.

d) hay 4 niños y 5 niñas incluidos.

45. La primera división de la Liga de Fútbol consta de 25 equipos. ¿Cuántos partidos deben jugarse para completar la primera rueda?

46. En una sala de clases hay 22 sillas. ¿De cuántas maneras se pueden ubicar 15 alumnos?

47. ¿Cuántos números menores o iguales de 3.000 y múltiplos de 5 se pueden formar con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5?

48. ¿De cuántas maneras se puede formar un comité de 3 personas de un total de 8?

49. De un total de 8 personas, ¿de cuántas maneras pueden ocupar 3 cargos diferentes?

50. De un total de 8 personas, ¿de cuántas maneras se puede formar un comité de 4 personas si una de ellas debe estar siempre incluida?

51. En una liga de 12 equipos de fútbol, ¿cuántos partidos deben jugarse si cada equipo juega 2 veces con cada uno de los restantes?

52. ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar 3 libros de un total de 10?

53. ¿Cuántas diagonales tiene un pentágono?

54. ¿Cuántas diagonales tiene un hexágono?

55. ¿Cuántas diagonales tiene un octágono?

56. ¿Cuántas diagonales tiene un polígono de n lados?

57. Se dispone de 10 puntos donde no hay 3 colineales. ¿Cuántos triángulos se pueden formar?

58. De un total de x personas se pueden formar 10 grupos de 2. Determine x.

59. De un total de x personas se pueden formar 21 grupos de 5. Determine x.

60. ¿Cuántos números pares de 3 cifras, entre 400 y 700, se pueden formar si no se permite la repetición?

Soluciones

1. a) 24 b) 3.628.800 c) 5.040
d) 720 e) 32.760 f) 870
g) 4.200 h) $n(n-1)$ i) $k(k+1)$
j) 5 k) 220 l) 120
m) 56 n) 20 o) 21
p) 30 q) $\frac{n+1}{n}$ r) 224
s) 2 t) 3! u) n!

2. a) $x = 7$ b) $x = 4$ c) $x = 4$
d) $x = 3$ e) $x = 6$ f) $x = 8$
g) $x = 7$ h) $x = 3$ i) $x = 4$
j) $x = 9$

3. a) ambos son iguales a 15
b) ambos son iguales a 210
c) ambos son iguales a 11.440
d) ambos son iguales a 126

5. a) son iguales b) son iguales
c) son iguales d) son iguales

7. a) son iguales b) son iguales
c) son iguales d) son iguales

9. $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15.120$ **10.** $6! = 720$

11. $5! = 120$ **12.** $2! \cdot 2^3 = 16$

13. 12! **14.** 3! 10!

15. 5! 4! 6! 3! **16.** $5! = 120$

17. $3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 72$ **18.** $4! = 24$

19. $4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 840$ **20.** $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$

21. $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 2.401$

22. 10 (22 y 44 están excluidos)

23. 1.000 **24.** $6! = 720$

25. $5! = 120$ **26.** $4! = 24$

27. $\binom{24}{3} \cdot \binom{5}{3} \cdot 6! = 14.572.800$

28. $2 \cdot (24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3) = 1.457.280$

29. $27 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 3.538.080$

30. $27 \cdot 27 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 7.290.000$

31. $7 \cdot 7 \cdot 6 = 294$ 32. $\binom{15}{4} = 3.003$ 33. $\binom{8}{3} = 56$ 34. $6! = 720$

35. $12! - 11! \cdot 2 = 399.168.000$ 36. $\binom{12}{2} = 66$ 37. $\binom{28}{6} = 376.740$

38. $\binom{16}{3}\binom{12}{3} = 123.200$ 39. $\binom{8}{3}\binom{7}{3} = 1.960$ 40. $\binom{14}{1} \cdot \binom{11}{2} = 770$

41.
$$\left.\begin{array}{lcl} 2\text{ m y } 3\text{ h.} & \to & \binom{7}{2}\binom{4}{3} = 84 \\ 3\text{ m y } 2\text{ h.} & \to & \binom{7}{3}\binom{4}{2} = 210 \\ 4\text{ m y } 1\text{ h.} & \to & \binom{7}{4}\binom{4}{1} = 140 \\ 5\text{ m} & \to & \binom{7}{5} = 21 \end{array}\right\} 84 + 210 + 140 + 21 = 455$$

42.
$$\left.\begin{array}{lcl} 1\text{ m y } 4\text{ h.} & \to & \binom{7}{1}\binom{4}{4} = 7 \\ 2\text{ m y } 3\text{ h.} & \to & \binom{7}{2}\binom{4}{3} = 84 \end{array}\right\} 7 + 84 = 91$$

43. a) $\binom{19}{2}\binom{21}{3} = 227.430$

b) $\binom{19}{3}\binom{21}{2} = 203.490$

c) $\binom{19}{4}\binom{21}{1} = 81.396$

d) $\binom{19}{1}\binom{21}{4} = 113.715$

44. a) $\binom{31}{14}$ b) $\binom{15}{7}\binom{16}{7}$

c) $\binom{21}{14}$ d) $\binom{22}{5}$

45. $\dfrac{25 \cdot 24}{2} = 300$

46. V^{22}_{15}

47.
$$\left.\begin{array}{l} 1\text{ dígito} - 1 \\ 2\text{ dígitos} - 10 \\ 3\text{ dígitos} - 60 \\ 4\text{ dígitos} - 145 \end{array}\right\} 1 + 10 + 60 + 145 = 216$$

48. $\binom{8}{3} = 56$ 49. $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$

50. $\binom{7}{3} = 35$ 51. $11 \cdot 12 = 132$

52. $\binom{10}{3} = 120$ 53. 5

54. 9 55. 20

56. $\dfrac{n(n-3)}{2}$ 57. $\binom{10}{3} = 120$

58. $x = 5$ 59. $x = 7$ 60. 104

13.2 Teorema del binomio

13.2.1 Conceptos y observaciones básicas

En el punto anterior nos familiarizamos con la expresión $\binom{n}{k}$ que leíamos "n sobre k"; nos será de gran utilidad en esta sección donde desarrollaremos cualquier potencia de binomio sin hacer multiplicaciones tediosas.

La expresión $\binom{n}{k}$ recibe el nombre de **coeficiente binomial**. Desarrollando algunas potencias de binomios tenemos:

$(a+b)^0 = 1$
$(a+b)^1 = a + b$
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3\ ab^2 + b^3$
$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6\ a^2 b^2 + 4\ ab^3 + b^4$

Observaciones.

1. El desarrollo de $(a+b)^n$ tiene $n+1$ términos.
2. El primer término es a^n y el último es b^n.
3. El exponente de **a** decrece mientras el de **b** aumenta en 1 unidad.
4. La suma de ambos exponentes es siempre constante, igual a n.
5. Los coeficientes de los términos equidistantes del centro son iguales.
6. Si comparamos los coeficientes de los términos obtenidos en los desarrollos con los coeficientes binomiales, podemos ver que son iguales.

   Ejemplo:

   $$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

   $$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

$$\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2} \text{ ... etc.}$$

Con estas observaciones estamos en condiciones de formular el teorema del binomio.

13.2.2 Teorema del binomio

El desarrollo de la potencia n–ésima del binomio $(a+b)$ corresponde a:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\ a^{n-k}\, b^k$$

en forma extensiva;

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}\, b + \binom{n}{2} a^{n-2}\, b^2 + \ldots$$

$$+ \ldots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

Ejemplo:

Desarrollemos $(a+b)^4$ aplicando el teorema:

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0} a^4 + \binom{4}{1} a^3 b + \binom{4}{2} a^2 b^2 + \binom{4}{3} ab^3 + \binom{4}{4} b^4$$

siendo: $\binom{4}{0} = \binom{4}{4} = 1$

$\binom{4}{1} = \binom{4}{3} = 4$

$\binom{4}{2} = 6$

entonces:

$(a + b)^4 = a^4 + 4\,a^3\,b + 6a^2\,b^2 + 4\,ab^3 + b^4$

Si queremos determinar el término de orden r (o lugar r) en el desarrollo de $(a + b)^n$, ése está dado por:

$$t_r = \binom{n}{r-1} a^{n-r+1}\, b^{r-1}$$

es decir, se obtiene haciendo $k = r - 1$

Por ejemplo, el tercer término de $(a + b)^6$ está dado por:

$$t_3 = \binom{6}{2} a^4\, b^2 \quad (k = 2)$$

Recordemos que en el desarrollo del binomio, $(a + b)^n$ k varía desde 0 hasta n;

Así, el primer término se obtiene para $k = 0$

2° término se obtiene para $k = 1$

3° término se obtiene para $k = 2$

4° término se obtiene para $k = 3$

r° término se obtiene para $k = r - 1$

En forma más general, podemos expresar:

$$t_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k$$

13.2.3 El triángulo de Pascal

Los coeficientes de los términos de un binomio también se pueden obtener construyendo el siguiente ordenamiento, conocido como triángulo de Pascal-Tartaglia:

n = 0							1						
n = 1						1		1					
n = 2					1		2		1				
n = 3				1		3		3		1			
n = 4			1		4		6		4		1		
n = 5		1		5		10		10		5		1	
	1		6		15		20		15		6		1

La construcción de este triángulo se efectúa partiendo y terminando con 1 y cada término se obtiene sumando en la fila anterior los dos números más próximos.

Así, para n = 6 hacemos:

1 6 15 20 15 6 1

y, por lo tanto, si queremos obtener $(a + b)^6$, simplemente completamos los factores literales de cada término tomando en cuenta las consideraciones anteriores: Así:

$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

Ejercicios resueltos

1. Desarrollemos $(2a + 3b)^4$

   Sabemos que el desarrollo tiene 5 términos y, de acuerdo al triángulo de Pascal (o usando los coeficientes binomiales), los coeficientes son 1 4 6 4 1.

   Ahora, el primer término es 2a y el segundo es 3b

   El desarrollo es:

   $(2a + 3b)^4 = 1\,(2\,a)^4 + 4\,(2\,a)^3 \cdot (3\,b) + 6\,(2\,a)^2 \cdot (3\,b)^2 + 4\,(2\,a)^1 \cdot (3\,b)^3 + (3\,b)^4$

   completando el desarrollo, nos queda:

   $(2\,a + 3\,b)^4 = 16\,a^4 + 96\,a^3b + 216\,a^2b^2 + 216\,a\,b^3 + 81\,b^4$

2. Determinemos el 6º término en el desarrollo de $(a + 2b)^{11}$

   Sabemos que:
   $$t_6 = \binom{11}{5} a^6 (2b)^5$$
   $$t_6 = 462 \cdot a^6 \cdot 32\,b^5$$
   $$t_6 = 14.784\,a^6b^5$$

3. Cuál es el coeficiente de x^{14} en el desarrollo de $(x^2 + x^3)^6$.

   Sabemos que el término general está dado por:
   $$t_k = \binom{n}{k-1} (x^2)^{n-k+1} (x^3)^{k-1}$$

   en este caso:
   $$t_k = \binom{6}{k-1} (x^2)^{6-k+1} (x^3)^{k-1}$$
   $$= \binom{6}{k-1} x^{14-2k}\, x^{3k-3}$$
   $$= \binom{6}{k-1} x^{k+11}$$

   queremos el coeficiente de x^{14}, es decir, debemos igualar exponentes:
   $$x^{k+11} = x^{14}$$

   o sea $k = 3$

   y el término que contiene a x^{14} en ese desarrollo es el tercero y su coeficiente es:
   $$\binom{6}{2} = 15$$

4. Determinemos el exponente de x en el 8° término del desarrollo de:

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^{10}$$

$$t_8 = \binom{10}{7}(x^3)^3 \bullet \left(\frac{1}{x^2}\right)^7$$

$$= \binom{10}{7} x^9 \bullet \frac{1}{x^{14}}$$

$$= 120\, x^{-5}$$

y el exponente de x en el 8° término es – 5.

5. Determinemos el término independiente de x en el desarrollo de:

$$\left(\frac{1}{x^2} - x^4\right)^6$$

El término general es:

$$t_{k+1} = \binom{6}{k}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{6-k} \bullet (-x^4)^k$$

$$= \binom{6}{k}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{6-k} \bullet (-1)^k \bullet (x^4)^k$$

$$= \binom{6}{k}(-1)^k \bullet \frac{1}{x^{12-2k}} \bullet x^{4k}$$

$$= \binom{6}{k}(-1)^k \bullet x^{6k-12}$$

para que el término sea independiente de x es necesario que el exponente de x sea igual a 0.

es decir: $6k - 12 = 0$

$k = 2$

y para k = 2 tenemos:

$$t_3 = \binom{6}{2}\left(\frac{1}{x^2}\right)^4 \bullet (-x^4)^2$$

$$= \binom{6}{2}\frac{1}{x^8} \bullet (-1)^2 \bullet x^8$$

$$= \binom{6}{2}$$

$$= 15$$

el término independiente de x en el desarrollo es el 3er término y es igual a 15.

Ejercicios

1. Obtenga los siguientes desarrollos:

a) $(x + y)^5$ b) $(x - 2y)^5$ c) $(1 + 3a)^7$ d) $(1 - b)^{11}$ e) $(2a - 3b)^4$ f) $(x - \frac{1}{x})^6$

g) $\left(\frac{1}{z^2} + z^2\right)^4$ h) $\left(\frac{m}{2} - \frac{1}{2}\right)^8$

i) $\left(\frac{p}{2q} - \frac{2q}{p}\right)^6$ j) $\left(\frac{3}{x^4} - \frac{x^3}{4}\right)^6$

2. Determine el término indicado en el desarrollo correspondiente:

a) 7° término en $(x-y)^{11}$

b) 5° término en $(a+b)^{21}$

c) 10° término en $\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^{10}$

d) 8° término en $\left(x^2 y - \frac{2}{x y^2}\right)^7$

e) 11° término en $(2a-b)^{10}$

f) 2° término en $\left(1 - \frac{1}{xyz}\right)^4$

g) 9° término en $\left(2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}\right)^{11}$

h) 4° término en $\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)^6$

i) 6° término en $\left(a - \frac{3}{a}\right)^9$

j) 13° término en $\left(\frac{x^5}{2} - \frac{2}{x^5}\right)^{15}$

3. Determine el coeficiente numérico del término indicado:

a) 2°término en $(2x-y)^4$

b) 3ertérmino en $(3a+4b)^6$

c) 9°término en $\left(\frac{x^2}{y} - \frac{y^2}{x}\right)^{10}$

d) 5°término en $(-a+12)^5$

e) 8°término en $(p^2v^2-1)^{14}$

f) término central $(2x^2y+xy^3)^8$

g) último término $\left(\frac{2}{a^2 b^2} - \frac{1}{ab}\right)^{17}$

h) penúltimo término de $\left(a^2 - \frac{a}{3}\right)^7$

i) último término de $(3x^{11}-1)^{11}$

j) término central de $(1-5x)^6$

4. En el desarrollo de $\left(3x^2 - \frac{1}{x}\right)^5$ determine:

a) el coeficiente numérico del cuarto término

b)el término que contiene x^4

c) el término independiente de x

5. En el desarrollo de

$\left(\frac{2}{x^2 y} - 3xy^3\right)^{12}$ determine:

a) término general

b) término que contiene x^{-3}

c) término que contiene y^{12}

d) término independiente de x

e) término independiente de y

6. Determine el término que contiene q^9 en los siguientes desarrollos:

a) $(2p+q)^{11}$

b) $\left(q - \frac{1}{pq}\right)^{10}$

c) $(p^2-q^3)^7$

d) $\left(3q^5 - \frac{1}{q}\right)^3$

7. Encuentre los 3 primeros términos en el desarrollo de $\left(\sqrt{2}\,x + \sqrt{3}\right)^{10}$

Soluciones

1. a) $x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

b) $x^5 - 10x^4y + 40x^3y^2 - 80x^2y^3 + 80xy^4 - 32y^5$

c) $1 + 21a + 189a^2 + 945a^3 + 2.835a^4 + 5.103a^5 + 5.103a^6 + 2.187a^7$

d) $1 - 11b + 55b^2 - 165b^3 + 330b^4 - 462b^5 + 462b^6 - 330b^7 + 165b^8 - 55b^9 + 11b^{10} - b^{11}$

e) $16a^4 - 96a^3b + 216a^2b^2 - 216ab^3 + 81b^4$

f) $x^6 - 6x^4 + 15x^2 - 20 + \frac{15}{x^2} - \frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^6}$

g) $\frac{1}{z^8} + \frac{4}{z^4} + 6 + 4z^4 + z^8$

h) $\frac{1}{256}(m^8 - 8m^7 + 28m^6 - 56m^5 + 70m^4 - 56m^3 + 28m^2 - 8m + 1)$

i) $\frac{p^6}{64\,q^6} - \frac{3\,p^4}{8\,q^4} + \frac{15\,p^2}{4\,q^2} - 20 + 60\frac{q^2}{p^2} - 96\frac{q^4}{p^4} + 64\frac{q^6}{p^6}$

j) $\frac{729}{x^{24}} - \frac{729}{2\,x^{17}} + \frac{1.215}{16\,x^{10}} - \frac{135}{16\,x^3} + \frac{135}{256}x^4 - \frac{9}{512}x^{11} + \frac{x^{18}}{4.096}$

2. a) $a_7 = 462x^5\,y^6$

b) $a_5 = 5.985a^{17}\,b^4$

c) $a_{10} = \frac{-10}{a\,b^9}$

d) $a_8 = \frac{-128}{x^7\,y^{14}}$

e) $a_{11} = b^{10}$

f) $a_2 = \frac{-4}{x\,y\,z}$

g) $a_9 = 2.640 \cdot 3^{12}\sqrt{2}$

h) $a_4 = -120\sqrt{6}$

i) $a_6 = -\frac{30.618}{a}$

j) $a_{13} = \frac{232.960}{x^{45}}$

3. a) -32 b) 19.440 c) 45

d) $-5 \cdot 12^4$ e) -3.432

f) 1.120 g) -1

h) $\frac{7}{729}$ i) -1 j) -2.500

4. a) -90 b) $a_3 = 270x^4$

c) no existe

5. a) $a_{k+1} = \binom{12}{k} 2^{12-k} \cdot (-3)^k \cdot x^{3k-24} \cdot y^{4k-12}$

b) $a_8 = -\binom{12}{7} 3^7 \cdot 2^5\ x^{-3}\ y^{16}$

c) $a_7 = \binom{12}{6} 2^6 \cdot 3^6\ x^{-6}\ y^{12}$

d) $a_9 = \binom{12}{8} 2^4\, 3^8\, y^{20}$

e) $a_4 = -\binom{12}{3} 2^9\, 3^3\, x^{-15}$

6. a) $a_{10} = 220\ p^2q^9$

b) no hay

c) $a_4 = -\binom{7}{3} p^6\, q^9$

d) $a_2 = -27\ q^9$

7. $32x^{10} + 160\sqrt{6}\,x^9 + 2.160\,x^8$

13.3 Elementos de probabilidades

13.3.1 Conceptos básicos

Se llama **experimento determinístico** a aquel en el cual el resultado se puede predecir, es decir, siempre que se realice en condiciones semejantes se obtendrá el mismo resultado.

Un **experimento aleatorio** es aquel en el cual no es posible predecir el resultado aunque éste se realice en las mismas condiciones.

Al conjunto de resultados posibles de obtener a partir de un experimento aleatorio se le llama **Espacio muestral.**

Cualquier subconjunto del Espacio muestral se denomina **Evento o suceso.** Se pueden clasificar en:

a) evento cierto o seguro es aquel que está formado por todo el Espacio muestral.

b) evento imposible es el subconjunto vacío del espacio muestral.

c) eventos incompatibles o mutuamente excluyentes son aquellos que no pueden suceder simultáneamente.

d) eventos complementarios son aquellos cuya unión es el Espacio muestral y cuya intersección es el conjunto vacío.

La probabilidad de que un evento o suceso ocurra es el cociente entre el número de casos favorables y el número de casos posibles.

Así, si la probabilidad de que ocurra el suceso A, designada P (A), está dada por:

$$P(A) = \frac{N_f}{N_p}$$

donde N_f denota el número de casos favorables y

N_p denota el número de casos posibles de ocurrencia del experimento.

Observaciones.

1. La probabilidad de un evento cierto es 1.
2. La probabilidad de un evento imposible es 0.
3. Para cualquier evento A, se tiene que la probabilidad de A, denotada P (A), es:

$$0 \le P(A) \le 1$$

4. Si A y B son **eventos complementarios** entonces:

$$P(A) = 1 - P(B)$$

13.3.2 Probabilidad de la unión y de la intersección de dos eventos

Sean A y B dos eventos del Espacio muestral E.

Si A y B **son mutuamente excluyentes**, entonces la probabilidad de que ocurra la unión de los dos está dada por:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Si A y B **no son mutuamente excluyentes** entonces la probabilidad de ocurrencia de $A \cup B$ está dada por:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Ahora, si A y B son eventos independientes, la probabilidad de ocurrencia de $A \cap B$ está dada por:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Si A y B no son eventos independientes, es decir, la ocurrencia de uno de ellos, por ejemplo de A, influye sobre la ocurrencia del otro, en este caso de B, entonces la probabilidad de ocurrencia de $A \cap B$ está dada por:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$$

donde $P(B \mid A)$ es la probabilidad de ocurrencia de B condicionada por la ocurrencia de A.

Ejercicios resueltos

1. Calculemos la probabilidad de que al lanzar una moneda salga cara.

   Al lanzar una moneda tenemos dos resultados posibles: CARA - SELLO. Ese es entonces nuestro Espacio muestral. La cantidad de elementos del Espacio muestral nos indica el número de casos posibles N_p. El número de casos favorables en este ejemplo es uno solo: sale cara.

   Así, la probabilidad pedida es:

   $$P = \frac{1}{2} \quad \frac{(\text{n}^\circ \text{ casos favorables})}{(\text{n}^\circ \text{ casos posibles})}$$

2. Calculemos la probabilidad de que al lanzar un dado nos salga un número menor que 4.

   Al lanzar el dado podemos obtener 6 resultados distintos. El Espacio muestral es $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

   Los casos favorables son 3: $\{1, 2, 3\}$

   La probabilidad pedida entonces es:

   $$P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

3. Al lanzar un dado, ¿cuál es la probabilidad de obtener un número par o bien obtener un número menor que 3?

   Sea E el Espacio muestral: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

   Es decir, el N° de casos posibles es $N_p = 6$

   Sea A el evento: A = obtener número par.

   Es decir, $A = \{2, 4, 6\} \rightarrow N_A = 3$

   Sea B el evento: B = obtener número menor que 3.

   $B = \{1, 2\} \rightarrow N_B = 2$

   Vemos que $A \cap B = \{2\} \rightarrow N(A \cap B) = 1$

Claramente A y B no son mutuamente excluyentes, entonces la probabilidad de que ocurra $A \cup B$ es:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{3 + 2 - 1}{6}$$
$$P(A \cup B) = \frac{2}{3}$$

4. Calculemos la probabilidad de que al lanzar 3 monedas, obtengamos una cara y dos sellos.
Cada moneda origina 2 resultados posibles: cara o sello; como son 3 monedas, el Espacio muestral consta de 8 elementos. Tres de esos ocho elementos cumplen la condición pedida, así la probabilidad buscada es $\frac{3}{8}$.

Ejercicios

1. Determine cuáles de los siguientes experimentos son predeterminados (o determinísticos) y cuáles son aleatorios.

a) jugar una cartilla de apuesta deportiva

b) mezclar azúcar y agua

c) enfriar agua a 0° C

d) lanzar una piedra y medir su alcance

e) comprar un número de rifa

f) apostar en una carrera de caballos

g) preguntarle a un desconocido si fuma

2. Señale el Espacio muestral de los siguientes experimentos:

a) lanzar una moneda

b) lanzar dos monedas

c) lanzar 3 monedas

d) lanzar 1 dado

e) lanzar 2 dados

f) asignar el premio en una rifa para la cual hay 10 listas con 10 números cada una

3. ¿Cuál es la probabilidad de ganar uno de los 5 premios de una rifa comprando 4 números, si hay 10 listas, cada una con 20 números?

4. ¿Cuál es la probabilidad de obtener siete puntos en el lanzamiento de dos dados?

5. ¿Cuál es la probabilidad de no obtener número par en el lanzamiento de un dado?

6. Al lanzar dos monedas, qué probabilidad hay de:

a) obtener dos caras

b) obtener 1 cara y 1 sello

c) obtener lados iguales

7. En el lanzamiento de 1 dado, cuál es la probabilidad de:

a) obtener el Nº 5

b) no obtener el Nº 5

c) obtener 3 o 5

d) obtener número menor que 5

8. En el lanzamiento de dos dados, cuál es la probabilidad de que:

a) la suma sea 11

b) la suma sea mayor que 9

c) la suma sea menor que 4

d) no salgan números iguales

9. Al lanzar 1 dado dos veces consecutivas, qué probabilidad hay de:

a) obtener 2 ases

b) obtener primero un 3 y luego un número par

c) obtener primero un 3 y luego no obtener 3

d) obtener número par primero y el 3 después

10. En un naipe inglés (52 cartas) qué probabilidad hay de:

a) obtener un trébol al sacar una carta

b) obtener dos ases en una "entrega" (13 cartas)

11. En una caja hay 12 bolas negras y 8 rojas, qué probabilidad hay de:

a) sacar 1 negra

b) sacar 1 roja

c) sacar 1 negra y, sin reponerla, sacar luego una roja

d) sacar 1 negra y luego de reponerla, sacar una roja.

12. Se lanza un dado y sale 4. ¿Qué probabilidad hay de que al lanzarlo de nuevo sume con el primer resultado un número menor que 9?

13. Al comprar clavos, la probabilidad de obtener 1 defectuoso es de 0,015. ¿Cuántos clavos "defectuosos" habrá en un paquete que contiene 10 cajas y cada caja contiene aproximadamente 40?

14. En un curso de 60 alumnos, $\frac{1}{3}$ de los alumnos habla inglés, $\frac{1}{4}$ habla francés y $\frac{1}{10}$ habla los dos idiomas.

¿Cuál es la probabilidad de que un alumno elegido al azar hable sólo un idioma?

15. En una caja hay 10 bolitas rojas y 6 azules. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 bolitas azules en 3 sacadas diferentes sin reposición?

16. En un grupo de 30 personas todos tienen edades diferentes menores de 50 años. Si se integra una nueva persona, también menor de 50, ¿cuál es la probabilidad de que su edad coincida con la de alguno de los 30?

17. Hay 150 números en una rifa. ¿Cuántos habrá que comprar para tener un 8% de probabilidad de ganarla?

18. ¿Qué probabilidad hay de que al lanzar 2 dados se obtenga una suma menor que 6?

19. Hay 16 monedas de $ 100, 22 monedas de $ 50 y 12 monedas de $ 10. Al sacar una moneda, ¿cuál es la probabilidad de sacar una de $ 100 o de $ 50?

20. En un curso la mitad de los alumnos son hombres. Si el 40% de los hombres sabe inglés y el 50% de las mujeres, francés, ¿cuál es la probabilidad de que al elegir un alumno sepa inglés o francés?

21. En un grupo de 100 personas, 40 gustan de la música, 30 gustan del deporte, 10 gustan de la música y del deporte y los otros no gustan ni de la música ni del deporte. Al elegir una persona al azar, cuál es la probabilidad de que:

a) guste sólo de la música

b) guste sólo del deporte

c) guste de la música o del deporte

d) no guste ni de la música ni del deporte

e) guste de ambos.

Soluciones

1. a) aleatorio
   b) predeterminado
   c) predeterminado
   d) aleatorio
   e) aleatorio
   f) aleatorio
   g) aleatorio

2. a) E = {cara, sello}
   b) E = {cara cara; cara sello; sello cara; sello sello}
   c) E = {cara cara cara; cara cara sello; cara sello cara; cara sello sello; sello cara cara; sello cara sello; sello sello cara; sello sello sello}
   d) E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
   e) E = {1-1, 1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 1-6
   2-1, 2-2, 2-3, 2-4, 2-5, 2-6
   3-1, 3-2, 3-3, 3-4, 3-5, 3-6
   4-1, 4-2, 4-3, 4-4, 4-5, 4-6
   5-1, 5-2, 5-3, 5-4, 5-5, 5-6
   6-1, 6-2, 6-3, 6-4, 6-5, 6-6}
   f) E = {$L_{1,1}$; $L_{1,2}$; $L_{1,3}$ ...; $L_{1,10}$
   $L_{2,1}$; $L_{2,2}$; $L_{2,3}$ ...; $L_{2,10}$
   •
   •
   •
   $L_{10,1}$; $L_{10,2}$; $L_{10,3}$ ...; $L_{10,10}$}

3. $\dfrac{\binom{4}{1}\binom{196}{4}}{\binom{200}{5}}$

4. $\frac{1}{6}$ o $16,\bar{6}\%$

5. $\frac{1}{2}$ o 50%

6. a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{2}$

7. a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{5}{6}$
   c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{2}{3}$

8. a) $\frac{1}{18}$ b) $\frac{1}{6}$
   c) $\frac{1}{12}$ d) $\frac{5}{6}$

9. a) $\frac{1}{36}$ b) $\frac{1}{12}$
   c) $\frac{5}{36}$ d) $\frac{1}{12}$

10. a) $\frac{1}{4}$ b) $\dfrac{\binom{4}{2}:\binom{48}{11}}{\binom{52}{13}}$

11. a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{2}{5}$
    c) $\frac{24}{95}$ d) $\frac{6}{25}$

12. $\frac{2}{3}$ 13. 6 14. $\frac{23}{60}$

15. $\frac{1}{28}$ 16. $\frac{3}{5}$ 17. 12 números

18. $\frac{5}{18}$ 19. $\frac{19}{25}$

20. 45% o $\frac{9}{20}$

21. a) 30% b) 20% c) 60%
    d) 40% e) 10%

Prueba de selección múltiple

1. Si $\binom{x}{2} = 10$, entonces el valor de x es:

A. 5 **B.** 4
C. 3 **D.** 6
E. 10

2. $\dfrac{11!}{2!\ 9!} =$

A. 2! **B.** 2
C. 55 **D.** 110
E. 220

3. $\binom{7}{2} + \binom{7}{3} =$

A. $\binom{7}{5}$ **B.** $\binom{14}{5}$
C. $\binom{8}{4}$ **D.** $\binom{8}{3}$
E. Otro

4. ¿De cuántas maneras se pueden escoger 3 libros de un total de 9?

A. 27

B. 504

C. 84

D. 12

E. 729

5. $\binom{7}{5} : \binom{6}{4} =$

A. $\frac{7}{5}$

B. $\frac{7}{6}$

C. $\frac{7}{4}$

D. $\frac{6}{5}$

E. $\frac{5}{4}$

6. El último término en el desarrollo de $(x - 3y)^5$ es:

A. $-15\ y^5$

B. $15\ y^5$

C. $243\ y^5$

D. $-243\ y^5$

E. $-243\ x\ y^5$

7. El coeficiente numérico del 8° término del desarrollo de $(2 - x)^{11}$ es:

A. 330

B. – 330

C. 5.280

D. – 5.280

E. Otro

8. El coeficiente numérico del 2° término en el desarrollo de $(2\ a + b)^5$ es:

A. 16

B. 32

C. 80

D. 10

E. 50

9. El término central en el desarrollo de $(3x - \frac{y}{2})^7$ es:

A. $\frac{2.835}{8}\ x^4\ y^3$

B. $\frac{-2.835}{8}\ x^4\ y^3$

C. $\frac{945}{16}\ x^3\ y^4$

D. $\frac{-945}{16}\ x^3\ y^4$

E. No hay término central

10. El término central en el desarrollo de $(2\ x - y)^6$ es:

A. $-60\ x^2\ y^4$

B. $60\ x^2\ y^4$

C. $160\ x^3\ y^3$

D. $-160\ x^3\ y^3$

E. No hay término central

11. El término independiente de x en el desarrollo de $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^4$ es:

A. 2°

B. 3°

C. 4°

D. Último

E. No hay término independiente de x

12. ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar 3 personas de un total de 7?

A. 35

B. 40

C. 56

D. 9

E. 21

13. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar 5 libros en un estante si 2 de ellos deben estar siempre juntos?

A. $4!$

B. $2 \cdot 4!$

C. $5!$

D. $2 \cdot 5!$

E. $\frac{5}{2}!$

14. ¿De cuántas maneras se puede seleccionar un grupo de 4 personas entre un total de 3 hombres y 5 mujeres?

A. 32

B. 60

C. 140

D. 70

E. 144

15. El coeficiente numérico del tercer término del desarrollo de $(1 + x)^5$ es:

A. 1

B. 3

C. 5

D. 10

E. Otro.

16. De las siguientes afirmaciones:

I $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

II $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

III $\binom{n+1}{n-1} = \binom{n}{n-2}$

son verdaderas:

A. Sólo I

B. Sólo II

C. I y II

D. Todas

E. Ninguna

17. El valor de

$\binom{5}{0} + 2\binom{5}{1} + \binom{5}{5}$ es:

A. 3

B. 5

C. 10

D. 12

E. 125

18. $\binom{n+2}{n+1} : \binom{n+1}{n+1} =$

A. n

B. n + 1

C. n + 2

D. (n + 1) (n + 2)

E. $\frac{n+2}{n+1}$

19. ¿Cuántas "palabras" de 5 letras pueden formarse con las letras de la palabra TIGRE? (sin repetir)

A. 60

B. 120

C. 240

D. 600

E. 720

20. ¿Cuántas "palabras" de 3 letras pueden formarse con las letras de la palabra FÚTBOL? (sin repetir)

A. 6

B. 18

C. 27

D. 120

E. 216

21. Una liga de fútbol consta de 15 equipos. ¿Cuántos partidos deben jugarse para completar la primera rueda?

A. 15

B. 30

C. 105

D. 150

E. 225

22. ¿De cuántas maneras se puede escoger un "menú" (1 entrada-plato de fondo-postre) si se dispone de 3 entradas, 3 platos de fondo y 5 postres?

A. 45

B. 15

C. 11

D. 14

E. 125

23. ¿Cuántas diagonales se pueden trazar en un polígono de 10 lados?

A. 10

B. 30

C. 35

D. 70

E. Otro

24. De un grupo de n personas hay 45 maneras de formar parejas. ¿Cuál es el valor de n?

A. 9

B. 10

C. 12

D. 15

E. 20

25. ¿Cuántas "palabras" se pueden formar con las letras de la palabra LÁPIZ si la A y la P deben aparecer juntas?

A. 48

B. 24

C. 120

D. 60

E. 96

26. ¿De cuántas maneras se pueden ubicar 6 personas en un auto si sólo 1 de ellas sabe manejar?

A. 5

B. 6

C. 30

D. 60

E. 120

27. ¿De cuántas maneras se puede viajar de A a C pasando por B si hay 6 posibilidades de ir de A a B y 4 para ir de B a C?

A. 24

B. 12

C. 10

D. 6

E. 36

28. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número menor que 3 al lanzar 1 dado?

A. 10%

B. 20%

C. 30%

D. $\frac{1}{3}$

E. $\frac{1}{2}$

29. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 "caras" al lanzar 3 monedas?

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{8}$

C. $\frac{1}{6}$

D. $\frac{1}{9}$

E. $\frac{1}{3}$

30. Al lanzar 2 dados, ¿cuál es la probabilidad de que la suma sea mayor o igual a 10?

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{6}$

D. $\frac{1}{9}$

E. $\frac{1}{12}$

31. La probabilidad de obtener 2 números iguales al lanzar 2 dados es:

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{1}{6}$

E. $\frac{1}{12}$

32. La probabilidad de no obtener el 5 o el 3 al lanzar 1 dado es:

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{1}{6}$

E. $\frac{5}{6}$

33. La probabilidad de no obtener una carta de corazón de un naipe inglés (52 cartas) es:

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{3}{8}$

E. $\frac{1}{8}$

34. Al lanzar 2 veces seguidas 1 dado, ¿cuál es la probabilidad de sacar 2 ases?

A. $\frac{1}{36}$

B. $\frac{1}{6}$

C. $\frac{1}{12}$

D. $\frac{1}{18}$

E. $\frac{1}{30}$

35. Al lanzar 2 dados, ¿cuál es la probabilidad de obtener una suma menor que 3?

A. $\frac{1}{36}$

B. $\frac{1}{18}$

C. $\frac{1}{12}$

D. $\frac{1}{9}$

E. $\frac{1}{6}$

36. En una caja hay 5 monedas de $ 100 y 6 de $ 50. ¿Cuál es la probabilidad de sacar 2 monedas de $ 100 si se sacan 2 veces sin reponerlas?

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{2}{11}$

D. $\frac{5}{11}$

E. $\frac{4}{11}$

37. Una caja contiene 8 bolas rojas y 4 negras. ¿Cuál es la probabilidad de no sacar una bola negra?

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{1}{6}$

E. $\frac{1}{2}$

38. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 2 números pares al lanzar 2 dados?

A. $\frac{1}{6}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{12}$

E. $\frac{1}{4}$

39. Al lanzar 3 dados, ¿cuántos resultados posibles se pueden obtener?

A. 18

B. 30

C. 108

D. 196

E. 216

40. Al lanzar 1 dado, ¿cuál es la probabilidad de obtener un número impar o un número menor que 4?

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{4}{3}$

E. $\frac{3}{4}$

41. Al lanzar 2 veces un dado, ¿cuál es la probabilidad de obtener un 6 en el primer lanzamiento y un 2 en el segundo?

A. $\frac{1}{6}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{36}$

D. $\frac{1}{18}$

E. $\frac{1}{12}$

42. ¿Cuál es la probabilidad de ganar el premio de una rifa para la cual se venden 20 listas y cada lista tiene 20 números, si se compran 4 números?

A. $\frac{1}{10}$

B. $\frac{1}{100}$

C. $\frac{1}{200}$

D. $\frac{1}{50}$

E. $\frac{1}{40}$

43. En una carrera corren 8 caballos signados por números 1, 2, 3, ..., 8. ¿Cuál es la probabilidad de que gane el caballo 3 o el caballo 6 si todos tienen igual probabilidad de ganar?

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{8}$

D. $\frac{1}{64}$

E. Otro.

Soluciones

1. A					
2. C	9. E	16. C	23. C	30. C	37. B
3. D	10. D	17. D	24. B	31. D	38. E
4. C	11. E	18. C	25. A	32. C	39. E
5. A	12. A	19. B	26. E	33. B	40. B
6. D	13. B	20. D	27. A	34. A	41. C
7. D	14. D	21. C	28. D	35. A	42. B
8. C	15. D	22. A	29. B	36. C	43. A

CAPÍTULO 14

Problemas

Introducción

En esta sección aplicaremos los conocimientos adquiridos en el planteamiento y resolución de problemas. Para esto es necesario seguir algunos pasos:

1. Leer muy bien el enunciado y asegurarse de comprenderlo cabalmente.
2. Identificar los elementos conocidos y desconocidos que allí intervengan.
3. Asignar variables correspondientes a los elementos mencionados.
4. Plantear la o las ecuaciones necesarias de acuerdo con el problema.
5. Resolver la o las ecuaciones planteadas.
6. Entregar la solución del problema.

El último punto es importante porque muchas veces la solución del problema no está dada por la solución directa de las ecuaciones. Muchas veces es conveniente efectuar una comprobación de la solución.

Aplicación de ecuaciones lineales enteras 14.1

Ejercicios resueltos

1. El doble de un número más 5 es igual al triple del mismo número menos 2. ¿Cuál es el número?

El enunciado es muy simple y hay sólo un elemento en cuestión.

Sea x el número pedido.

Escribamos los datos en forma de ecuación:

$2x + 5 = 3x - 2$

resolviendo la ecuación, obtenemos:

$x = 7$

que es la solución del problema.

2. El triple de un número disminuido en 18 es igual al mismo número aumentado en 8. ¿Cuál es el número?
Sea x el número pedido:

Tenemos: $3x - 18 = x + 8$

y resolviendo obtenemos:

$2x = 26$

$x = 13$

y ésa es la solución del problema.

3. Al doble de un número disminuido en 5 se le agrega el triple del mismo número disminuido en 10 y se obtiene 25. Calcular el cuádruple de dicho número.

Sea x el número en cuestión:

Tenemos: $2x - 5 + 3x - 10 = 25$

resolviendo la ecuación:

$$\begin{aligned} 5x - 15 &= 25 \\ 5x &= 40 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

el número es 8, pero se nos pide el cuádruple de él; por lo tanto, la solución del problema es $4x = 32$.

4. Encontrar tres enteros consecutivos cuya suma sea 54.
Como se trata de números consecutivos se pueden representar por x, $x + 1$ y $x + 2$.

(También, y es más simple en este caso, por $x - 1$, x, $x + 1$).
Planteando la ecuación de acuerdo al problema, tenemos:

$$\begin{aligned} x + x + 1 + x + 2 &= 54 \\ 3x + 3 &= 54 \\ 3x &= 51 \\ x &= 17 \end{aligned}$$

y los números pedidos son 17, 18 y 19.

5. La suma de 3 números pares consecutivos es 402. ¿Cuáles son los números?
Aunque formalmente la expresión de un número par está dada por $2n$ ($n \in \mathbb{N}$), aquí podemos usar la variable simple x, dadas las condiciones del problema. Como se trata de números pares, la diferencia entre dos consecutivos de ellos es 2. Así, los números son:

x, $x + 2$, $x + 4$ o ($x - 2$, x, $x + 2$).

Entonces la ecuación es:

$$\begin{aligned} x + x + 2 + x + 4 &= 402 \\ 3x + 6 &= 402 \\ 3x &= 396 \\ x &= 132 \end{aligned}$$

y los números son 132, 134 y 136.

6. La suma de tres números impares consecutivos es 297. ¿Cuál es el doble del mayor?
Formalmente la expresión que identifica a un número impar es $2n + 1$ ($n \in \mathbb{N}$), pero en este caso, dadas las condiciones del problema, podemos identificarlo con x. Entonces los números son x, $x + 2$ y $x + 4$.

Así:
$$\begin{aligned} x + x + 2 + x + 4 &= 297 \\ 3x + 6 &= 297 \\ 3x &= 291 \\ x &= 97 \end{aligned}$$

Los números son 97, 99 y 101 y el doble del mayor es 202.

7. La suma de las edades de 2 hermanos es 31 años, si la diferencia entre ellos es de 3 años, calculemos la edad de ambos.
Sea x la edad del mayor. Como la diferencia entre sus edades es de 3 años, el hermano menor tendrá entonces $x - 3$ años.

Así:
$$\begin{aligned} x + x - 3 &= 31 \\ 2x - 3 &= 31 \\ 2x &= 34 \\ x &= 17 \end{aligned}$$

Entonces la edad del mayor es 17 años y la del menor es 14 años.

8. Dividir el número 550 en tres partes tales que la segunda exceda a la primera en 25 y la tercera exceda a la segunda en 50.
Sea x la primera parte, entonces la segunda será $x + 25$ y la tercera $(x + 25) + 50 = x + 75$

La ecuación correspondiente es:

$$\begin{aligned} x + x + 25 + x + 75 &= 550 \\ 3x + 10 &= 550 \\ 3x &= 450 \\ x &= 150 \end{aligned}$$

y las partes serán, respectivamente: 150, 175 y 225.

9. La edad de Ana es el doble de la edad de María y hace 6 años era 4 veces la de María. Determinemos las edades actuales.

Sea x la edad actual de María. Entonces

$2x$ es la edad actual de Ana.

Hace 6 años la edad de María era
$x - 6$ y la edad de Ana era $2x - 6$
y en ese momento la edad de Ana era el cuádruple de la edad de María. Es decir:

$2x - 6 = 4(x - 6)$

Resolviendo la ecuación, tenemos:

$$\begin{aligned} 2x - 6 &= 4x - 24 \\ 18 &= 2x \\ 9 &= x \end{aligned}$$

Entonces, actualmente María tiene 9 años y Ana tiene 18 años (hace 6 años María tenía 3 años y Ana tenía 12, es decir, el cuádruple de la edad de María).

Ejercicios

1. La suma de un número con su doble es 18.

¿Cuál es el número?

2. La diferencia de un número con su triple es -16.

¿Cuál es el número?

3. El doble de un número aumentado en 1 es igual al triple del mismo número disminuido en 4.

¿Cuál es el número?

4. El triple de un número disminuido en 8 es igual al doble del mismo número aumentado en 4.

¿Cuál es el número?

5. Siete veces un número disminuido en 1 es igual a 6 veces dicho número aumentado en 3.

¿Cuál es el número?

6. La suma de tres números enteros consecutivos es 636.

¿Cuáles son los números?

7. La suma de tres números enteros consecutivos es -135.

¿Cuáles son los números?

8. La suma de tres números impares consecutivos es 369.

¿Cuáles son los números?

9. La suma de 3 números impares consecutivos es -279.

¿Cuál es el mayor?

10. La suma de 4 números pares consecutivos es 4.620.

¿Cuál es el número menor?

11. La suma de 4 números consecutivos es 546.

¿Cuál es el doble del menor?

12. Compro 1 kg de azúcar y 1 litro de aceite. Si el kg de azúcar cuesta \$ 30 menos que el litro de aceite y en total gasto \$ 650.

¿Cuál es el precio de cada artículo?

13. Se compra una docena de pinceles y media docena de cuadernos. Si cada cuaderno es \$ 60 más caro que cada pincel y el total de la compra es de \$ 2.520, ¿cuál es el precio de cada artículo?

14. Se compran 2 kg de lentejas y 3 kg de garbanzos. Si el kg de garbanzos cuesta \$ 60 más que el de lentejas y el total de la compra es de \$ 1.930, calcule el precio de cada artículo.

15. Pedro y Luis tienen en total $ 3.800. Si Pedro gasta $ 600 y Luis gana $ 400, Luis tendrá el doble de lo que tendrá Pedro. ¿Cuánto tiene cada uno?

16. Hay 91 rosales rojos, blancos y amarillos. Si hay el doble de rosales rojos que amarillos y el doble de rosales blancos que rojos, ¿cuántos rosales hay de cada color?

17. ¿Cuántas parras se necesitan para producir 12.800 kg de uva si cada parra produce aproximadamente 160 kg?

18. Dividir el número 1.200 en dos partes tales que el triple de la parte menor exceda en 96 a la mayor.

19. Dividir el número 164 en dos partes tales que el doble del mayor aumentado en 40 sea igual al triple del menor disminuido en 7.

20. Dividir el número 750 en 3 partes tales que la segunda sea igual al doble de la primera y la tercera sea igual a la suma de la primera y la segunda.

21. Dividir el número 196 en tres partes tales que la segunda sea igual al doble de la primera menos 3 unidades, la tercera sea igual al doble de la segunda más 2 unidades.

22. El perímetro de un cuadrado es 52 cm. ¿Cuánto mide el lado?

23. El perímetro de un rectángulo es 64 cm y su largo tiene 2 cm más que su ancho. ¿Cuáles son sus dimensiones?

24. Calcule las dimensiones de un rectángulo sabiendo que el largo es el triple del ancho y que su perímetro es 72 cm.

25. Se desea cercar un terreno rectangular. Si se necesitan 30 m de alambre y se sabe que el largo tiene 3 m más que el ancho, determine las dimensiones del terreno.

26. En un corral hay conejos y gallinas. Si en total hay 44 patas y 14 cabezas, ¿cuántos hay de cada tipo?

27. En un corral hay conejos y gallinas, si en total hay 40 patas y 14 cabezas. ¿Cuántos conejos hay? y ¿Cuántas gallinas?

28. Un padre reparte una herencia a sus 3 hijos otorgándoles $ 2.000.000 por cada año que ellos tienen. Si el hermano mayor tiene 3 años menos que la suma de las edades de sus dos hermanos, el hermano del medio tiene el doble de la edad de su hermano menor y éste, el menor, tiene 4 años, determine cuál fue la cantidad repartida.

29. Las edades de 2 hermanas suman 26 años y el doble de la edad de la menor disminuida en 1 es igual a la edad de la mayor. Determine ambas edades.

30. La edad actual de una madre es el cuádruple de la edad de su hija más 3 años y hace 3 años la edad de la madre era 8 veces la edad de la hija. Determine ambas edades.

31. Las edades de dos hermanos suman 35 años. Dentro de 15 años la edad del menor será la edad actual del mayor. Determine ambas edades.

32. Tengo en mi bolsillo 37 monedas de $ 50 y $ 100 y en total tengo $ 2.600. ¿Cuántas monedas de $ 50 y cuántas de $ 100 tengo?

33. Encontrar 3 números enteros consecutivos tales que el doble del menor más el triple del mediano menos el cuádruple del mayor sea igual a 19.

34. La suma de dos números es 77 y la diferencia entre el triple del menor y el doble del mayor es 16. Determine dichos números.

35. Dentro de 15 años la edad de un padre será el doble de la edad de su hijo. Si las edades difieren en 30 años, determine las edades actuales.

Soluciones

(Ecuaciones enteras)

1. $x = 6$ 2. $x = 8$ 3. $x = 5$ 4. $x = 12$ 5. $x = 4$ 6. 211 , 212 , 213
7. – 44, – 45, – 46 8. 121, 123, 125 9. – 91 10. 1.152
11. 270 12. \$ 310 , \$ 340 13. \$ 120 pincel; \$ 180 cuaderno.
14. \$ 350 lentejas; \$ 410 garbanzos
15. \$ 1.800 Pedro; \$ 2.000 Luis 16. 13 – 26 – 52. 17. 80.
18. 324 – 876. 19. 89 – 75 20. 125 – 250 – 375
21. 29 – 55 – 112 22. 13. 23. largo = 17 cm; ancho = 15 cm
24. l = 27 cm; a = 9 cm 25. a = 6 m; l = 9 m
26. 8 conejos; 6 gallinas 27. 6 conejos; 8 gallinas
28. \$ 42.000.000 29. 9 – 17 30. h = 6 años; m = 27 años
31. 25 y 10 32. 22 de \$ 50 y 15 de \$ 100
33. 24 – 25 – 26 34. 34 – 43 35. P = 45 años; h = 15 años

14.2 Aplicación de ecuaciones lineales fraccionarias

El procedimiento y los pasos a seguir son análogos al caso anterior.

Los desarrollos para obtener las soluciones dependen de las ecuaciones planteadas y, como se trata de expresiones fraccionarias, deberán hacerse todas las amplificaciones necesarias para resolver el problema.

Ejercicios resueltos

1. Un número más su mitad, más su tercera parte y más su cuarta parte es igual a 25. ¿Cuál es el número?

Denotemos por x el número pedido. Tenemos que el planteamiento del problema nos queda:

$$x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 25$$

Y resolvemos la ecuación amplificando por el m.c.m. entre los denominadores, que es 12.

$$\begin{aligned} x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} &= 25 && /\cdot 12 \\ 12x + 6x + 4x + 3x &= 300 \\ 25x &= 300 && /\cdot \frac{1}{25} \\ x &= 12 \end{aligned}$$

El número pedido es 12.

2. De una pieza de tela de 60 m se venden los $\frac{2}{5}$. ¿Cuánto queda?

$$\text{Quedan } 60 - \frac{2}{5} \cdot 60 = 60 - 24 = 36 \text{ m}$$

3. La edad de un hijo equivale a los $\frac{2}{7}$ de la edad de su padre y hace 6 años la edad del hijo era $\frac{1}{6}$ de la del padre. Determine las edades actuales.

Sea x la edad actual del padre. Entonces $\frac{2}{7}x$ es la edad actual del hijo.

Hace 6 años las edades eran $x - 6$ y $\frac{2}{7}x - 6$, respectivamente, y la relación estaba dada por:

$$\frac{2}{7}x - 6 = \frac{1}{6}(x - 6) \qquad / \cdot 42$$
$$12x - 252 = 7x - 42$$
$$5x = 210$$
$$x = 42$$

La edad del padre es 42 años y la de su hijo es 12 años.

Ejercicios

1. Dividir el número 150 en dos partes, de modo que una de ellas sea la mitad de la otra.
2. Dividir el número 150 en tres partes, de modo que la primera sea la mitad de la segunda y la segunda sea igual a los dos tercios de la tercera.
3. Dividir el número 150 en dos partes, de modo que la primera sea igual a los tres medios de la segunda.
4. Dividir el número 150 en 4 partes, de modo que la primera sea igual a un tercio de la segunda, la segunda sea igual a un medio de la tercera y la tercera, igual a la suma de la cuarta y la primera.
5. Si pago los dos quintos de una deuda quedo debiendo $ 45.000 más los tres décimos de la deuda. ¿A cuánto asciende ésta?
6. La cuarta parte de un número disminuido en 2 es igual a la sexta parte del mismo número aumentada en 1. ¿Cuál es el número?
7. El doble de un número disminuido en la mitad del mismo es igual al triple del número disminuido en 15. ¿Cuál es el número?
8. Se desea repartir $ 1.020 en tres partes, de modo que la primera sea igual a tres cuartos de la segunda más $ 180 y la tercera sea igual a cinco sextos de la primera más $ 120. ¿Cuánto corresponde a cada parte?
9. En un curso la mitad de los alumnos habla inglés y español, la sexta parte habla francés y español, la octava parte habla alemán y español y los 25 alumnos restantes hablan sólo español. ¿Cuántos alumnos tiene el curso?
10. Hace 15 años la edad de Juan era igual a los tres cuartos de la edad de Pedro; sabiendo que Pedro tiene 10 años más que Juan, determine las edades actuales.
11. Un padre reparte una cantidad de dinero entre sus hijos. El mayor recibió la mitad del total, el segundo recibió la cuarta parte del total; el tercero recibió la sexta parte del total y el cuarto recibió el dinero restante que eran $ 5.400. ¿Cuánto fue el dinero repartido?

12. Hace 10 años la edad de María era igual a la décima parte de la edad de Ana y actualmente es la cuarta parte. ¿Qué edades tienen Ana y María?
13. Dos números enteros consecutivos son tales que la diferencia entre los tres cuartos del menor y los dos quintos del mayor equivalen al número mayor disminuido en 17.
14. Tengo cierta cantidad de dinero. Gasto $\frac{1}{5}$ del total en un primer artículo; luego gasto la mitad de lo que me queda en un segundo artículo y aún me quedan $ 4.800. ¿Cuánto dinero tenía?
15. La diferencia entre los $\frac{4}{5}$ y los $\frac{3}{4}$ de un número es 6. Determine el número.
16. Un vehículo recorrió 210 kilómetros en 2 horas y 20 minutos. ¿Cuántos kilómetros recorrió en 1 minuto? (Suponga una velocidad constante).
17. Un hijo tiene $\frac{7}{16}$ de la edad de su padre. Si ambas edades suman 92 años, determínelas.
18. Un kilómetro corresponde aproximadamente a los ocho quintos de una milla. ¿Cuántos km hay en 150 millas?
19. De un depósito de agua se ocupan las dos quintas partes; luego se ocupan los dos tercios de lo que queda, luego se ocupa un medio del resto y aún quedan 144 litros. ¿Cuál es la capacidad del depósito?
20. Un reloj se adelanta 90 segundos por día. ¿En cuántos días el reloj marcará un aumento de 12 minutos?
21. Los $\frac{3}{4}$ de los $\frac{2}{5}$ de una deuda corresponden a $ 1.710. ¿A cuánto asciende la deuda?
22. El doble de un número más la mitad del mismo número, más un cuarto del número más uno equivale a 100. ¿Cuál es el número?
23. Los $\frac{2}{5}$ de una cantidad de fruta son manzanas, los $\frac{3}{7}$ son naranjas y hay 12 duraznos. ¿Cuál es el total de fruta?
24. Los $\frac{3}{8}$ de los animales de una granja son corderos y el resto son vacas. En total hay 64 animales. ¿Cuántos corderos y cuántas vacas hay?
25. Una mezcla de concreto se prepara con arena y cemento en la proporción 3:4. Si se necesitan 105 kilos de concreto, ¿cuántos kilos de arena y de cemento se requieren?
26. Si con 134 litros de agua se llena un estanque sólo en sus $\frac{2}{3}$ partes, determine la capacidad del estanque.
27. La quinta parte de los asistentes a una conferencia son alemanes, la mitad son ingleses y hay 21 brasileños. ¿Cuántos son los asistentes a la conferencia?
28. Los $\frac{2}{5}$ de los $\frac{3}{2}$ de un número equivalen a las $\frac{3}{4}$ partes del mismo número disminuido en 6. Determine el número.
29. Se compran 3 artículos A, B y C.
El artículo A costó $ 150.
El artículo A y el artículo B costaron las tres cuartas partes del valor de C y el artículo C más el A costaron $ 50 más que el doble del valor de B. ¿Cuánto costó cada uno?
30. Tengo una cantidad de dinero. Gasto $\frac{1}{8}$ de esa cantidad en un artículo y $\frac{5}{12}$ de la misma en otro. Luego gasto $\frac{4}{5}$ de lo que me queda y aún conservo $ 5.500. ¿Cuál era mi capital inicial?
31. Dos vehículos viajan en la misma carretera acercándose en sentidos opuestos. El primero mantiene una velocidad de 65 km/h y el segundo de 55 km/h. Si se encuentran entre sí a 520 km de distancia, ¿en cuántas horas estarán a 40 km entre ellos, antes de cruzarse?

Soluciones

(Ecuaciones fraccionarias)

1. 50 y 100 2. 25 - 50 - 75 3. 90 - 60 4. 10 - 30 - 60 - 50
5. $ 150.000 6. 36 7. 10 8. 360 - 240 - 420 9. 120
10. Juan: 45 años; Pedro: 55 años 11. $ 64.800
12. María tiene 15 años y Ana tiene 60 años 13. 24 ; 25 14. $ 12.000 15. 120
16. Recorrió 1,5 km 17. 28 y 64 años, respectivamente 18. 93,75 km 19. 1.440 litros.
20. 8 días 21. $ 5.700 22. 36 23. 70 24. 24 corderos y 40 vacas
25. 45 kg de arena y 60 kg de cemento 26. 201 litros 27. 70 28. 40
29. $ 150, $ 450 y $ 800, respectivamente 30. $ 60.000 31. 4 horas

Aplicación de sistemas de ecuaciones lineales 14.3

Muchos problemas se pueden resolver en forma mucho más simple si se plantean mediante un sistema de ecuaciones. Esto implica el uso de 2 o más variables, cuyos valores deben ser encontrados aplicando los métodos conocidos para la solución de sistemas.

Ejercicios resueltos

1. La suma de dos números es 17 y su diferencia es 7. Determine los números.

Como se trata de dos números, éstos serán denotados por x e y. Así tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 17 \\ x - y = 5 \end{array}\right|$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos:

$2x = 22$

$x = 11$

y sustituyendo el valor obtenido tenemos:

$y = 6$

Entonces los números pedidos son 11 y 6.

2. La cuarta parte de la diferencia de dos números es igual a 9 y la diferencia entre el mayor y el triple del menor es 4. Determine los números.

Sean x e y los números pedidos, con $x > y$.

Planteamos las ecuaciones de acuerdo con el enunciado:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x - y}{4} = 9 \\ x - 3y = 4 \end{array}\right|$$

y resolvemos el sistema. Amplifiquemos la primera ecuación por 4. Nos queda:

$$\left.\begin{array}{l} x - y \ = 36 \\ x - 3y = 4 \end{array}\right|$$

Restando ambas obtenemos:

$2y \ = 32$

$y \quad = 16$

Y reemplazando el valor obtenido en cualquier ecuación tenemos:

$x = 52$ y los números pedidos son 52 y 16.

3. Hace 6 años la edad de un hijo era $\frac{1}{5}$ de la edad de su padre y dentro de 9 años la edad del hijo será los $\frac{2}{5}$ de la de su padre. Determinar las edades actuales.

Sean x e y las edades actuales del padre y del hijo respectivamente.

Hace 6 años, las edades eran $x - 6$ e $y - 6$, respectivamente.

Dentro de 9 años ambos tendrán $x + 9$ e $y + 9$, respectivamente.

Planteamos entonces las ecuaciones de acuerdo con el enunciado.

$$\left.\begin{array}{l} y - 6 = \frac{1}{2}(x - 6) \\ y + 9 = \frac{2}{5}(x + 9) \end{array}\right|$$

Haciendo las amplificaciones adecuadas tenemos:

$$5y - 30 = x - 6$$
$$5y + 45 = 2x + 18$$

$$\left.\begin{array}{l} 5y - x \ \ = 24 \\ 5y - 2x = -27 \end{array}\right|$$

Resolviendo el sistema obtenemos las soluciones $x = 51$, $y = 15$

lo que corresponde a las edades actuales de un padre y de su hijo.

4. Dividir 90 en tres partes tales que la parte menor sea igual a $\frac{1}{9}$ de la parte intermedia y la intermedia sea igual a $\frac{9}{20}$ de la parte mayor.

Sean x, y, z las tres partes ordenadas de menor a mayor.

Tenemos:
$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 90 \\ x = \frac{1}{9}y \\ y = \frac{9}{20}z \end{array}\right|$$

de la 3ª ecuación: $z = \frac{20}{9}y$

de la 2ª ecuación: $y = 9x$

de ambas igualdades obtenemos: $z = \frac{20}{9} \bullet 9 \bullet x$

$$z = 20x$$

podemos expresar tanto y como z en términos de x.
Reemplazando en la 1ª ecuación:

$$x + 9x + 20x = 90 \Rightarrow 30x = 90$$
$$x = 3$$

y sustituyendo obtenemos: $y = 27$

$$z = 60$$

y así queda 90 dividido en esas tres partes.

Ejercicios

1. La suma de dos números es 12 y la diferencia entre ellos es 6. Determínelos.
2. La suma de dos números es 6 y su diferencia es –17. Determínelos.
3. La diferencia de dos números es 24 y la suma del mayor con el doble del menor es –6. Determine ambos números.
4. Tengo $ 4.050 en monedas de $ 50 y de $ 100. Si en total tengo 46 monedas, ¿cuántas tengo de cada valor?
5. Dividir 60 en dos partes tales que la parte menor sea igual a la tercera parte de la parte mayor.
6. Tres kilos de un artículo A más un kilo de un artículo B cuestan $ 955. Tres kilos del artículo B más un kilo del artículo A cuestan $ 1.225. ¿Cuál es el precio de cada artículo por kilo?
7. Determine dos números de modo que la diferencia entre el mayor y el doble del menor sea –1 y la suma del doble del mayor con el menor sea 8.
8. Tengo 18 aves entre patos y gallinas y la diferencia entre el doble de patos y el triple de gallinas es 1. ¿Cuántas tengo de cada tipo?
9. Si al triple de un número le agrego el doble de otro obtengo como resultado 8 y si al doble del segundo número le agrego el primero obtengo 0. ¿Cuáles son los números?
10. Si al doble de un número le resto el triple de otro obtengo 5 y si al primer número le sumo el doble del segundo obtengo –1. ¿Cuáles son los números?
11. Si Pedro le da a Juan $ 400, ambos quedan con la misma cantidad y si Juan le da a Pedro $ 300, entonces Pedro tendrá exactamente el doble de lo que tiene Juan. ¿Cuánto tiene cada uno?
12. Si sumamos el dinero mío y el de mi hermano hacemos $ 1.700 y si mi hermano me regala $ 155, tendremos lo mismo cada uno. ¿Cuánto tiene cada uno?
13. Hace 10 años la edad de un hijo era un séptimo de la edad de su madre y dentro de 10 años la edad de la madre será el doble de la edad de su hijo. Determine las edades actuales.
14. Si a los dos términos de una fracción se le agrega 1, la fracción que resulta es equivalente con $\frac{1}{2}$ y si a los dos términos de la misma fracción se les resta 1, resulta una fracción equivalente a $\frac{1}{4}$. Determine la fracción original.
15. La razón entre dos números es 2:3 y su suma es $\frac{5}{4}$. ¿Cuáles son los números?

16. Dos números están en la razón 3:1. La diferencia entre el doble del mayor y el menor es 15. ¿Cuáles son los números?

17. La edad de Ana es igual al triple de la edad de Rosa. La diferencia entre la mitad de la edad de Ana y un tercio de la edad de Rosa es $\frac{14}{3}$. ¿Qué edad tiene cada una?

18. La suma de tres números enteros positivos es 20. Si el menor se multiplica por 5, se obtiene el doble del mayor y si el mediano se multiplica por 5, se obtiene el triple del mayor. Determine los números.

19. La suma de tres números enteros (distintos) es 3. La suma del menor con el mayor es 2 y la diferencia entre ellos es –14. ¿Cuáles son los números?

20. La suma de tres números es 27. Si el mayor de ellos se divide por 5, se obtiene el primero y si el primero se multiplica por 3, se obtiene el segundo. ¿Cuáles son los números?

21. La suma de dos ángulos de un triángulo es igual a 86° y la diferencia entre ellos es 30°. Determine los tres ángulos del triángulo.

22. A, B y C reúnen en total $ 11.000. La diferencia entre el doble de lo que tiene C y lo que tiene A es $ 400 y la diferencia entre el doble de lo que tiene B y el triple de lo que tiene C es $ 570. ¿Cuánto tiene cada uno?

23. Compré tres artículos por $ 1.855. El primero y el tercero juntos costaron $ 205 más que el segundo, y el tercero costó $ 250 menos que el primero. Determine el precio de cada uno.

Soluciones

1. $x = 9$
   $y = 3$

2. $x = -\frac{11}{2}$
   $y = \frac{23}{2}$

3. $x = 14$
   $y = -10$

4. 11 monedas de $ 50
   35 monedas de $ 100

5. 15 y 45

6. a = $ 205
   b = $ 340

7. $x = 3$
   $y = 2$

8. $x = 11$
   $y = 7$

19. $x = 4$
   $y = -2$

10. $x = 1$
   $y = -1$

11. $x = 2.500$
   $y = 1.700$

12. $x = 1.005$
   $y = 695$

13. hijo: 14 años
   madre: 38 años

14. $\frac{2}{5}$

15. $x = \frac{1}{2}$
   $y = \frac{3}{4}$

16. $x = 9$
   $y = 3$

17. Ana: 12 años
   Rosa: 4 años

18. $x = 4$
   $y = 6$
   $z = 10$

19. $x = -6$
   $y = 1$
   $z = 8$

20. $a = 3$
   $b = 9$
   $c = 15$

21. $\alpha = 58$
   $\beta = 28$
   $\delta = 94$

22. a = $ 4.540
   b = $ 3.990
   c = $ 2.470

23. a = $ 640
   b = $ 825
   c = $ 390

Problemas misceláneos 14.4

1. Un trabajador tiene un contrato por 48 horas semanales o 192 horas mensuales. Cada mes recibe un sueldo bruto consistente en:

Sueldo base	\$330.240
Asignación zona	\$ 66.048
Antigüedad	\$ 39.625

Determine su valor hora base, su porcentaje de asignación de zona y su porcentaje correspondiente a antigüedad.

2. Un alumno ha sacado las siguientes notas en álgebra: 5,5; 6,2; 5,8; 6,6 en una escala de 1 a 7. Debe dar una prueba más. Averigüe qué nota debe obtener en esa prueba para lograr un promedio final 6,5.

3. Se deben preparar 100 ml de un jarabe para la tos, con una droga que viene con una concentración de 5 mg/ml y un elixir saborizante de miel para distraer el sabor de la droga. ¿Cuánto se debe usar de cada ingrediente si la solución debe quedar con una concentración de 2mg/ml?

4. Dados los siguientes enunciados, expréselos como una fórmula donde intervengan las variables y una constante k. En cada caso estime el valor de la constante según las condiciones dadas.
   - **a)** x es directamente proporcional a y. Si x es 22, entonces y es 66.
   - **b)** r varía en forma directa respecto de t. Si r = 24; entonces t = 6.
   - **c)** p es inversamente proporcional a la suma de r y t. Si r = 0,4 y t = 0,8, entonces p = 1,4
   - **d)** La energía cinética E_C varía en forma directamente proporcional a la masa y al cuadrado de la velocidad con que se mueve un cuerpo. Si m = 6, v = $\sqrt{10}$, entonces $E_C = 30$.
   - **e)** La velocidad de desplazamiento v de un cuerpo varía en forma directamente proporcional a la distancia recorrida d, e inversamente proporcional al tiempo t que se demora en recorrerla. Si d = 10 m y t = 2 seg, entonces v = 5 m/seg.

5. Una empresa de distribución de correspondencia debe repartir x cartas en 3 días. El primer día reparte a sobres, el segundo día

reparte 6 sobre menos que el primer día. Determine cuántos sobres le quedan por repartir el tercer día.

6. Sea $A = x + y$ y $b = x - y$. Encuentre el valor de x^2.

7. Se sabe que $\frac{1}{x} + \frac{2}{x} = m$ y $\frac{1}{m} + \frac{1}{m} = 2$.
Determine el valor de x.

8. Si $x + 2x + 3x = 48$, encuentre el valor de $\frac{x \cdot x}{x + x}$

9. Si $t + 2t + 3t + 4t = 1$, encuentre el valor de
$\frac{1}{t} + \frac{2}{t} + \frac{3}{t} + \frac{4}{t} + \frac{5}{t}$

10. Con a litros de bencina un automóvil alcanza a recorrer las tres quintas partes del camino entre dos ciudades. Determine cuántos litros se necesitan para recorrer el trayecto de ida y vuelta.

11. De un total de n alumnos que rindió la prueba de ingreso a la educación superior reprobaron b alumnos. Calcule el porcentaje de alumnos que aprobó.

12. Si r es el 25% de A y t es el 75% de A, escriba r en función de t.

13. Para preparar 120 kg. de concreto (cemento con arena), en los primeros 40 kg se usa la proporción 3:2 y en el resto, se usa la proporción 2:3 de cemento y arena, respectivamente. Determine cuánta arena se usó.

14. Tres amigos reparten equitativamente entre ellos $960.000 en billetes de 1.000, 5.000 y 10.000. Si cada uno recibe la misma cantidad de billetes de cada denominación, ¿cuánto dinero recibe cada amigo en billetes de 1.000?

15. En un mapa se lee: escala 1 : 120.000. Se mide con una regla la distancia entre dos pueblos y se encuentra que es 5,4 cm. Calcule la distancia real.

16. Se dispone de un presupuesto mensual de $10.000 para comprar dulces o chocolates. Si cada dulce cuesta 10 pesos y cada chocolate cuesta 50 pesos.

   a) Escriba una fórmula que relacione la cantidad de dulces con la cantidad de chocolates que se pueden comprar.

   b) Grafique la función que resultó.

   c) Compare las intersecciones con los ejes del gráfico con la cantidad de dulces que podría comprar si no comprara chocolates y con la cantidad de chocolates que se podría comprar si no comprara dulces.

17. Una empresa invierte \$3.000.000 en una maquinaria que tiene una vida útil de 5 años; después quedará totalmente desvalorizada. Escriba una fórmula que relacione el valor de la maquinaria con el tiempo transcurrido.

18. La diagonal de un cuadrado mide 10 cm más que su lado. Calcule la medida del lado.

19. Un paralelepípedo (sólido rectangular) mide 3 cm de largo, 2 de ancho y 1 de alto. Si duplico sus magnitudes lineales, ¿qué pasa con su volumen?

20. Una cañería de agua de 1 cm de radio transporta líquido a razón de 1,2 m/s. ¿Cuánta agua sale en 1 hora?

Soluciones

1. 1.720, 20%, 12%

2. No puede subir a 6.5. Tendría que obtener un 8.2 en la prueba que le queda.

3. 40 ml de concentrado de droga.
60 ml de saborizante.

4. **a)** $x = ky$; $k = 3$

b) $r = kt$; $k = 4$

c) $p = k\dfrac{1}{r+t}$; $k = 1.68$

d) $E_c = k\,mv^2$; $k = \dfrac{1}{2}$

e) $v = k\dfrac{d}{t}$; $k = 1$

5. $x - 2a + b$

6. $A \cdot B - y^2$

7. 3

8. 4

9. 150

10. $\dfrac{10}{3}$ a lt

11. $\dfrac{n-b}{n} \cdot 100$

12. $x = \dfrac{1}{3}t$

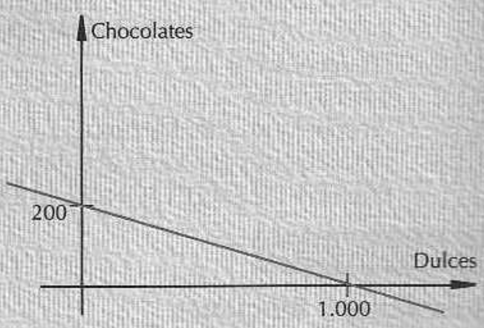
13. 64 kg

14. 20.000 pesos.

15. 6,48 km.

16. **a)** $x + 5y = 1.000$

b)



17. $y = 3.000.000 - 600.000x$
(x = tiempo y = valor)

18. 24,142 cm

19. **a)** Se aumenta ocho veces.

20. 604.800 c.c.

Índice

Capítulo 1

Álgebra en los Números Reales

Capítulo 2

Ecuaciones e inecuaciones de primer grado

Capítulo 3

Relaciones y funciones

Capítulo 4

Ecuaciones e inecuaciones de segundo grado

Capítulo 5

Polinomios y teoría de ecuaciones

Capítulo 6

Potencias y Raíces

+ Guía clase.

Capítulo 10

Vectores

Capítulo 11

Matrices y determinantes

Índice

Capítulo 12

Sumatoria y progresiones

Capítulo 13

Análisis combinatorio, Teorema del binomio y Elementos de probabilidades

Capítulo 14

Problemas

Índice Analítico

CONTENIDOS

ÁLGEBRA
ARRAYAN

Álgebra Arrayán es una obra que ofrece excelentes recursos de aprendizaje, de aplicación y de ejercitación a los estudiantes y profesores de enseñanza media y universitaria.
Las materias están tratadas siguiendo una metodología dinámica y de rápida aplicación a partir de numerosos ejercicios resueltos, en los que se incluyen los pasos para la elaboración y resolución de problemas algebraicos. Además, al término de cada capítulo de esta obra se ofrece una Prueba de Selección Múltiple en la que se acompañan las soluciones para que el usuario de este libro pueda establecer las evaluaciones y corroboraciones de sus avances en el aprendizaje del álgebra.

Este libro constituye una herramienta eficaz de aprendizaje, gracias a una estructura organizada por capítulos que cubren ampliamente el marco de contenidos requeridos para adquirir el dominio del álgebra.

Ximena Carreño Campos y *Ximena Cruz Schmidt*, prestigiosas docentes especialistas en esta materia, autoras del libro Álgebra Arrayán, han escrito una obra que sin lugar a dudas es un aporte significativo al estudio del álgebra.

9 789562 401685

ARRAYAN
EDITORES M.R.